

**HANDSCHRIFTLICHE NOTIZEN
ANALYSIS II LEHRAMT
IM SOMMERSEMESTER 2022**

PROF. DR. IVAN VESELIĆ

CAVEAT EMPTOR — ES IST, WIE ES IST.

Die vorliegende Datei beinhaltet meine handschriftlichen Notizen, anhand derer ich die Vorlesung Analysis II (für Lehramt) an der TU Dortmund im Sommersemester 2022 gehalten habe. Manchmal bin in der Vorlesung selbst von den Notizen abgewichen, im großen und ganzen hielt ich mich aber recht eng daran. An manchen Stellen habe ich die Notizen nach der Vorlesung nachbearbeitet.

Es gibt sicherlich eine Reihe von kleineren Fehlern (Schreibfehler, Vorzeichenfehler, etc.). Die Notizen können das eigene Denken und Nachvollziehen der Schritte und Argumente nicht ersetzen. Sie sind als Hilfe gedacht, um Stellen in Ihrem eigenen Manuscript, die lücken- oder fehlerhaft sind, abgleichen zu können. Falls Sie an der TU Dortmund (oder anderen Universitäten der Ruhr-Allianz) eingeschrieben sind, haben Sie die Möglichkeit, sich die Video-Aufnahmen der Vorlesung anzuschauen, die unter Moodle bereitgestellt werden. Im Zweifelsfalle konsultieren Sie die angegebene Literatur.

QUELLEN UND BEZÜGE

In der Vorlesung bezog ich mich insbesondere auf das Skript [Bru21] sowie die Bücher [Kab00, Kab97] und zu einem geringeren Maße auf das Skript [Len17]. Ich bedanke mich bei den Kollegen Rainer Brück und Daniel Lenz, dass sie mir ihre unveröffentlichten Skripte freundlicherweise zu Verfügung gestellt haben.

Als weitere Literatur können zum Beispiel die anderen im Literaturverzeichnis aufgeführten Bücher nützlich sein.

Ich bedanke mich bei den Assistenten der Vorlesung, Herrn Max Kämper, Herrn Lars Schroeder und insbesondere Herrn A. Seelmann.

Den Lesern wünsche ich viel Freude und Erfolg beim Nachvollziehen der Mathematik, die in diesem Manuscript dargestellt wird.

I.V., Dortmund, den 18. Juli 2022

1. REIHEN
2. ABSOLUTE KONVERGENZ VON REIHEN
3. SUMMEN UND PRODUKTE VON REIHEN
4. DEZIMALBRUCHENTWICKLUNG
5. FUNKTIONENFOLGEN
6. FUNKTIONENREIHEN
7. POTENZREIHEN
8. TAYLOR-ENTWICKLUNG
- NACHTRAG 7.14
9. FUNKTIONEN IM $\mathbb{R}^d$
10. NORMEN UND METRIKEN
11. KONVERGENZ UND STETIGKEIT IN METRISCHEN RÄUMEN
12. PARTIELLE DIFFERENZIERBARKEIT VON FUNKTIONEN MEHRERER VARIABLEN
13. PARAMETERABHÄNGIGE INTEGRALE
14. PARTIELLE ABLEITUNGEN HÖHERER ORDNUNG
15. DIFFERENZIERBARE FUNKTIONEN
16. MITTELWERTSATZ UND TAYLORFORMEL
17. LOKALE EXTREMA
18. IMPLIZITE FUNKTIONEN
19. EXTREMA MIT NEBENEBCONDITIONEN

MINDMAP

LITERATUR

- [Bru21] Rainer Brück. Analysis I–III für Lehramt Gymnasium, 2021. TU Dortmund, unpublished manuscript.
- [For16] Otto Forster. *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*. Heidelberg: Springer Spektrum, 2016.
- [For17a] Otto Forster. *Analysis 2. Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, gewöhnliche Differentialgleichungen*. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2017.
- [For17b] Otto Forster. *Analysis 3. Maß- und Integrationstheorie, Integralsätze im $\mathbb{R}^n$ und Anwendungen*. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2017.
- [FS13] Otto Forster and Thomas Szymczak. *Übungsbuch zur Analysis 2. Aufgaben und Lösungen*. Heidelberg: Springer Spektrum, 2013.
- [FW17] Otto Forster and Rüdiger Wessoly. *Übungsbuch zur Analysis 1. Aufgaben und Lösungen*. Heidelberg: Springer Spektrum, 2017.
- [Heu08] Harro Heuser. *Lehrbuch der Analysis. Teil 2*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2008.
- [Heu09] Harro Heuser. *Lehrbuch der Analysis. Teil 1*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2009.
- [Kab97] Winfried Kabblo. *Einführung in die Analysis II*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 1997.
- [Kab99] Winfried Kabblo. *Einführung in die Analysis III*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 1999.
- [Kab00] Winfried Kabblo. *Einführung in die Analysis I*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 2000.
- [Kab18] Winfried Kabblo. Vorlesung Analysis I / Lehramt, 2018. TU Dortmund, unpublished manuscript.
- [Koe04a] Konrad Königsberger. *Analysis 1*. Berlin: Springer, 2004.
- [Koe04b] Konrad Königsberger. *Analysis 2*. Berlin: Springer, 2004.
- [Len17] Daniel Lenz. Analysis I–II Notizen, 2017. FSU Jena, unpublished notes.
- [Tao16a] Terence Tao. *Analysis I*, volume 37. Singapore: Springer; New Delhi: Hindustan Book Agency, 2016.
- [Tao16b] Terence Tao. *Analysis II*, volume 38. Singapore: Springer; New Delhi: Hindustan Book Agency, 2016.

Sommersemester 2022

Analysis II für das Lehramt

1. Veselec

1 Reihen

In der Analysis I haben wir uns mit Folgen und insbes. ihrer Konvergenz beschäftigt. Manche von ihnen waren als Summen gegeben, z. B. im Kontext der Exp-Fkt tauchte

die Folge $(E_n)_n$ $E_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$

1-1 auf. Wir wollen nun systematisch

$$s_n := \sum_{k=0}^n a_k \quad (n\text{-te Part.-s.})$$

die einer komplexen Fglg $a_0, a_1, a_2, \dots \in \mathbb{C}$ zugeordnet sind, untersuchen.

D 1.1 Die Fglg der Partialsummen $(s_n)_n$ wird (unendliche) Reihe genannt und mit dem Symbol

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots \text{ oder einfach } \sum a_k$$

bezeichnet.

a_n heißen Glieder der Reihe

D. 1.2 Eine Reihe $\sum a_n$, $a_n \in \mathbb{C}$, heißt konvergent zum Wert $s \in \mathbb{C}$ genau dann

wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ gilt

Dies ist äquiv zu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \operatorname{Re} a_k = \operatorname{Re} s \text{ und}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} s_n = \operatorname{Im} s$$

Wir schreiben im d. Fall $s = \sum a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$
und nennen s den (Reihen)wert oder die Summe
von $\sum a_k$.

Konvergiert die Reihe $\sum a_k$ nicht, heißt
sie divergent.

Bm 1.3 (a) Jede Flg (b_n) kann als
Reihe aufgefasst werden, wenn man

$$b_{-1} = 0, \quad \text{und} \quad a_k = b_k - b_{k-1} \quad (k \in \mathbb{N})$$

setzt, da dann $b_n = \sum_{k=0}^n a_k$

Streng logisch ist die Untersuchung v.

1-3 Flg. und Reihen äquivalent, aber anders

Aspekte werden betont, vgl. $f(x) = \int_0^x f'(t) dt$

(b) konverg. die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, so tut dies auch $\sum_{k=m_0}^{\infty} a_k$ für jedes $m_0 \in \mathbb{N}_0$, aber

der Wert hängt von m_0 ab. Insbes

ist bei einer konv. Reihe $\sum a_k$

die Folge

$$n \mapsto r_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

der Reihenneste wohldefiniert.

S 1.4 Seien $a_0, a_1, a_2, \dots \in \mathbb{C}$.

$$\sum a_k \text{ konvergiert} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$$

Bw Setze $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$. Dann

$$\boxed{1-4} \quad \sum a_k \text{ konv} \Leftrightarrow s := \lim_n s_n \text{ existiert}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \lim (s - s_n) = \lim r_n$$

Da $a_n = r_{n-1} - r_n$ folgt dann

$$\lim_n a_n = \lim_n r_{n-1} - \lim_n r_n = 0 \quad \square$$

S. 1.5 (Cauchy - Kriterium)

Sei $\sum a_k$ unendl. Reihe. Dann sind äquiv:

(i) $\sum a_k$ konvergiert

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$ mit
 $n > m \geq n_0 :$

$$\left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \varepsilon$$

Bw: Beachte $s_m - s_n = \sum_{k=m+1}^n a_k$ und

Wende Cauchy-krit f. Folg an. □

Bsp 1.6 (Geometrische Reihe)

1-5 Sei $z \in \mathbb{C}$, $a_k = z^k$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Zwei Anwendungen des Cauchy-Kriteriums,
bei beiden spielt Monotonie eine Rolle

Kor. 1.5 a

$\mathbb{R} \supset (a_k)_k$ antiton und $\sum a_k < \infty$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} k \cdot a_k = 0$$

Insbes. geht a_k "schneller gegen Null" als $\frac{1}{k}$.

Bw:

$$\begin{aligned} \text{antiton: } 2j \cdot a_{2j} &\leq 2(a_{j+1} + a_{j+2} + \dots + a_{2j}) \\ &\leq 2\varepsilon \text{ nach Cauchy} \\ &\text{für } j \text{ groß genug} \end{aligned}$$

analog:

$$\begin{aligned} (2j-1) a_{2j-1} &\leq 2(a_j + a_{j+1} + \dots + a_{2j-1}) \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

Also ist $k \cdot a_k$ Nullf.

S. 1.5.b. (Leibniz - Kriterium)

$(a_k)_k \subset \mathbb{R}_+$ antitome Nullfz

$\Rightarrow$ alternierende Reihe $\sum (-1)^k a_k$ konverg.

Fehlerabsch: $|s - s_m| \leq a_{m+1}$

Bw m gerade $\& m > n$: Antitomie

$$\sum_{k=m}^m (-1)^k a_k = a_m - \overbrace{(a_{m+1} - a_{m+2})}^{\geq 0} - \overbrace{(a_{m+3} - a_{m+4})}^{\geq 0} - \dots \leq a_m$$

$$\sum_{k=m}^m (-1)^k a_k = \underbrace{(a_m - a_{m+1})}_{\geq 0} + \underbrace{(a_{m+2} - a_{m+3})}_{\geq 0} + \dots \geq 0$$

Analog für n ungerade

$$-a_m \leq \sum_{k=m}^m (-1)^k a_k \leq 0$$

$\Rightarrow$ in beiden Fällen für $n \leq m \in \mathbb{N}$:

$$\left| \sum_{k=n}^m (-1)^k a_k \right| \leq |a_n| \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad \square$$

(Cauchy-krit anwenden)

Fehlerabsch:

für konverg.
1-7

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k - \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k a_k \right| \leq \sup_m \left| \sum_{k=m}^m (-1)^k a_k \right| \leq |a_m|$$

$$z \neq 1 \Rightarrow S_m = \sum_{k=0}^m z^k = \frac{1 - \underbrace{z^{m+1}}_{\rightarrow 0}}{1 - z}$$

$$|z| < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1 - z}$$

$|z| > 1 \Rightarrow a_k = z^k$ bildet keine Nullf.

$\Rightarrow$ Reihe $\sum a_k$ divergent.

2. B. $z = \frac{1}{2} \Rightarrow S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$

Bsp. 1.7 Harmonische Reihe

$\sum a_k$ mit $a_k = \frac{1}{k}, a_0 = 0$ divergiert

Beh: $\forall m \in \mathbb{N}_0: S_{2m} = \sum_{k=1}^{2m} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{m}{2}$

Bw mit Ind. über m .

$m = 0$: $S_1 = a_1 + a_0 = 1 \quad \checkmark$

$$\begin{aligned}
 \underline{m \rightarrow m+1} \quad S_{2^{m+1}} &= \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{k} \\
 &\stackrel{\text{I.A.}}{\geq} \left(1 + \frac{m}{2}\right) + \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{2^{m+1}} \quad \checkmark \\
 &= \frac{2^{m+1} - 2^m}{2^{m+1}} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \\
 &\geq 1 + \frac{m}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}(m+1) \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Damit wächst die Folg. d. Part-S. unbeschr.
 denn zu $n \in \mathbb{N}$ finde $m \in \mathbb{N}$ mit

$n \geq 2^m$. Dann alle Summanden $\frac{1}{k} > 0$.

$$S_m \geq S_{2^m} \geq 1 + \frac{m}{2} \Rightarrow (S_k)_k \text{ istom}$$

Insbes. ist $\sum \frac{1}{k}$ divergent.

Vgl. mit S. 14.

$(\frac{1}{k})$ ist Nullf. aber $\sum \frac{1}{k}$ divergiert.

1-9 "Die Reihenglieder streben zu langsam gegen Null".

