technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. Ivan Veselić Dr. Albrecht Seelmann

0. Übungsblatt zur Vorlesung

Analysis III für Lehramt

im Wintersemester 2022/23

Hinweis: Die Aufgaben auf diesem Blatt sind nicht zur Abgabe vorgesehen und werden bereits in den Übungen in der ersten Woche der allgemeinen Vorlesungszeit besprochen.

Aufgabe 1) (Gebiete)

Sei X ein metrischer Raum, und seien $U, V \subset X$ Gebiete.

(a) Ist der Schnitt $U \cap V$ stets ein Gebiet? (Beweis oder Gegenbeispiel)

(b) Zeigen Sie: Die Vereinigung $U \cup V$ ist genau dann ein Gebiet, wenn $U \cap V \neq \varnothing$ gilt.

Aufgabe 2) (Parameterabhängige Integrale I)

Die Funktion $g\colon [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$g(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2} & \text{falls } x^2+y^2<1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} g(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Aufgabe 3) (Ausschöpfungen mit messbaren Mengen)

(a) Es sei $D \subset \mathbb{R}^2$ das durch die Punkte $(0,0)$, $(4,0)$ und $(3,1)$ gegebene Dreieck (mit Rand). Wir wollen den Flächeninhalt von D durch Ausschöpfung mit Quadraten bestimmen:

Für $k \in \mathbb{N}$ und jedes $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, das $2^k a := (2^k a_1, 2^k a_2) \in \mathbb{Z}^2$ erfüllt, setzen wir $Q_{a,k} := [a_1, a_1 + 2^{-k}] \times [a_2, a_2 + 2^{-k}]$ und definieren $D_k := \{Q_{a,k} \mid Q_{a,k} \subset D\}$. Berechnen Sie nun das Volumen $\lambda^2(D)$ über den Grenzwert

$$\lambda^2(D) = \lim_{k\to\infty} \sum_{Q_{a,k} \in D_k} \lambda^2(Q_{a,k}).$$

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem tatsächlichen Flächeninhalt des Dreiecks (Formel aus der Schule).

(b) Wie bekommt man aus (a) den Flächeninhalt des von den Vektoren $u = (4,0)^T$ und $v = (3,1)^T$ aufgespannten Parallelogramms P?

(c) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis aus (b) mit der Formel

$$\lambda^2(P) = \det(u,v),$$

wobei (u,v) die aus den Spalten u und v gebildete 2×2-Matrix bezeichnet.