Analysis III für Lehramt, WiSe 2022/23

Erinnerungen aus Analysis II

Im Folgenden werden ein paar Begriffe und Sätze aus der Analysis II in aller Kürze wiederholt. Dies soll Ihnen bei der Bearbeitung der Blätter 0 und 1 helfen und für eine gemeinsame Stoffgrundlage sorgen.

Wegzusammenhang und Gebiete

Sei X ein metrischer Raum. Eine Menge $U \subset X$ heißt *wegzusammenhängend*, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in U$ stets eine stetige Abbildung $\gamma\colon [0,1] \to U$ (d.h. einen *Weg* γ) mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$ gibt.

Ist $U \subset X$ offen und wegzusammenhängend, so heißt U ein *Gebiet*.

Parameterabhängige Integrale

Für $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ sei $f\colon \Omega \times [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Wir definieren $F\colon \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) := \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in \Omega.$$

Satz 1 *Die Funktion F ist stetig auf ganz Ω.*

Satz 2 *Ist Ω offen und existieren die partiellen Ableitungen $D_k f\colon \Omega \times [a,b] \to \mathbb{R}$ für $k \in \{1, \dots, d\}$ und sind diese alle stetig auf $\Omega \times [a,b]$, so ist F partiell differenzierbar auf Ω, und es gilt*

$$D_k F(x) = \int_a^b D_k f(x,t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in \Omega,\ k \in \{1, \dots, d\}.$$