Bsp. 1.8

Aus obigem ergibt sich die Divergenz
des uneig. Intg.

$$\int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$$

Bw: $\forall m \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{m \cdot \pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = \sum_{k=1}^m \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{\underbrace{x}_{\leq k\pi}} dx$$

$$\geq \sum_{k=1}^m \frac{1}{k\pi} \underbrace{\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x| dx}_{\text{period.}}$$

$$= \int_0^{\pi} |\sin x| dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 2$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty$$

Später sehen wir, dass es einen system.
Zush. zwischen Konvergenz von Reihen und

uneig. Intg. gibt.

$a_n \searrow 0 \Rightarrow \sum_{k \in \mathbb{N}_0} a_k (-1)^k$ konvergent

und $|s - s_{n-1}| \leq a_n$ wird Leibnitz-
kriterium genannt.

Bsp. 1.5. c Alternierende harmonische
Reihe

$a_n = \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$ ist antiton Nullfg.

Leibnitz - krit $\Rightarrow \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots$

ist konvergent.

Aufwändigere Methoden liefern

$$- \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \frac{1}{k} = \ln 2$$

Uns interessieren im bes. Konvergenzkrit
für Reihen. Folgendes Lem ergibt sich
direkt aus den konv. - Eig. von Folgen:

Sind alle $a_k \geq 0$ so ist $(s_n)_n$
isoton.

L 1.9 (i) Seien $\forall k \in \mathbb{N} \quad a_k \geq 0$.

Dann: $\sum a_k$ konvergent $\Leftrightarrow$ Folg. $(s_n)_n$
beschränkt.

(ii) Seien $\forall k \in \mathbb{N} \quad a_k, b_k \geq 0$. Gibt es
nun ein $C > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall k \geq n_0 : \quad a_k \leq C \cdot b_k$$

so gelten:

$$\sum b_k \text{ konvergent} \Rightarrow \sum a_k \text{ konv.}$$

$$\sum a_k \text{ divergent} \Rightarrow \sum b_k \text{ diverg.}$$



Satz 1.10 (Integralvergl. - krit.)

Sei $f \in C([1, \infty))$ antiton & $f \geq 0$.

Dann gilt:

Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konv $\Leftrightarrow$ uneig. Int

$\int_1^{\infty} f(x) dx$ konverg. existiert.

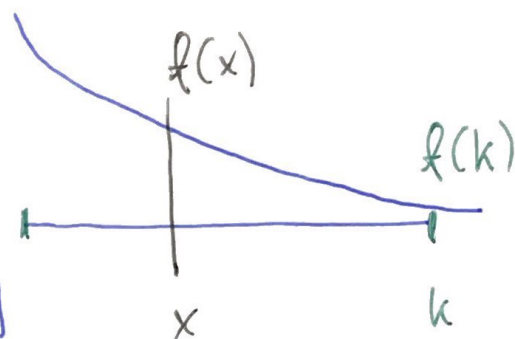
Bw: Skizze:

Da $f \geq 0$: L. 1.9 (i)

$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \sum_1^m f(k) < \infty \Rightarrow \sum f(k)$ konvergiert
analog f. uneig. Int.

$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \int_1^m f(x) dx < \infty \Rightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx$ existiert

Da f antiton:



$f(k) \leq f(x)$ für $x \in [k-1, k]$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^m \int_{k-1}^k dx \quad f(k) \leq \sum_{k=2}^m \int_{k-1}^k f(x) dx$$

Bh folgt nun
wie in L. 1.9. (ii).

analog

$$\leq \dots \leq \sum_{k=2}^m f(k-1)$$

$$= \int_1^m f(x) dx$$

Sind (a_k) isotone und (b_k) konv. Folge
mit $\forall k: a_k \leq b_k$

$\Rightarrow (b_k)$ beschr. Flg

$\Rightarrow (a_k)$ konvg.

Dies kann man in beide Richtungen anwenden

$\Rightarrow$ Äquivalenz



Bsp. 1-11

Bh: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert.

Bw: Es reicht z.z., dass Folg. (s_n) beschr. ist, da $\frac{1}{k^2} > 0$.

$$n \geq 2 \Rightarrow S_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right) = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2}$$

$$\leq 1 + \sum_{k=2}^n \underbrace{\frac{1}{k(k-1)}}$$

$$= \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2$$

Teleskopsumme

$\frac{1}{k^2}$ fällt schnell genug ab, s.d. $\sum \frac{1}{k^2} < \infty$

$\frac{1}{k}$ || zu langsam ab, s.d. $\sum \frac{1}{k} = \infty$

2-14 Mit aufwändigeren Meth. zeigt man: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

2 Absolute Konvergenz von Reihen

Ist $\sum_{k \in \mathbb{N}_0} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ konvergent
gegen $S \in \mathbb{C}$

so können wir beliebig Klammern setzen,

d.h. für jede streng isotone Fgl

$(k_m)_m \subset \mathbb{N}$ mit $k_0 = 0$ gilt

$$S = \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} a_k \right)}_{=: b_j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{k_{j+1}} a_k}_{\tilde{S}_j(b)}$$

da die Folge der

Teilf. der Folge $n \mapsto S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ ist.

Part- Σ zu Fgl (b_j)

Dagegen dürfen Klammern in einer konv.

unendl. Reihe $\sum a_k$ nicht weglassen werden,

z.B. ist

$$0 = \sum_k 0 = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots$$

offen sichtlich konv.

Löst man die Klammern weg, erh.

die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ mit diverg. Part- $\sum$

$$s_n = \begin{cases} 0 & n \text{ unger} \\ 1 & n \text{ gerad.} \end{cases}$$

D.2.1 Für $a_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}_0$ heißt die Reihe $\sum a_k$ absolut konvergent, falls $\sum |a_k|$ konvergent ist.

L.2.2
 $\sum a_k$ absolut konverg. $\Rightarrow \sum a_k$ konv.

Bw: $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $m > n$ gilt
$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |a_k| \stackrel{\text{abs. kon.}}{< \varepsilon}.$$

für n groß

Cauchy-Kriterium liefert Aussage. $\square$

2-6 Bsp. 1.5. c, altern. harm Reihe, zeigt, dass Umkehrung nicht gilt.

B.2.3 Sind a_k reell, gilt mit $a^\pm = \max\{-a, 0\}$

(α) $\sum a_k$ absolut konvergent $\Leftrightarrow \sum a_k^+$ und $\sum a_k^-$ konvergent.

Bw: $\sum_{k=1}^n a_k^+ \leq \sum_{k=1}^n \underbrace{|a_k|}_{\geq 0} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ beschr.
Monotoniekrit. & Flg.

(β) $\sum a_k$ konverg., aber nicht absolut konv.
 $\Rightarrow \sum a_k^+$ und $\sum a_k^-$ divergent.

Widerspruchsbw mit Teil (α)

D.2.4: Seien $(a_k), (b_k) \subset \mathbb{C}$. Gilt für fast alle k : $|a_k| \leq b_k$, so heißt

$\sum b_k$ Majorante von $\sum a_k$.
Minorante

Gilt für fast alle k : $0 \leq b_k \leq a_k$,

so heißt $\sum b_k$ Minorante von $\sum a_k$.

2-7 Aus 1.9 folgt direkt:

S. 2.5 (Majoranten & Minoranten Kriterium)

Seien $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$.

(i) $\sum b_n$ Majorante von $\sum a_n$ und $\sum b_n$ konvergent
 $\Rightarrow \sum a_n$ absolut konv

(ii) $\sum b_n$ Minorante von $\sum a_n$ & $\sum b_n$ divergent
 $\Rightarrow \sum a_n$ divergent

Bsp. 2.6 Sei $p > 0$ und $a_n = \frac{1}{n^p}$

Für $p > 2$ gilt $a_n = \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n^2} =: b_n$
also $\sum a_n$ (absolut) konvergent

Für $p \leq 1$ gilt $b_n := \frac{1}{n} \leq a_n$
also $\sum a_n$ divergent

Um den Bereich $p \in (1, 2)$ zu klären, benutzen wir das Integralvergl. krit. und Bsp.

15.3 (β) aus Ama I: Ist $p > 0$ und

2-8 $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{x^p}$

so exist. das uneig. Integr. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}$ genau

dann, wenn $p > 1$ ist. Also:

$$\sum_k \frac{1}{k^p} = \sum_k f(k) \quad \begin{matrix} \text{konv} \\ \text{Vgl.} \end{matrix} \xrightarrow{\text{Int}} \int_1^{\infty} x^{-p} \text{ konv}$$

$$\Leftrightarrow p > 1$$

Erinnerung:

Ist Folg. (a_k) bestimmt divergent gegen

$-\infty$, so schreibt man $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = -\infty =$

$$= \limsup_k a_k$$

S. 2.7 (Wurzelkriterium)

$$(i) \quad \text{Gilt } w := \overline{\lim}_k \sqrt[k]{|a_k|} < 1,$$

so ist $\sum a_k$ absolut konvergent.

(ii) Die Reihe $\sum a_k$ ist divergent, falls

$\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$ für unendlich viele Indizes k ,
insbes. falls $w > 1$.

Bw: (i) Wähle $q \in (w, 1)$. Da $w < q$

ex. ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q$

(d.h. $|a_k| \leq q^k$) für alle $k \geq k_0$.

$\Rightarrow \sum a_k$ hat Majorante $\sum q^k$
und diese ist konv.

Major-krit $\Rightarrow \sum a_k$ abs konv

(ii) es gibt unendliche Indexm $\mathbb{K}$ mit

$\forall k \in \mathbb{K} : \sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$ (d.h. $|a_k| \geq 1$),

insbes ist (a_k) keine Nullf. $\stackrel{1.4}{\Rightarrow} \sum a_k$ diver.
 $\square$

Bsp. 2.8

(a) Für $a_k = \frac{k^4}{2^k}$ die Reihe $\sum a_k$ konvg.,

da $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k^4}{2^k} \right)^{1/k} = \lim_k \frac{k^{4/k}}{2} = \frac{1}{2} < 1$

da $\sqrt[k]{k} \rightarrow 1$ nach A G M - Ungl.

(b) analog folgt: $\forall p \in \mathbb{N}_0$ und $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$

ist $\sum_{k=1}^{\infty} k^p z^k$ abs. konvergent.

(c) Für $a_k = \left(\frac{2 + (-1)^k}{4} \right)^k$ gilt

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{4} (2 + (-1)^k) \text{ also}$$

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{3}{4} \left(\text{und } \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{4} \right)$$

$\Rightarrow \sum a_k$ konvergiert.

S. 2.9 (Quotientenkriterium)

(i) Gilt $a_k \neq 0$ für alle k und $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$

so ist $\sum a_k$ abs. konvergent.

(ii) $\sum a_k$ divergiert, falls ab einem $k_0 \in \mathbb{N}$

$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \geq 1$ gilt, insbes. falls

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1.$$

Bw: (i) Wähle $q \in (v, 1)$, insbes

$$\overline{\lim}_k \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q \quad \text{Also ex } k_0 \in \mathbb{N} \text{ s.d.}$$

$$\forall k \geq k_0: \quad \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q$$

$$\Rightarrow \left| \frac{a_k}{a_{k_0}} \right| = \left| \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdots \frac{a_{k_0+1}}{a_{k_0}} \right| \leq q^{k-k_0}$$

$$\Rightarrow |a_k| \leq q^{k-k_0} |a_{k_0}|$$

$$q < 1 \Rightarrow \sum q^k \text{ konvergent} \xrightarrow{\text{L.1.9.}} \sum a_k \text{ absolut konverg.}$$

$$(ii) \quad \forall k \geq k_0: \quad \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1 \Rightarrow |a_{k+1}| > |a_k|$$

$$\Rightarrow a_k \text{ keine Nullf.} \xrightarrow{\text{S.14}} \sum a_k \text{ diverg.} \quad \square$$

Bsp. 2.10 Untersuche $\sum a_k$ auf (abs) konverg.

$$(a) \quad a_k = \frac{z^k}{k!}, \quad z \neq 0 \in \mathbb{C},$$

$$\Rightarrow \lim_k \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_k \left| \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{z^k} \right| = \lim_k \frac{|z|}{k+1} = 0$$

$$\boxed{2-12} \Rightarrow \sum a_k \text{ absolut konv. (auch für } z=0).$$

Bw: (i) Wähle $q \in (v, 1)$, insbes

$$\overline{\lim}_k \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q \text{ also ex } k_0 \in \mathbb{N} \text{ s.d.}$$

$$\forall k \geq k_0: \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q$$

$$\Rightarrow \left| \frac{a_k}{a_{k_0}} \right| = \left| \frac{a_k}{a_{k-1}} \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \dots \frac{a_{k_0+1}}{a_{k_0}} \right| \leq q^{k-k_0}$$

$$\Rightarrow |a_k| \leq q^{k-k_0} |a_{k_0}|$$

$q < 1 \Rightarrow \sum q^k$ konvergent $\xRightarrow{\text{L.1.9.}} \sum a_k$ absolut konverg.

$$(ii) \forall k \geq k_0: \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1 \Rightarrow |a_{k+1}| > |a_k|$$

$\Rightarrow a_k$ keine Nullf. $\xRightarrow{\text{s. 14}} \sum a_k$ diverg. $\square$

Bsp. 2.10 Untersuche ^{20.4} $\sum a_k$ auf (abs) konverg.

$$(a) a_k = \frac{z^k}{k!}, \quad z \neq 0 \in \mathbb{C},$$

$$\Rightarrow \lim_k \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_k \left| \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} \frac{k!}{z^k} \right| = \lim_k \frac{|z|}{k+1} = 0$$

2-12 $\Rightarrow \sum a_k$ absolut konv. (auch für $z=0$).

$$(b) \quad a_k = \frac{k!}{k^k} z^k, \quad 0 < z \neq 0$$

$$\begin{aligned} \frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} z \frac{k^k}{k!} = z \frac{(k+1) k^k}{(k+1) (k+1)^k} \\ &= z \left(\frac{k}{k+1} \right)^k = \frac{z}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k} \longrightarrow \frac{z}{e} \end{aligned}$$

Also:

$$|z| < e \Rightarrow \sum a_k \text{ abs konv}$$

$$|z| > e \Rightarrow \sum a_k \text{ div.}$$

Man kann hier auch das Wurzelkriterium anwenden, ist aber aufwändiger.

$$(c) \quad a_k = k^{-p} \quad \frac{\ln x}{x} \longrightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow \infty$$

Da $\exp(\cdot)$ stetig ist folgt für $p > 0$

$$1 > \sqrt[k]{\frac{1}{k^p}} = k^{-\frac{p}{k}} = \exp\left(-p \frac{\ln k}{k}\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} e^{-p \cdot 0} = 1$$

Das Wurzelkriterium ist also nicht anwendbar, genauso wenig das

$\sum \frac{1}{k^p}$ anwendbar, genauso wenig das

Quotientenkriterium, da ja

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k^p}{(k+1)^p} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^p} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$$

und $\frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$.

(d) Sei $a_k = 2^{-k}$ k gerade
 3^{-k} k ungerade

Quotientenkrit. anwendbar?

k gerade: $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2^k}{3^k} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^k \rightarrow 0$

k ungerade $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{3^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^k \rightarrow \infty$

Nein!

Wurzelkriterium liefert wg.

$$\sqrt[k]{a_k} \leq \sqrt[k]{2^{-k}} = \frac{1}{2} < 1$$

absol. konvergenz.

Quotientenkriterium ineffizient bei vermisch.
von zwei schnell, aber unterschiedlich
fallenden Folgen.

Glieder $a_n = 0$ tragen nicht zur Summe
bei $\Rightarrow$ weglassbar

$\Rightarrow$ Ann $a_n \neq 0$ im Quot. krit.
keine wirkliche Einschränkung.

Kann immer das Quot.-krit. eine konv. Auss.
liefert, dann auch das Wurzel-krit. (letzteres
ist aber häufig rechnerisch aufwendiger).

S. 2.11 Sei $C \in \mathbb{R}$, $a_n > 0$ und $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq C$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann

$$\lim_k \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} \leq \overline{\lim}_k \sqrt[k]{a_k} \leq \overline{\lim}_k \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

Bw: Übq.

0.2.12 (a) Eine konverg. aber nicht absolut
konv. Reihe nennen wir bedingt konverg.

(b) Eine Reihe $\sum b_k$ heißt Umordnung
der Reihe $\sum a_k$, falls es eine Bijektion

$$\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

gibt, s. d. $\forall k \in \mathbb{N} \quad b_k = a_{\varphi(k)}$

Dies ist motiviert durch folgendes:

Ist $b_1 + \dots + b_N$ eine Umordnung der
endlichen Reihe $a_1 + \dots + a_N$, so haben
beide den selben Wert wg. des kom-
mutativ gesetztes in $\mathbb{C}$. (Ich kann
beide als unen gl. Reihen auffassen,
in dem ich $a_{N+1} = b_{N+1} = a_{N+2} = b_{N+2} = \dots$
 $= 0$ setze. Dann sind beide Reihen
offensichtlich absolut konvergent.

Im Gegensatz dazu steht

Bsp. 2.13 Nach dem Leibniz-Krit. ist
die altern. harmonische Reihe

$$s := - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

+ - + -

konvergiert, aber nicht absolut, da $\sum \frac{1}{k}$
divergiert.

Falls „unendliches kommutativgesetz“ gilt,
muß folgende Umordnung denselben Wert
haben:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \dots$$

+ - - + - - + - - + -

$$= (1 - \frac{1}{2}) - \frac{1}{4} + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6}) - \frac{1}{8} + (\frac{1}{5} - \frac{1}{10}) - \frac{1}{12} + (\frac{1}{7} - \frac{1}{14}) - \dots$$

klammern

setzen.

Partialsommen

$$t_1 \quad (t_2) \quad (t_3) \quad t_4 \quad (t_5) \quad (t_6) \quad t_7 \quad (t_8) \quad (t_9) \quad t_{10} \quad (t_{11})$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \dots$$

$$= \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots) = \frac{1}{2} s$$

$\Rightarrow$ Unterschiedliche Werte $\Rightarrow$ unendl. Komm-Ges.
gilt nicht für diese Reihe

Noch zu klären: konv. Reihe ohne Klammern
auch gegen $\frac{1}{2} s$?

Diese hat Partialsummen $t_1, t_2, t_3, t_4, \dots$

Die Part-Summen der Reihe mit Klammern
sind eine Teilfolge davon

$$t_2 \ t_3 \quad t_5 \ t_6 \quad t_8 \ t_9 \quad t_{11} \ \dots \rightarrow \frac{s}{2}$$

$$\text{Gilt auch} \quad t_1 \ t_2 \ t_3 \ t_4 \rightarrow \frac{s}{2}$$

Beob: * Maximal ein Folgenglied weglassen

* dieses hat Abstand zum nächsten der

$$\text{Form} \quad |t_{10} - t_{11}| = 1/14$$

$$\text{allg} \quad |t_k - t_{k+1}| = 1/m \quad \text{mit } m > k$$

* da $\frac{1}{m} \rightarrow 0$ konvergiert $(t_n)_k$

zum selben Limes.

Gute Nachricht: Für absolut konvergente Reihe gilt „unendl. Kommut-Ges“.

S.2.14 Umordnungssatz

Seien $a_k \in \mathbb{C}$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann gelten

(i) $\sum a_k$ absolut konv.

$\Leftrightarrow \forall$ Bijektionen $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ist $\sum a_{\varphi(k)}$ konverg

$\Rightarrow \forall$ Bij.: $\sum a_k = \sum a_{\varphi(k)}$

(ii) $\sum a_k$ bedingt konv.

$\Rightarrow \exists$ Bij $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ s.d. $\sum a_{\varphi(k)}$ divergent

(iii) Sind alle $a_k \in \mathbb{R}$ gilt sogar

$\sum a_k$ bedingt konv.

$\Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} \exists$ Bij $\varphi = \varphi_\alpha: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit

$$\sum a_{\varphi(k)} = \alpha$$

Bw (iii)

Bem 2.3 (β) $\Rightarrow$

$\sum a_k^+$ und $\sum a_k^-$ bestimmt div. gegen $+\infty$

"Habe unerschöpflichen Vorrat sowohl an posit. als auch an neg. Reihengliedern"

Wähle $\alpha \in \mathbb{R}$. Summiere (endl. viele) positive Glieder so dass $\sum_{k=1}^N a_{\varphi(k)} \text{ Summe} \geq \alpha$

für ein $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bij. und $N \in \mathbb{N}$. Addiere nun neg. Glieder, s. d. $\sum_{k=1}^{N+M} a_{\varphi(k)} \leq \alpha$

Iteriere diese Prozedur.

Da $\sum a_k$ bed. konv $\Rightarrow |a_n| \rightarrow 0$

$\Rightarrow$ Komme mit den Approximationen $\sum_{k=1}^N a_{\varphi(k)}$ immer näher an α heran.

(ii) Im reellen Fall:

$\sum a_n$ konv $\Rightarrow \sum a_n^-$ beschr $\Rightarrow \exists C < \infty$ mit $a_n^- \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$\sum a_n^+$ div $\Rightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=1}^{N_1} a_k^+ > 2C$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{N_1} a_k^+ + \text{erstes negat. Glied} > C$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad \sum_k^{N_1+N_2} a_k^+ > 4C$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_h^{N_1+N_2} a_h^+ + \text{erste beiden neg. Glied.}} > 2C$$

$$= \sum_{h=1}^M a_{\varphi(h)} \quad \text{für ein } M \leq N_1+N_2+2$$

und Bij. $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ Umordnung konv. gegen $+\infty$.

Im komplexen Fall:

$$|a_n| \leq |\operatorname{Re} a_n| + |\operatorname{Im} a_n|$$

divergent $\Rightarrow$ mind. eines von beiden divergent.

$$\Leftrightarrow \sum |\operatorname{Re} a_n| \text{ div.} \Rightarrow \exists \text{ Bij } \varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ s.d.}$$

$$\sum \operatorname{Re} a_{\varphi(h)} \text{ divergent.}$$

$$\Rightarrow \sum a_{\varphi(h)} \quad -||- \quad \text{egal was } \sum |\operatorname{Im} a_{\varphi(h)}| \text{ macht.}$$

(i) " $\Rightarrow$ " Sei φ bel. Bij

$$\text{Setze } T_n = \sum_h^n |a_{\varphi(h)}| \leq \sum_h^\infty |a_n| =: A < \infty$$

$$\Rightarrow \lim_n T_n \leq A \Rightarrow \sum a_{\varphi(n)} \text{ abs konv.} \\ \Rightarrow \quad \quad \quad \parallel \quad \text{konvergent.}$$

" $\Leftarrow$ " Siehe Teil (ii)

Falls $s = \sum a_n$ und $t = \sum a_{\varphi(n)}$
absolut konvergent folgt $s = t$ (Übg.)

Intuitiv geht es um die Aussage

$$s - t = \sum a_n - \sum a_{\varphi(n)} = 0$$

d.h. die Summe von zwei Reihen.

3. Summen & Produkte von Reihen

L 3.1 Sind $a_n, b_n, \lambda \in \mathbb{C}$ ($n \in \mathbb{N}_0$) und

$\sum a_n$ und $\sum b_n$ konvergente Reihen, so

sind auch $\sum (a_n + b_n)$ und $\sum \lambda a_n$

konvergent und es gelten:

$$\boxed{3-10} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}_0} (a_n + b_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n + \sum_{n \in \mathbb{N}_0} b_n \quad \& \quad \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \lambda a_n = \lambda \sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n$$

Bw Wende Grenzwertsätze für Folg. auf
Partialsummenfolg. an. $\square$

Wesentlich schwierigere Frg:

Gilt für konv. Reihen $s = \sum a_k$, $t = \sum b_k$

auch $\sum a_k \cdot \sum b_k = s \cdot t$

Wie ist $\sum a_k \cdot \sum b_k$ überhaupt definiert?

Als $\sum_{k, l \in \mathbb{N}_0} a_k b_l$?

Im welcher Reihenfolge summiere ich über $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$?
MiHw Do 21.4.22

Setze $s_m = \sum_{k=0}^m a_k$ $t_m = \sum_{k=0}^m b_k$

Offenbar: $|s \cdot t - s_m t + s_m t - s_m t_m|$
 $\leq \underbrace{|s - s_m|}_{\rightarrow 0} |t| + |s_m| \underbrace{|t - t_m|}_{\rightarrow 0}$

Partialsum (s_m) konv. $\Rightarrow$ beschr.

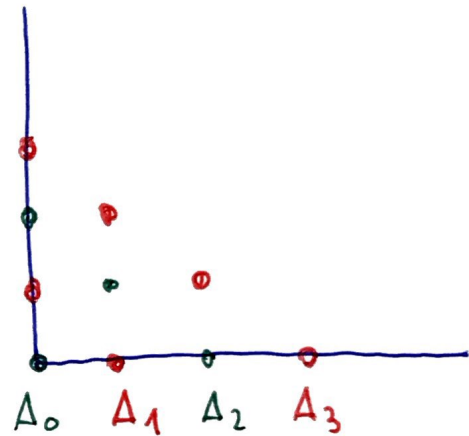
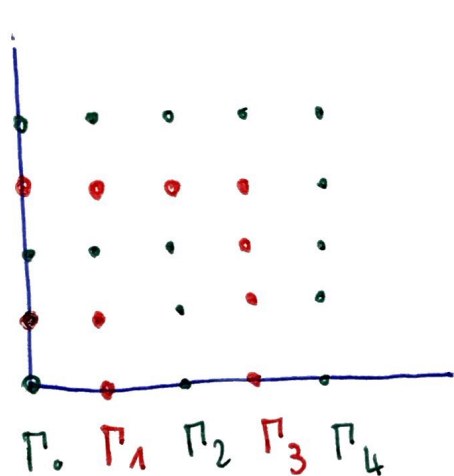
Also $s \cdot t = \lim_{m \rightarrow \infty} (s_m \cdot t_m)$

$$s_m \cdot t_m = \sum_k^m a_k \sum_l^m b_l = \sum_{k,l=0}^m a_k b_l =: \sum_{n=0}^m d_n$$

wobei $d_n = \sum_{(k,l) \in \Gamma_n} a_k b_l$, also:

$$s \cdot t = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} d_n$$

$$\Gamma_n = \{ (k,l) \in \mathbb{N}^2 \mid \max\{k,l\} = n \}$$



Stattdessen kann man die Doppelsumme auch in eine unendl. Summe über die Diagon.

$$\Delta_n := \{ (k,l) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid k+l = n \}$$

$$= \{ (j, n-j) \in \mathbb{N}_0^2 \mid 0 \leq j \leq n \} \text{ schreiben.}$$

Damit für die Diagonalsummen

$$c_n := \sum_{k+l=n} a_k b_l = \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}, n \in \mathbb{N}$$

die Gl.

4-1

$$s \cdot t = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} c_n \text{ gilt,}$$

m und

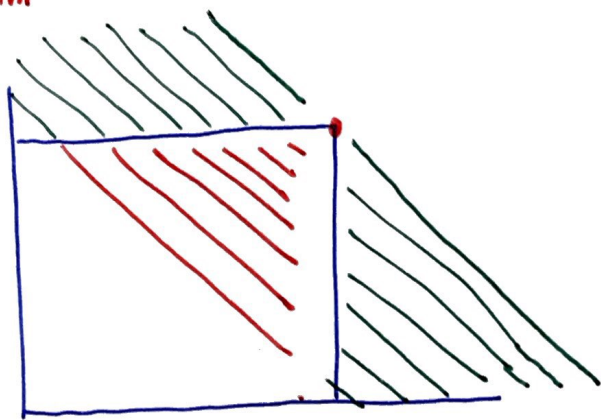
$$\sum_{m \in \mathbb{N}_0} c_m = \sum_{m \in \mathbb{N}_0} d_m \quad \text{erfüllt sein.}$$

Dies gilt genau dann, wenn die Differenzen

$$r_m := \sum_{n=0}^m c_n - s_m \cdot t_m = \sum_{(h,l) \in D_m} a_h b_l \quad (\text{Rst})$$

gegen 0 streben.

$$D_m := \{ (h,l) \in \mathbb{N}_0^2 \mid 0 \leq h,l \leq m, h+l > m \}$$



$$D_m^+ = \bigcup_{n=m+1}^{2m} \Delta_n \supset D_m$$

Inklusion ergibt Fehler absch:

$$|r_m| \leq \sum_{n=m+1}^{2m} c_n^* \quad \text{mit}$$

$$c_n^* := \sum_{(h,l) \in \Delta_n} |a_h b_l| = \sum_{j=0}^n |a_j b_{n-j}|$$

S. 3 2 (Cauchy produkt von Reihen)

Seien $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ ($k \in \mathbb{N}_0$) und die Reihen

$\sum a_k$ und $\sum b_k$ absolut konvergent

mit Werten s bzw. $t \in \mathbb{C}$. Dann sind auch die Reihen

$$\sum c_n \quad \text{und} \quad \sum c_n^*$$

absolut konvergent und es gilt

$$(CP) \quad \sum_{n \in \mathbb{N}_0} c_n = \left(\sum_{k \in \mathbb{N}_0} a_k \right) \cdot \left(\sum_{k \in \mathbb{N}_0} b_k \right) = s \cdot t$$

⌈ Analogie zum Distributivgesetz ⌋

Bw: $\forall m \in \mathbb{N}_0$: $\sum c_m^*$ Majorante von $\sum |c_m|$

$$\sum_{n=0}^m |c_n| = \sum_{n=0}^m \left| \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} \right| \leq \sum_{n=0}^m \underbrace{\sum_{j=0}^n |a_j b_{n-j}|}_{= c_n^*}$$

und

$$\sum_{n=0}^m c_n^* \leq \sum_{k,l=0}^m |a_k b_l| = \left(\sum_{k=0}^m |a_k| \right) \left(\sum_{l=0}^m |b_l| \right)$$

$$\leq \sum_{k \in \mathbb{N}_0} |a_k| \sum_{l \in \mathbb{N}_0} |b_l|$$

Also: $\sum c_n$ und $\sum c_n^*$

sind abs. konvergent.

Konv. nach Ann.

$$\Rightarrow |r_m| \stackrel{(Rst)}{\leq} \sum_{n=m+1}^{2m} c_n^* \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \quad \text{wg. Cauchy-krit.}$$

Nach Obigem gilt also

$$\sum_{n \in \mathbb{N}_0} c_n = s.t. \quad \square$$

§ 3.3 von Mertens

Ist $\sum a_k$ absolut konv. und $\sum b_k$ konv.,
so konverg. auch $\sum c_n$ und (CP) gilt.

Bsp. 3.4 (a)

Für $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ konv. die Reihe $\sum_{k \in \mathbb{N}_0} z^k = \frac{1}{1-z}$
absolut.

$$\Rightarrow \left(\sum_{k \in \mathbb{N}_0} z^k \right)^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \underbrace{c_n}_{\text{circled}} = \left(\frac{1}{1-z} \right)^2 \quad \text{mit}$$

$$c_n = \sum_{j=0}^n \underbrace{z^j z^{n-j}}_{= z^n} = (n+1) z^n, \text{ also}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}_0} (n+1) z^n = \frac{1}{(1-z)^2} \quad \text{für } |z| < 1$$

(b) Ist $a_k = b_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$, so sind die

Reihen $\sum a_k = \sum b_k$:

konvergent nach dem Leibnitz - kritt

nicht abs. konv. nach dem Minoranten +1-, da

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq \frac{1}{k+1} \quad \text{und} \quad \sum \frac{1}{k+1} \text{ diverg.}$$

Berechne

$$c_m = \sum_{j=0}^m a_j b_{m-j} = \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j}{\sqrt{j+1}} \frac{(-1)^{m-j}}{\sqrt{m-j+1}}$$

$$= (-1)^m \sum_{j=0}^m \left[\underbrace{(j+1)(m-j+1)} \right]^{-1/2}$$

$$= \left(\frac{m}{2} + 1 \right)^2 - \left(\frac{m}{2} - j \right)^2 = \cancel{\frac{m^2}{4}} + m + 1 - \cancel{\frac{m^2}{4}} + mj - j^2$$

$$\leq \left(\frac{m}{2} + 1 \right)^2$$

$$\Rightarrow |c_m| \geq \sum_{j=0}^m \frac{1}{m/2 + 1} = 2 \sum_{j=0}^m \frac{1}{m+2} = 2 \frac{m+1}{m+2}$$

ist keine Nullf. $\Rightarrow \sum c_m$ divergent.

$\Rightarrow$ Man kann den S.v. Mertens nicht noch

4-5 weiter abschw. und weder von $\sum a_n$ noch

$\sum b_k$ absol. konv. fordern.

4 Dezimalbruchentwicklung

Sei $a_0 \in \mathbb{Z}$ und $a_k \in \{1, 2, \dots, 9\}$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Bh 4.1 $\sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{a_k}{10^k} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \dots$

konv. absolut gegen ein $s \in \mathbb{R}$.

Bw: $\frac{a_k}{10^k} \geq 0 \Rightarrow s_n = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{10^k}$ istom und

wg. $s_n \leq a_0 + 9 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} = a_0 + \frac{9}{1 - \frac{1}{10}} - 9$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{= a_0 + 10 - 9 = a_0 + 1}$

$= -1 + \sum_{k \in \mathbb{N}_0} 10^{-k}$

beschr., also konvrg. Den Reihewert notieren wir als

$$s = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

und nennen jeden Ausdruck der Form

4-6 $a_0, a_1 a_2 \dots$ Dezimalbruch

Wir erhalten eine Abb.

$$\Phi: \{(a_0, a_1, a_2, \dots) \mid a_0 \in \mathbb{Z}, a_k \in \{1, \dots, 9\} \text{ für } k \in \mathbb{N}\} \\ \longrightarrow \mathbb{R}$$

Ist Φ injektiv? Nein, denn

$$1,000\dots \rightarrow 1 \text{ und}$$

$$0,999\dots = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{9}{10^k} - 9 = \frac{1}{1 - 9/10} - 9 = 10 - 9 = 1$$

Def 4.2

Ein Dezimalbruch heißt periodisch, falls

$\exists m \in \mathbb{N}_0, p \in \mathbb{N}$ mit

dann schreibt man $a_{m+k+p} = a_{m+k}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$
 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m, \overbrace{a_{m+1}, \dots, a_{m+p}}$
Ist zusätzlich $p=1$ und $a_m=9$ (d.h.

$$s = a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, 999\dots) \text{ so}$$

heißt der Dezimalbruch uneigentlich, also

nicht eigentlich. ($\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N} \exists k > m$

mit $a_k \neq 9$)

Bh 4.3 (i) Φ ist surjektiv.

(ii) Φ ist injektiv, falls wir es auf die eigentlichen Dezimalbrüche einschränken.

Bw (i) : Finde Dezimalbruch zu $s \in \mathbb{R}$!

$$s = 0 \Rightarrow a_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$s \neq 0 \Rightarrow \exists s > 0$$

$$\text{Setze } a_0 := \lfloor s \rfloor := \max \{ k \in \mathbb{Z} \mid k \leq s \}$$

$$\Rightarrow a_0 \leq s < a_0 + 1$$

$$a_1 := \lfloor 10(s - a_0) \rfloor \leq 10 \underbrace{(s - a_0)}_{< 1} < a_1 + 1$$

$$\text{also: } \begin{cases} \Rightarrow 0 \leq a_1 < 10 \Rightarrow a_1 \in \{1, \dots, 9\} \\ a_0 + \frac{a_1}{10} \leq s < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10} \end{cases}$$

Induktiv: Sind $a_0, a_1, \dots, a_n$ bestimmt,

$$\text{setze: } a_{n+1} := \left\lfloor 10^{n+1} \left(s - \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{10^k} \right) \right\rfloor$$

$$\text{dann: } a_{n+1} \in \{1, \dots, 9\} \text{ und } \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{10^k} \leq s < \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{10^k} + 10^{-n}$$

$$0 \leq s - \sum_{k=0}^m \frac{a_k}{10^k} < \frac{1}{10^m} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \text{Ur bild exist.} \quad \text{d.h.} \quad \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{a_k}{10^k} = s$$

(ii) Widersp - Ann: zwei eigentl. Dezimalbr.

$$a_0, a_1 a_2 \dots = s = b_0, b_1 b_2 \dots$$

mit einem **kleinstem** $m \in \mathbb{N}_0$ mit $a_m \neq b_m$

$$\text{Q} \quad a_m < b_m \quad (\Leftrightarrow 1 + a_m \leq b_m)$$

$$\Rightarrow s = \sum_{k=0}^m \frac{a_k}{10^k} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$$

eigentlich $\textcircled{<}$ - || - $+$ $\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{9}{10^k}$

geom. Reihe = - || - $+$ $\frac{1}{10^m}$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{a_k}{10^k} + \frac{a_m + 1}{10^m}$$

Widerspr. $\leftarrow$

m minimal

$$\leq \sum_{k=0}^{m-1} \frac{b_k}{10^k} + \frac{b_m}{10^m} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{10^k} = s$$

$s \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow$ eigentliche Dezimalbruchdarstellung
bricht ab (d.h. $\exists N \in \mathbb{N} : a_n = 0$ für $n > N$)
oder
ist periodisch gem D.42.

Analog kann man reelle Zahlen zu jeder
Basis $b \in \mathbb{N}, b \geq 2$ entwickeln. Die verw
Ziffern sind dann $\in \{0, 1, \dots, b-1\}$, z.B.

Binärdarstellung von $s \in [0, 1]$:

$$s = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{a_k}{2^k} \quad a_k \in \{0, 1\}$$

z.B.
 $= 0,11010100010\dots$

Untersch. zwischen eigentlichen und uneigentlichen
Zntw. ist analog zu $b=10$.

Ende Do. 21.4.22

5. Funktionenfolgen

D.5.1 (a) Sei M nicht leere Menge und

$\mathcal{F}(M) = \{f: M \rightarrow \mathbb{C}\}$ die Menge der

$$\mathcal{F}(M, \mathbb{R}) = \mathcal{F}_{\mathbb{R}}(M) = \{f: M \rightarrow \mathbb{R}\}$$

komplex **reell** wert. Fkt. auf M , insb. $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}(M) \subset \mathcal{F}(M)$

Eine Funktionenfolge ist eine Abb.

$$\varphi: \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathcal{F}_{\mathbb{R}}(M),$$

d.h. für jedes n ist $f_n := \varphi(n)$ eine

Fkt. $M \longrightarrow \mathbb{C}$ **$\mathbb{R}$** und für jedes $x \in M$

ist $n \longmapsto f_n(x)$ Zahlenfolge in $\mathbb{C}$ **$\mathbb{R}$**

Häufig ist $M \subset \mathbb{C}$ oder $M \subset \mathbb{R}$ z. B. ein Intervall

(b) Sei $(f_n)_n$ Fkt Flg in $\mathcal{F}(M)$. Definiere

$(f_n)_n$ konvergiert punktweise gegen $f: M \rightarrow \mathbb{C}$

$$\Leftrightarrow \forall x \in M \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Dann heißt Folge (f_n) punktweise konvergent,

f Grenzfunktion o. Limes von (f_n) und schreiben $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ oder $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{ptw}} f$

$(f_n)_n$ konvergiert uniform / gleich m. gegen

$$f: M \rightarrow \mathbb{C} \quad = \|f_n - f\|_M = \|f_n - f\|$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Schreiben in diesem Fall $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{glm}} f$ und

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\infty} = 0$. (Gilt sogar $\sum_n \underbrace{\|f_n\|}_{\in \mathbb{R}} < \infty$
so heißt $\sum_n f_n$ normal konvergent.)

Bsp. 5.2 $M = \overline{B_1} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$

$$f_n: M \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto z^n$$

$$\Rightarrow \forall z \in B_1 = \{ |z| < 1 \} \text{ gilt } f_n(z) = z^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 =: f(z)$$

da $g^m := |z|^m \rightarrow 0$, da $g < 1$.

dagegen: $f_m(1) = 1^m = 1 =: f(1)$

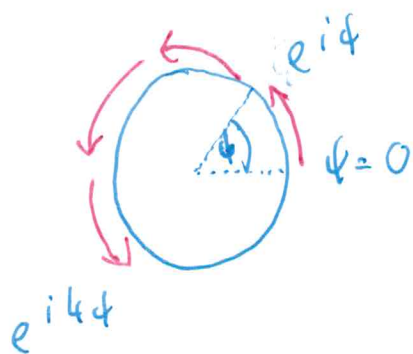
$\Rightarrow$ auf $B_1 \cup \{z=1\}$ konvergiert $(f_m)_m$ phtw

gegen $f = \begin{cases} 0 & \text{auf } B_1 \\ 1 & \text{für } z=1 \end{cases}$ un stetig, obwohl jedes f_m stetig

Was passiert in $z \in \mathbb{C}, |z|=1, z \neq 1$?

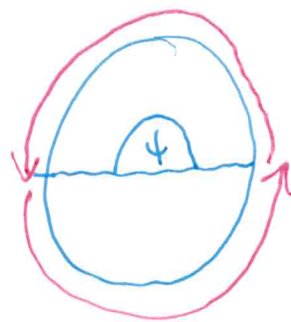
dann $z = e^{i\psi}$, $\psi \in (0, 2\pi)$, $f_m(z) = e^{im\psi}$

konvergiert nicht für $m \rightarrow \infty$



z. B. $\psi = \pi$

$$f_m(-1) = (-1)^m$$



Für jedes $g \in (0, 1)$ gilt:

$$\sup_{|z| \leq g} |f_m(z) - f(z)| = \sup_{|z| \leq g} |z|^m = g^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

d.h. auf $\overline{B_g} = \{ |z| \leq g \}$ konv. (f_m) sogar glm.

Seien ε im $\mathbb{R}$ Funktionen $g_m = f_m|_I$ $I = [0,1]$
 $\subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
 $g = f|_I$

dann: stetig. unstetig
 $g_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} g = \mathbb{1}_{\{1\}}$ phtw

aber nicht glm.

Lemma 5.3 (Äquivalente Formulierungen)

Seien $f_m : M \rightarrow \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$. Dann sind äq:

(i) $\|f - f_m\| \rightarrow 0$ $m \rightarrow \infty$ für ein $f : M \rightarrow \mathbb{C}$

$\exists$ s.d. $f : M \rightarrow \mathbb{C}$, s.d.

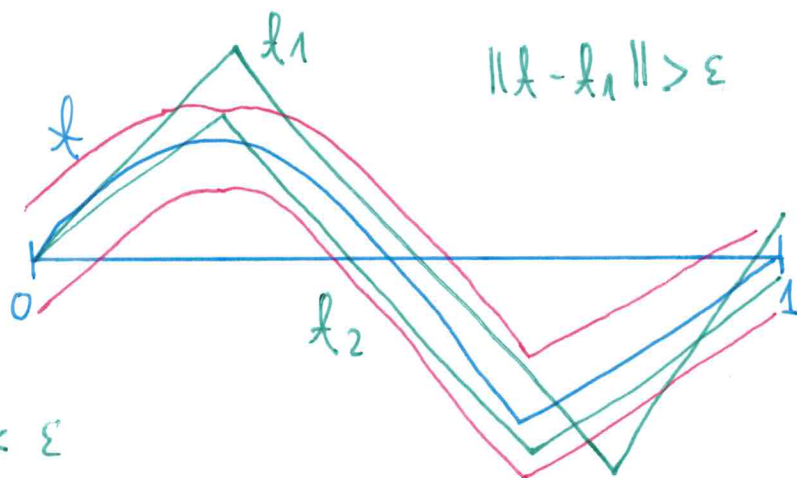
(ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists m_0 = m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ unabh. von x
 falls $m_0(\varepsilon, x)$ von x abh.

mit: $\forall x \in M$ ist $|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$

und $m \geq m_0$

haben wir nur phtw. Konvergenz.

$M = [0,1]$



ε -Schlauch um Graphen von f .

$\|f - f_2\| < \varepsilon$

(iii) Cauchy Kriterium

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{s.d.}$

$\forall n, m \geq n_0 \text{ und } x \in M: \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Bw: (i) $\Rightarrow$ (ii)

Sei $\varepsilon > 0$ bel. (i) impliziert, dass für n_0 groß

$$\varepsilon > \|f - f_m\|_M = \sup_{x \in M} |f(x) - f_m(x)| \geq |f(y) - f_m(y)|$$

$\downarrow$
uniform in x , also n_0 unabh. von x

für jedes $y \in M$

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Sei $\varepsilon > 0$ bel. Dann ex. nach (ii) ein $n_0(\varepsilon)$ s.d.

$\forall x \in M, n \geq n_0: \quad |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Insbes: $\forall x \in M, n, m \geq n_0:$

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &\leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Für jedes $x \in M$ ist $(f_n(x))_n$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$, also existiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) =: f(x).$$

Sei $\varepsilon > 0$ geg. Dann ex. $n_0(\varepsilon)$ s.d.

$$\forall n, m > n_0 \quad \forall x \in M:$$

$$\left[\sup_{x \in M} |f(x) - f_n(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{x \in M} |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \right]$$

$$\frac{\varepsilon}{2} \geq \sup_{x \in M} \lim_{m \rightarrow \infty} |f_m(x) - f_n(x)|$$

$$= \sup_{x \in M} |f(x) - f_n(x)|$$

$$= \|f - f_n\|_M$$

Ins besondere $f_n \xrightarrow{\text{glm}} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{ptw.}} f$

ich kann nämlich $m_0(\varepsilon, x) = m_0(\varepsilon)$ wählen.

Aber i.a. $f_n \xrightarrow{\text{ptw.}} f \not\Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{glm.}} f$

Hier kann ich nicht " $m_0(\varepsilon) = m_0(\varepsilon, x)$ " wählen, denn die x -Abhängigkeit werde ich nicht los.

Bsp. 5.4

(a) $g_n \xrightarrow{\text{ptw.}} g = \mathbb{1}_{\{1\}}$ s.o., aber

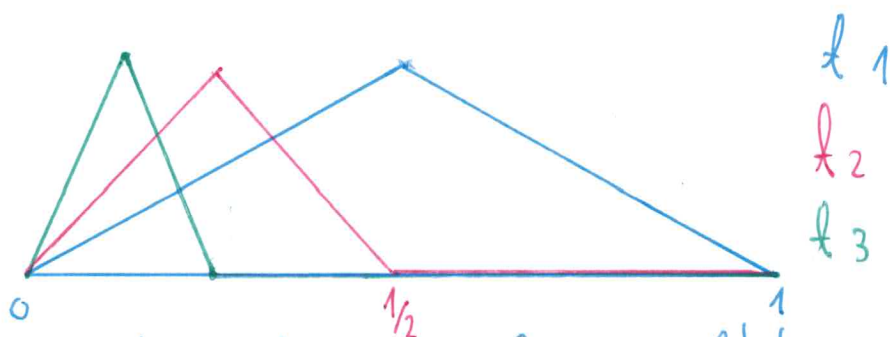
$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |g_n(x) - g(x)| \geq \sup_{0 \leq x < 1} |x^n - 0|$$

$$\geq |x_n^n| \quad \text{für bel. Folge } (x_n)_n \subset [0, 1)$$

$$\text{Wähle } x_n = \sqrt[n]{1/2} \Rightarrow |x_n^n| = |1/2| > 0$$

$\Rightarrow$ keine glm Konvergenz.

$$(b) \quad f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 2nx & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 2-2nx & \frac{1}{2n} < x < \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



kandidat für Grenzfkt: $f \equiv 0$

Aber $f_n\left(\frac{1}{2^n}\right) = 1$ also:

$$\|f_n - f\|_{[0,1]} \geq \left| f_n\left(\frac{1}{2^n}\right) - 0 \right| = 1 \not\rightarrow 0$$

Dagegen:

$$f(0) = f_n(0) \quad \text{für alle } n \text{ und}$$

für jedes $\delta \in (0, 1]$ gilt:

Es gibt ein $m_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{m_0} < \delta$.

Für $n \geq m_0$ folgt: $f_n(\delta) = 0 = f(\delta)$

$\Rightarrow$ phtw $f_n(\delta) \rightarrow f(\delta)$

In es gilt sogar:

$$\sup_{\delta \leq x \leq 1} |f_n(x) - f(x)| = |0 - 0| = 0$$

falls $n \geq m_0$ von oben

$\Rightarrow f_n \rightarrow f$ glm auf $[\delta, 1]$

$$(c) \quad f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x+x^2+m^2 x^5}{1+m^2 x^4}$$

$$= \frac{\frac{x}{m^2} + \frac{x^2}{m^2} + x^5}{\frac{1}{m^2} + x^4} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \text{ fest} \neq 0} \frac{x^5}{x^4} = x$$

des Weiteren $f_n(0) = \frac{0}{1} = 0$, also

$f_n \rightarrow f$ phtw auf $\mathbb{R}$ für $f(x)=x$.

! Sogar glm Konvergenz? Dazu

$$g_n(x) := f_n(x) - f(x) = \frac{x+x^2+m^2 x^5}{1+m^2 x^4} - x$$

$$= \frac{x - \cancel{x} + x^2 + m^2 x^5 - \cancel{m^2 x^5}}{1+m^2 x^4} = \frac{x^2}{1+m^2 x^4} \geq 0$$

Für n fest ist $\lim_{|x| \rightarrow \infty} g_n(x) = 0$. Aus der

Stetigk. von g_n folgt, dass

$c_n := \max_{x \in \mathbb{R}} g_n(x)$ existiert.

Um Extremalpt zu bestimmen setze:

$$0 \stackrel{!}{=} g'_m(x) = \frac{2x(1+m^2x^4) - x^2(4m^2x^3)}{(1+m^2x^4)^2}$$

$$= \frac{2x - 2m^2x^5}{(1+m^2x^4)^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow 2x(1-m^2x^4) = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ oder } x = \pm \sqrt[4]{1/m^2}$$

Einsetzen: $g_m(0) = 0, g_m\left(\pm \frac{1}{\sqrt{m}}\right) = \frac{1}{2m}$

zeigt $c_m = \frac{1}{2m} \longrightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$

Also $f_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f$ glm auf $\mathbb{R}$. $x \neq 0$
 $m \rightarrow \infty \rightarrow 0$

(d) Sei $f_m: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto mx \cdot e^{-mx}$

$$\Rightarrow f_m(0) = 0, f_m(x) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \text{ für } x > 0$$

Also $f_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f \equiv 0$ pttw auf $[0, \infty)$

! Auch glm?

$$g_m(x) := f_m(x) - f(x) = f_m(x) = mx e^{-mx} \geq 0$$

Da für festes $m \in \mathbb{N}$ $g_m(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$

und g_m stetig, existiert

$$c_m := \max_{0 \leq x < \infty} g_m(x)$$

Um es zu bestimmen:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} g'_m(x) = m e^{-mx} - m^2 x e^{-mx} \\ &= \underbrace{m e^{-mx}}_{> 0} (1 - mx) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 1 = mx \Leftrightarrow x = \frac{1}{m} \in [0, \infty)$$

$$\forall g \quad g_m\left(\frac{1}{m}\right) = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e} \text{ gilt}$$

$$\|f_m - f\|_{[0, \infty)} \geq g_m\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{e} > 0$$

keine g_m konverg.

S. 5.6 Sei $M \subset \mathbb{C}$ und $y \in M$. Sei $(f_n) \subset \mathcal{F}(M)$

5-11 mit $f_n \rightarrow f$ glm. Ist jedes f_n stetig

in y , so auch f .

Bw: Sei $\varepsilon > 0$ bel.

$f_n \rightarrow f$ glm $\Rightarrow \exists n_0$ mit

$$\forall n > n_0: \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$$

f_{n_0} stetig in $y \Rightarrow \exists \delta > 0$ s.d.

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| < \varepsilon/3 \text{ für } x \in M \cap B_\delta(y)$$

$\Rightarrow$ für diese x gilt:

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y) + f_{n_0}(y) - f(y)|$$

$$\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f(y)|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$$

$\Rightarrow f$ stetig in y . $\square$

Warum musste ich annehmen, dass alle

f_n stetig in y sind? Reicht das nicht für f_{n_0} ?

„gln Limes stet. Fkt ist stetig.“

Beispiele zeigen, dass gln konv. nicht
notw. für Stetigk. der Grenzfkt ist.

falls zumindest einer gln ist

Satz besagt, wann man zwei Grenzüber-
gänge vertauschen darf, nämlich

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow y} f(x) &= \lim_{x \rightarrow y} \left(\lim_{n \rightarrow \infty}^{gln} f_n(x) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty}^{gln} \left(\lim_{x \rightarrow y} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y) = f(y)\end{aligned}$$

Insbes: alle f_n stet auf M & $f_n \xrightarrow{gln} f$
 $\Rightarrow f$ stet auf M

Q: i überträgt sich bei gln Konverg.
auch Integrierbar k. & Diffbar k.
auf Grenzfkt.?

S. 5.7 Sei Folge $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ glm gegen

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergent. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei f_n integr. auf $[a, b]$. Dann ist f auf $[a, b]$ intbar und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \quad \text{glm.}$$

d.h. dann sind $\int$ und $\lim_{n \rightarrow \infty}$ vertauschbar.

Beachte, dass $\int$ für einen Grenzübergang steht.

Bw.: Sei $\varepsilon > 0$.

$$f_n \rightarrow f \text{ glm} \Rightarrow \exists m_0 \text{ s.d. } \forall n \geq m_0 \text{ gilt } \underbrace{\|f_n - f\|}_{< \frac{\varepsilon}{b-a}} < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in [a, b]: f_n(x) - \frac{\varepsilon}{b-a} \leq f(x) \leq f_n(x) + \frac{\varepsilon}{b-a}$$

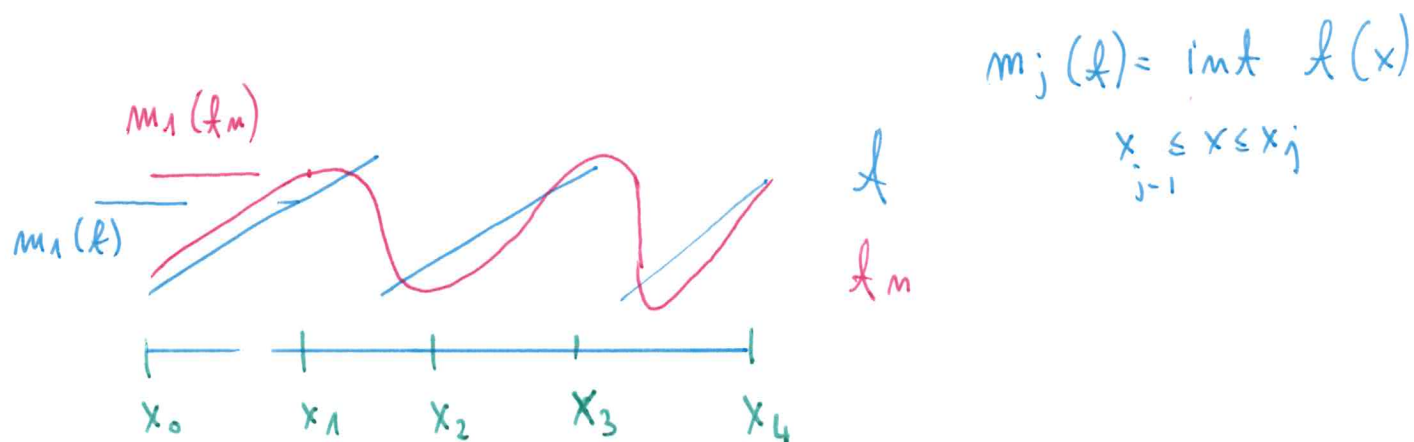
insbes. ist f beschränkt.

Sei $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ Zerlegung von $[a, b]$

$$\Rightarrow U_Z(f_n) - \varepsilon = \sum_{j=1}^k m_j(f_n) (x_j - x_{j-1}) - \varepsilon \frac{\sum_{j=1}^k (x_j - x_{j-1})}{b-a}$$

$$= \sum_j \left(m_j(f_n) - \frac{\varepsilon}{b-a} \right) (x_j - x_{j-1})$$

$$< \sum_{j=1}^k m_j(t) (x_j - x_{j-1}) = U_Z(t)$$



Ungl. gilt für sämtliche Zerlegungen,
 bilde $\sup$ über $\text{---} || \text{---}$ Z
 da f_m intbar

$$\Rightarrow \int_a^b f_m(x) dx - \varepsilon = \sup_Z U_Z(f_m) - \varepsilon$$

$$\leq \sup_Z U_Z(f) = \int_a^b f(x) dx$$

Analoges Argument für Obersummen

liefert:

$$\int_a^b f_m(x) dx + \varepsilon = \int_a^b f_m(x) dx + \varepsilon \geq$$

$$\int_a^b f(x) dx$$

Insges, sobald $n \geq n_0$:

$$\int_a^b f_n dx - \varepsilon \leq \int_a^b f dx \leq \int_a^b f dx \leq \int_a^b f_n dx + \varepsilon$$

Grenzübergang:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n dx \leq \int_a^b f dx \leq \overline{\int_a^b f dx} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n dx$$

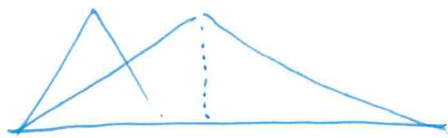
$$\leq \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n dx} =: I(f)$$

Also ist

$$\int_a^b f dx = \overline{\int_a^b f dx} = I(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n dx$$

$\Rightarrow f$ ist integrierbar & beh. Formel gilt. $\square$

bei Bsp. 5.4. (b)



liegt keine glm
konvergenz vor.

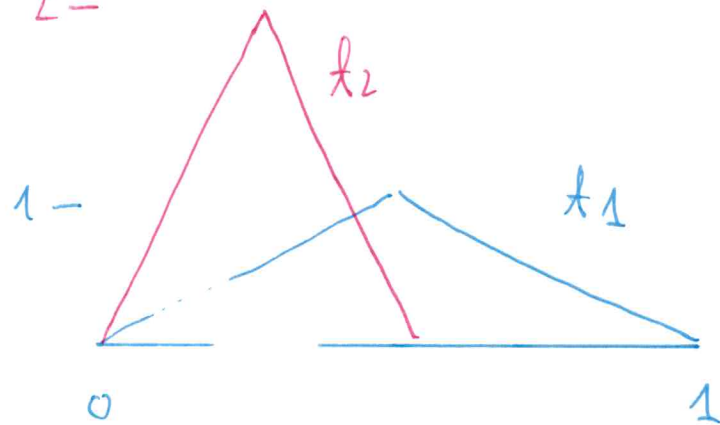
Aber dennoch: $\int_0^1 f_n dx = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$

also $\int_0^1 t_m \longrightarrow \int_0^1 t = 0$. Das ist aber

für $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{pht}} f$ i. a. nicht wahr.

Bsp. 5.9

2-



$$g_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 2n^2 x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 2n - 2n^2 x & \frac{1}{2n} < x < \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 g_n = \int_0^{1/n} g_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Aber: $\forall \delta \in (0, 1]$ ex $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \delta$

$$\Rightarrow g_n(x) = g_n(\delta) = 0 \quad \text{für } n \geq n_0$$

sogar, falls $x \in [\delta, 1]$

Für Fkt Flg $(g_n)_n$ gilt also:

$$* \quad g_n \longrightarrow g \equiv 0 \quad \text{pht w auf } [0, 1]$$

sogar g_n auf $[\delta, 1]$

aber

G-6 * $\int_0^1 g_n(x) dx$ ist konstant + gleich $\frac{1}{2}$.

S. 5.10

Seien $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ alle stetig diffbar auf $[a, b]$. Es gelte

* f_n' konvergiere glm auf $[a, b]$

* $\exists x_0 \in [a, b]$ so dass $(f_n(x_0))_n$ konverg.

Dann

existiert ein stetig diffb $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

mit

$$f_n \longrightarrow f \quad \text{glm auf } [a, b]$$

$$\text{und } f_n' \longrightarrow f' \quad \text{ptw} \quad \text{---||---}$$

Bw

Setze:

$$a := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0), \quad g(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(x), \quad x \in [a, b]$$

$$f_n' \rightarrow g \text{ glm, } f_n' \text{ stetig} \xRightarrow{\text{S. 5.6}} g \text{ stetig auf } [a, b] \text{ insbes intbar}$$

Definiere $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) := a + \int_{x_0}^x g(t) dt, \quad x \in [a, b]$$

HDI

$\Rightarrow f$ diffbar und $f' = g$ auf $[a, b]$

6-7 $\Rightarrow f$ so gar stet. diffbar, da $g \in C[a, b]$

Bh $\|f_n - f\|_{[a,b]} \rightarrow 0$

Bw Sei $\varepsilon > 0$. Dann ex. $m_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq m_0 : |f_n(x_0) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

nach Def. von a und

$$\begin{aligned} \forall n \geq m_0 : \|f_n - g\|_{[a,b]} &= \sup_{[a,b]} |f_n(x) - g(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \end{aligned}$$

HDI $\Rightarrow \forall x \in [a,b] : \int_{x_0}^x f'_n(t) dt = f_n(x) - f_n(x_0)$

daraus und Def von f :

$$\begin{aligned} \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| &= |f_n(x_0) - a + \int_{x_0}^x (f'_n(t) - g(t)) dt| \\ &= |f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) - a - \int_{x_0}^x g(t)| \end{aligned}$$

$$\Delta\text{-Ungl} \leq |f_n(x_0) - a| + \int_{x_0}^x |f'_n(t) - g(t)| dt$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\int_{x_0}^x dt}_{\leq b-a} \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $x \in [a,b]$ und $n \geq m_0$

Spezialfall von

$$\left| \int_a^b g(x) dx \right| \leq \int_a^b |g(x)| dx$$
$$\leq (b-a) \|g\|_{[a, b]}$$

Unter den geg. Vorauss. darf man also
 $\lim_{n \rightarrow \infty}$ und $\frac{d}{dx}$ (was ebenfalls ein Grenzübergang ist) vertauschen.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \overset{\text{glm.}}{\lim_{n \rightarrow \infty}} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$$

und noch mehr.

Aber: $C^1(I) \ni f_n \longrightarrow f$ glm

alleine impliziert weder die Konvergenz der Folge $(f'_n)_n$ noch die Diffbarkeit von f .

Bsp 5.11

(a) $I = [0, 1]$, $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$

$\Rightarrow \forall n, x : |f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$ also

$f_n \longrightarrow f \equiv 0$ glm

$f'_n(x) = \sqrt{n} \cos(nx)$ konvergiert nicht!

Widerspr. - Ann: $f'_n(x) \longrightarrow a \in \mathbb{R}$

Da $(\sqrt{n})_n$ unbeschränkt, muss dann

$$\cos(nx) \longrightarrow 0$$

insbes. die Teilfolge $(\cos 2nx)_n$ auch Nullfg. Additionsformeln implizieren

$$\cos 2nx = \cos^2 nx - \sin^2 nx = \underbrace{2\cos^2 nx - 1}_{\text{Pythagoras}}$$

$$\begin{array}{ccc} n \rightarrow \infty & \downarrow & \text{nach Ann.} \\ & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow & \text{Pythagoras} \\ & \text{nach Ann.} & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Widerspruch.

Für $x=0$ gilt sogar:

$$f'_n(0) = \sqrt{n} \longrightarrow \infty$$

$$(b) \quad f_n: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto (-1)^n + \frac{x}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ ist $(f_n(x))_n$ divergente Fg.

$\forall x \in \mathbb{R}$ ist $(f'_n(x) - \frac{1}{n})_n$ Nullfolge, ja

sogar $\|f'_n\|_{\mathbb{R}} \longrightarrow 0$, d.h. glm. konverg.

6 Funktionenreihen

D. 6.1 (a) Sei $f_n \in F(M)$, $n \in \mathbb{N}_0$ und

$$s_n(x) := \sum_{k=0}^n f_k(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x)$$

die n -te Partialsumme der Fkt. Folg. Wir

nehmen $(s_n)_n \subset F(M)$ eine Funktionen-

reihe und bezeichn. sie formal mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k = f_0 + f_1 + f_2 + \dots \quad \text{ebenso}$$

wie die potentiell existierende Grenzfkt der Folge $(s_n)_n$.

(b) Sei $s: M \rightarrow \mathbb{C}$ geg. Die Fkt.-Reihe

$\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ heißt punktweise konvergent

gegen s , falls

$$\forall x \in M \quad s_n \longrightarrow s \quad \text{phtw}$$

6-11 Wir schreiben dann $s = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$

$\sum f_k$ heißt ptw. konv., falls es ein $s: M \rightarrow \mathbb{C}$ gibt, s.d. obiges gilt.

(c) Fkt Reihe $\sum f_k$ heißt gleichm. /
uniform konvergent gegen $s: M \rightarrow \mathbb{C}$,
falls
$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} s \quad \text{glm.}$$

(d) $\sum f_k$ heißt normal konvergent
 $\Leftrightarrow$ die Reihe $\sum_k \|f_k\|$
Konvergiert in $\mathbb{R}$. 28.4.22

Aus dem Cauchy-Krit für Fkt-Flg ergibt.

L. 6.2 Sei $(f_n)_n \subset \mathcal{F}(M)$. Dann s. äquivalent

(a) Reihe $\sum f_k$ konverg. uniform

(b) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ s.d.

$$\forall n, m \geq n_0, \forall x \in M: \left| \sum_{k=n+1}^m f_k(x) \right| < \varepsilon$$

$\sum f_k$ heißt ptw. konv., falls es ein $s: M \rightarrow \mathbb{C}$ gibt, s.d. obiges gilt.

(c) Fkt Reihe $\sum f_k$ heißt gleichm. /
uniform konvergent gegen $s: M \rightarrow \mathbb{C}$,
falls
$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} s \text{ glm.}$$

(d) $\sum f_k$ heißt normal konvergent
 $\Leftrightarrow$ die Reihe $\sum_k \|f_k\|$
Konvergiert in $\mathbb{R}$. 28.4.22

Aus dem Cauchy-Krit für Fkt-Folg ergibt.

L. 6.2 Sei $(f_n)_n \subset \mathcal{F}(M)$. Dann s. äquivalent

(a) Reihe $\sum f_k$ konverg. uniform

(b) $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ s.d.

$$\forall n, m \geq n_0, \forall x \in M: \left| \sum_{k=n+1}^m f_k(x) \right| < \varepsilon$$

6.1 (e) Seien $(f_k) \subset \mathcal{F}(M)$ und $A \subset M$.

$\sum f_k$ konvergiert normal auf A

$$\Leftrightarrow \sum \|f_k\|_A < \infty$$

-Majoranten-

S. 6.3 (Weierstraß-Kriterium)

Sei $(f_k) \subset \mathcal{F}(M)$

(a) $\sum f_k$ glm konvergent und $r_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k$

$\Leftrightarrow (r_n)_n$ konv. glm gegen $f \equiv 0$

$\Rightarrow (f_k)$ konv. glm gegen f

(b) $\sum f_k$ normal konvergent

$\Rightarrow \sum f_k$ konvergieren glm.

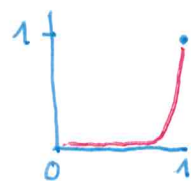
und $\sum |f_k|$

Bw. Übung

B. 6.4 $z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$

$$\|z^k\|_{(-1,1)} = \sup_{|z| < 1} |z^k| = 1, \text{ da } z \mapsto z^k \text{ stetig}$$

$\Rightarrow f_k(z) = z^k$ keine Nullf. glm



$\Rightarrow \sum x^k$ nicht glm konv auf $(-1, 1) \subset \mathbb{R}$

insbes. $\sum z^h$ ———— || ———— $B_1 \subset \mathbb{C}$

Aber: Für $S \in (0, 1)$ ist

$$\sum_k \|z^k\|_{\overline{B_\delta}} \leq \sum_k \delta^k < \infty \quad \text{konvergent}$$

Weierstr $\Rightarrow \sum z^k$ glm & absolut konverg.
auf $\overline{B_S} = \{ |z| \leq S \}$

Sei $(g_n) \in F(M)$.

Lem 6.5 Sei $(g_n) \subset F(M)$.
Existieren $q \in (0, 1)$, $C \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{N}$

s.d. $\forall m \geq l : \|g_{m+1} - g_m\| < C \cdot q^m$, so

ist (g_n) glm ↓ konvergent. ↑ sogar normal

Bw: Sei $f_m := g_m - g_{m-1}$, $g_{-1} \equiv 0$, so

sim d $g_n = \sum_{k=1}^n f_k = s_n$ Partial summen.

normal konverg., da $\sum_{k=l}^n \|f_k\| \leq C \sum_{k=l}^n q^k$

und $\sum_{k=0}^l \|f_k\|$ endlich und fest. $\Rightarrow$ Weierstraß-k

Bsp. 6.6

(a) Fkt-Folge $E_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \text{konvergiert auf jedem}$$

abgeschl. Ball $\overline{B_R} \subset \mathbb{C}$ gleich m., denn

$f_k =$

$$\left\| \frac{z^k}{k!} \right\|_{\overline{B_R}} \leq \frac{R^k}{k!}$$

wg.

$$|z^k| = |z|^k \leq R^k$$

$$\leq \left(\frac{3R}{k} \right)^k$$

$$\text{da } \forall k \in \mathbb{N} : \left(\frac{k}{3} \right)^k \leq k! \leq \left(\frac{k}{2} \right)^k$$

(übg.)

$$6R < k$$

$$\leq \left(\frac{1}{2} \right)^k$$

d.h. $\sum_{k=\lfloor 6R \rfloor + 1}^{\infty} \|f_k\|_{\overline{B_R}}$ hat geom. Reihe als

Majorante, $\sum_k^{\lfloor 6R \rfloor} \|f_k\|_{\overline{B_R}}$ liefert endlichen,

festen Beitrag und Weierstraß anwendbar.

Dagegen ist $\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{x^k}{k!} \right| = \infty$ insbesondere

$$\left\| \frac{z^k}{k!} \right\|_{\mathbb{C}} = \infty.$$

(b) Seien $f_k(z) = \frac{z^k}{k}$, $\delta \in (0,1)$

$$\Rightarrow \|f_k\|_{\overline{B_\delta}} \leq \frac{\delta^k}{k} \leq \delta^k$$

L.6.5 $\Rightarrow \sum f_k$ auf $\overline{B_\delta}$ normal konvergent

Für $z=1$ ergibt sich die ^{divergente} harmonische Reihe. Also konv. $\sum f_k$ nicht glm

auf $(0,1) \subset \mathbb{R}$, da

$$\sup_{(0,1)} \left| \frac{z^k}{k} \right| = \frac{1}{k}$$

Aus den entsprechenden Sätzen für Fht Folgen ergeben sich folgende Vertauschungsregeln für Fht-Reihen:

S. 6.7 Seien $\phi \neq I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $a \leq y \leq b$,

$s, f_k \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}_0$.

(i) s glm Limes von $\sum f_k$ & alle f_k stetig in y
 $\Rightarrow s$ stetig in y

(ii) s uniformes Limites von $\sum f_k$ &

$\forall k \in \mathbb{N}$ ist f_k intbar.

$$\Rightarrow s \text{ intbar und } \int_a^b s dx = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \int_a^b f_k dx$$

(iii) $\forall k \in \mathbb{N}_0: f_k \in C^1(I)$ & $\sum f_k'$ glm konv. auf I
& $\sum f_k(y)$ konv.

$\Rightarrow \sum f_k$ sogar glm konv. gegen ein $g \in C^1(I)$ &

$$\forall x \in I \quad g'(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} f_k'(x) \quad \square$$

$f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Bsp 6.8(a) $f_k(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^k} \quad , x \in \mathbb{R}$

$$f_k(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum f_k(0) = 0$$

$$x \neq 0 \Rightarrow 1+x^2 > 1 \Rightarrow \sum_{k \in \mathbb{N}_0} f_k = x^2 \sum_{k \in \mathbb{N}_0} (1+x^2)^{-k} = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1+x^2$$

$\Rightarrow \sum f_k$ konv. pW auf $\mathbb{R}$ gegen $s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & x=0 \\ 1+x^2 & x \neq 0 \end{cases}$$

Alle f_n sind stetig auf $\mathbb{R}$, s nicht.

S. 6.7 $\Rightarrow$ Konvergenz von $\sum f_n$ nicht glm. auf $\mathbb{R}$.

Aber: $\forall \delta > 0$ konv. $\sum f_n$ auf $(-\infty, -\delta) \cup (\delta, \infty)$
glm gegen s .

$$(b) f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^{1+\alpha}}, \alpha > 0$$

$$|\cos nx| \leq 1 \Rightarrow \sum \|f_n\| \leq \sum \frac{1}{n^{1+\alpha}} < \infty$$

$\Rightarrow \sum f_n$ normal konvergent. Bez. s die Grenzfkt. $\Rightarrow s$ stetig auf $\mathbb{R} \Rightarrow s$ besitzt Stammfkt.

Nach S. 6.7 ist $F(x) =$

$$\int_0^x s dt \stackrel{\downarrow}{=} \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \int_0^x \frac{\cos kt}{k^{1+\alpha}} dt = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{\sin kx}{k^{2+\alpha}}$$

eine davon.

§7 Potenzreihen

Q: Für welche Werte $z \in \mathbb{C}$ ist
Funktionsreihe

$$\sum_{k \in \mathbb{N}_0} z^k \quad / \quad \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{z^k}{k!} \quad / \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{z^k}{k}$$

konvergent oder sogar glm konv.?

D.7.1

(a) Eine Funktionsreihe der Form

$$\sum_{k \in \mathbb{N}_0} f_k, \quad f_k(z) = a_k (z - z_0)^k, \quad z \in \mathbb{C}$$

⊗ mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$ und Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ heißt Potenzreihe.

Falls wir diese Fkt-Reihe auf $\mathbb{R}$ einschränken, schreiben wir oft

$$\sum_{k \in \mathbb{N}_0} a_k (x - x_0)^k, \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei dies besonders im Fall
 $x_0, a_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_0$, relevant ist.

(b) zu einer geg. Fkt - Reihe mit
Koeffiz $(a_k)_k$ definieren wir den
Konvergenzradius als

$$(*) \quad \rho = \left(\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \right)^{-1} \in [0, \infty]$$

Offensichtlich ist der $\overline{\lim}$ nicht negativ,
kann aber die Werte 0 und ∞ annehmen.

Konvention: $\frac{1}{0} = \infty, \quad \frac{1}{\infty} = 0$.

Q: Wo konvergieren die 3 Bsp - Reihen: 7.2

(i) $|z| < 1 \Rightarrow \sum z^k$ konvergent

$|z| > 1 \Rightarrow z^k$ keine NF $\Rightarrow \sum z^k$ diverg.

$$\rho = \left(\lim_k \sqrt[k]{1} \right)^{-1} = (1)^{-1} = 1$$

$$(ii) \quad \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{z^k}{k!} \quad \text{konv.} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\rho = \left[\lim_k \underbrace{(k!)^{-1/k}}_{\leq \frac{3}{k}} \right]^{-1} = \infty$$

$$(iii) \quad |z| < 1 \Rightarrow \sum \frac{z^k}{k} \quad \text{konv. nach Major.-k.}$$

$$|z| > 1 \Rightarrow \sum \frac{z^k}{k} \quad \text{nicht absolut konv.} \\ \text{nach Minorantenkrit.}$$

$$\frac{k}{\sqrt[k]{k}} = \frac{1}{\frac{k}{\sqrt[k]{k!}}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1 \Rightarrow \rho = 1$$

Diese Bsp. legen nahe:

S. 7.3 (Konvergenzbereich)

Die Potenzreihe $\sum a_k (z - z_0)^k$ aus D. 7.1

* konvergiert absolut in allen $z \in B_\rho(z_0)$

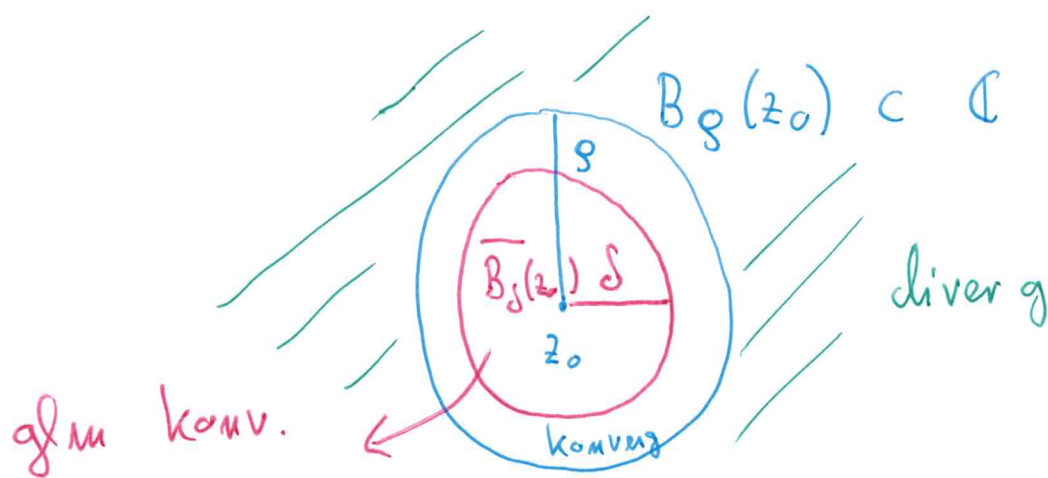
* divergiert in allen $z \in \overline{B}_\rho^c(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| > \rho\}$

* ist für jedes $\delta \in (0, \rho)$ auf $\overline{B}_\delta(z_0) = \{|z - z_0| \leq \delta\}$

7-9 sogar normal konvergent.

Beachte: $g = 0 \Rightarrow$ Satz besagt nichts, aber offensichtlich gilt $\sum a_k (z_0 - z_0)^k = \sum 0 = 0$, also konv. die Potenzreihe immer in $z = z_0$.

$g = \infty \Rightarrow B_g(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \infty\} = \mathbb{C}$, d.h. die Potenzreihe konv. auf ganz $\mathbb{C}$.



Teil von Bsp. 7.5

über $z \in \partial B_g(z_0) = \{ |z - z_0| = g \}$ wird

hier keine Konvergenz auss. gemacht.

(a) Vgl. (alternierend) harm. Reihe:

$\sum \frac{z^k}{k}$ divergent in $z = 1$ konv. in $z = -1$

Bw:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k (z - z_0)^k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} |z - z_0| = \frac{1}{g} |z - z_0|$$

7-10

$$\left\{ \begin{array}{ll} < 1 \quad \text{falls} \quad |z - z_0| < \rho \Rightarrow \text{Reihe konv. in } z \\ & \text{Wurzelkr.} \\ & \downarrow \\ > 1 \quad \text{falls} \quad |z - z_0| > \rho \Rightarrow \text{Reihe divergiert in } z \end{array} \right.$$

Insbesondere ist $\sum_k a_k \delta^k$ absolut

konv. für $\delta \in (0, \rho)$.

$$\sup_{|z - z_0| \leq \delta} |a_k (z - z_0)^k| \leq |a_k| \delta^k$$

(Weierstraß) Majorantenkriterium

$\Rightarrow$ Potenzreihe normal & glm konv. auf $\overline{B_\delta(z_0)}$ $\square$

Bm. 7.4 (a) $I = \mathbb{R} \cap B_\delta(z_0)$ nennt man das Konvergenzintervall der Potenzr. $\sum a_n (x - z_0)^k$

(*) heißt Cauchy-Hadamard-Formel, ist besonders handlich falls $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ existiert.

Bsp 7.5: (a) vgl. 7-10

(b) Reihe $\sum_{k \in \mathbb{N}} z^k$ divergiert in allen

$z \in \partial B_1$, da dort $|z^k| = |z|^k = 1$ keine Nullfolge $\Rightarrow$ Reihe diverg.

(c) $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{z^k}{k^2}$ ist normal konvergent

auf $\overline{B_1} = \{ |z| \leq 1 \}$ da $\left| \frac{z^k}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2}$ und

$\sum \frac{1}{k^2}$ konverg. Reihe reeller Zahlen.

(d) Jedes Polynom $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ ist

als Potenzreihe darstellbar mit

$a_{n+1} = a_{n+2} = \dots = 0$. Insbes. ex.

$\lim \sqrt[k]{|a_k|} = 0 \Rightarrow \rho = \infty \Rightarrow$ Reihe auf

ganze $\mathbb{C}$ konvergent.

Bei skalaren Reihen war W-k allgem.,
aber Q-k einfacher anzuwenden.

In manchen Situationen ist folg. krit
anwendbar (und dann einfach als C-H-F.)

S. 7.6 Seien $a_k \in \mathbb{C}$ und für fast alle $k \in \mathbb{N}$
 $a_k \neq 0$ und $\beta := \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$ existiere

im $[0, \infty]$. Dann hat die Pot.-R.

$\sum a_k (z - z_0)^k$ den Konvergenz-Radius $\rho = \beta$.

Bw: Quot.-krit.

Bsp. 7.7

Betrachte Potenzreihe $\sum_{k \in \mathbb{N}_0} a_k z^k$ mit

(a) $a_k = k^k$

$$\Rightarrow \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_k k = \infty \Rightarrow \rho = 0$$

(b) $a_k = [3 + (-1)^k]^k$

$$\Rightarrow \overline{\lim}_k \sqrt[k]{|a_k|} = \overline{\lim} (3 + (-1)^k) = 4 \Rightarrow \rho = \frac{1}{4}$$

[da gegen $\lim (3 + (-1)^k) = 2$, d.h.
 $\lim_k |a_k|^{1/k}$ exist. nicht]

(c) $a_k = \frac{k^k}{(k!)^2}$

$$\left[\left(1 + \frac{1}{k} \right)^k \right]^{-1} \rightarrow \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \frac{k^k ((k+1)!)^2}{(k!)^2 (k+1)^{k+1}} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)} \left(\frac{k}{k+1} \right)^k \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \infty = \beta = \rho$$

(d) Betrachte $\sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k (2^k + k) (z+1)^k$, d.h.

Summationsp. $z_0 = -1$ und $a_k = (-1)^k (2^k + k)$

$$\Rightarrow \sqrt[k]{2^k + k} = 2 \left(1 + \frac{k}{2^k} \right)^{1/k} \longrightarrow 2 \text{ für } k \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{1}{2}$$

übg

S.7.8 Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $(a_k)_k \subset \mathbb{C}$ Folge mit

$$\rho = \left[\overline{\lim} \sqrt[k]{|a_k|} \right]^{-1} > 0 \text{ so ist durch}$$

$$z \mapsto f(z) := \sum_{k \in \mathbb{N}_0} a_k (z - z_0)^k$$

eine stet. Fkt auf $B_\rho(z_0)$ definiert.

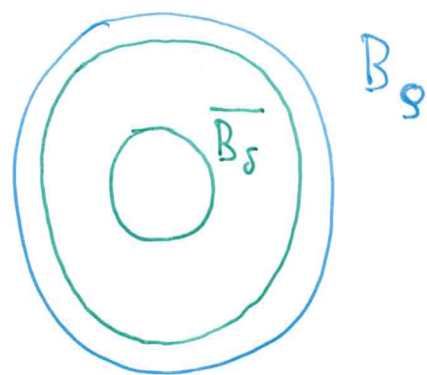
Bw: $z \mapsto f_k(z) := a_k (z - z_0)^k$ ist stetig $\forall k \in \mathbb{N}_0$

und $\forall \delta \in (0, \rho)$ konvergiert $\sum f_k$

glm auf $\overline{B_\delta(z_0)}$, also ist f stetig auf

$$\bigcup_{\delta < \rho} \overline{B_\delta(z_0)} = \overline{B_\rho(z_0)} \quad \text{Übg.}$$

□



Wie Reihen und Fkt lassen sich Potenzreihen durch Add & Multipl. zu neuen komb.

S. 7.9 Seien zwei Funktionen

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} a_k (z - z_0)^k, \quad g(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} b_k (z - z_0)^k$$

8-4 durch Potenzreihen um denselben Entwickl-

punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und Konvergenz radien $g_f > 0$
 bzw $g_g > 0$ gegeben. Sei $\epsilon \in \mathbb{C}$. Setze
 $g = \min \{g_f, g_g\}$. Folgende Potenzreihen
 stellen Fkt in $C(B_g(z_0))$ dar:

$$z \mapsto (f + \epsilon g)(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} (a_k + \epsilon b_k) (z - z_0)^k$$

$$z \mapsto (f \cdot g)(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \underbrace{\left(\sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} \right)}_{= c_k \text{ aus (CP)}} (z - z_0)^k$$

analoge

Bw: Verwende Aussagen über (absolut) konvergente
 Reihen, insbes. Cauchy-Produkt.

S.7.10 Für alle $l \in \mathbb{Z}$ besitzen die Potenzr.

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} k^l a_k (z - z_0)^k \quad (*)$$

$$(z.B. \sum_k a_k (z - z_0)^k, \sum_k k a_k (z - z_0)^k, \sum_k \frac{a_k}{k} (z - z_0)^k)$$

alle denselben Konvergenzradius.

Bw: $\frac{k}{\sqrt[k]{|k^l a_k|}} = k^{l/k} \frac{k}{\sqrt[k]{|a_k|}} = \underbrace{\left(\frac{k}{\sqrt[k]{k}} \right)^l}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1} \frac{k}{\sqrt[k]{|a_k|}}$

^{Kehrbgr.}
Für inv. konv. Radius von (*) folgt

$$\overline{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k! |a_k|}} = \overline{\lim_k \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{\rho} \quad \square$$

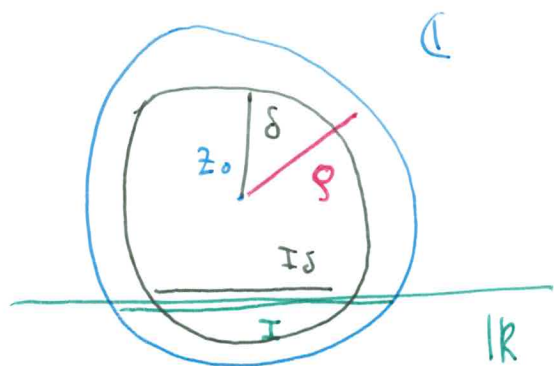
S.7.11

Sei

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} a_k (z - z_0)^k$$

Summenfkt einer Potenzreihe mit Konvergenzradius ρ . Der Schnitt $I := B_\rho(z_0) \cap \mathbb{R}$ sei ein echtes Intervall. Dann ist $f \in C^1(I)$ und

$$\forall x \in I: f'(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} k a_k (x - z_0)^{k-1} \quad (xx)$$



Bw: Potenzreihe

$$g(z) = \sum_k k a_k (z - z_0)^k$$

konvergiert ebenfalls auf

$B_\rho(z_0)$ nach Satz 7.10 sogar glm auf

jedem $B_\delta(z_0)$ mit $\delta \in (0, \rho)$ [insbesondere auf

$$I_\delta = B_\delta(z_0) \cap \mathbb{R}.]$$

Da $z \mapsto k a_k (z - z_0)^k$ stetig ist auch g

stetig auf jedem $B_\delta(z_0)$ [].

also auch auf $I = \bigcup I_\delta$. Nun impliziert
 $0 < \delta < \rho$

S. 6.7 (iii) Formel $f'(x) = g(x)$ für $x \in I$, also
Formel (**). $\square$ Iteration dieses S. ergibt:

K. 7.12.

Unter den Vorausss von S. 7.11 gelten:

(a) $f \in C^\infty(I)$

(b) $\forall m \in \mathbb{N}; x \in I$

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-m+1) a_k (x-z_0)^{k-m}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+m)(k+m-1) \cdots (k+1) a_{k+m} \underbrace{(x-z_0)^k}_{=0 \text{ falls } x=z_0}$$

(c) $f^{(m)}(z_0) = m! a_m$ falls $z_0 \in \mathbb{R}$.

Also sind die Koeffizienten $a_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}$ der

Potenzreihe von f um einen gegeb. Entwicklungspunkt z_0 durch die Fkt f selbst eindeutig bestimmt. (Dies gilt sogar für allg. $z_0 \in \mathbb{C}$.)

$$(d) \quad F: I \rightarrow \mathbb{C} \quad x \mapsto \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{a_k}{k+1} (x - z_0)^{k+1}$$

ist eine Stammfunktion von f auf I .

(e) Für jedes $[a, b] \subset I$ gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \int_a^b a_k (x - z_0)^k dx$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{a_k}{k+1} \left[(b - z_0)^{k+1} - (a - z_0)^{k+1} \right]$$

"Potenzreihen darf man gliedweise Ableiten und integrieren."

Bw: (a-b) Vollst. Ind. über m und S. 7.11.

(c) Einsetzen $x = z_0 \in \mathbb{R}$.

(d) diese Potenzreihe hat selben Konvergenzbereich nach S. 7.10. Wende S. 7.11 auf sie an.

(e) $I = B_\delta(z) \cap \mathbb{R}$ offen

$\Rightarrow \exists \delta \in (0, \delta)$ s.d. $[a, b] \subset B_\delta(z_0)$

$\Rightarrow$ glm Konvergenz der Reihe auf $B_\delta(z_0) \supset [a, b]$

S. 6.7 $\Rightarrow$ gliedweises Integrieren erlaubt.



Bsp 7.13

Die Fkt $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \ln \frac{a}{b} & \text{für } x=0 \\ \frac{a^x - b^x}{x} & \text{sonst} \end{cases}$

ist stetig nach L'Hospital für alle $a, b > 0$.

! Wollen sie als Potenzr. darstellen!

$$\frac{a^x - b^x}{x} = \frac{1}{x} [e^{x \ln a} - e^{x \ln b}]$$

$$= \frac{1}{x} \left[\sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{(x \ln a)^k}{k!} - \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{(x \ln b)^k}{k!} \right]$$

S. 7.9

$$\stackrel{\textcircled{=}}{=} \frac{1}{x} \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{x^k}{k!} \left(\ln^k a - \ln^k b \right) \quad \ln^k a = (\ln a)^k$$

$= 1 - 1 = 0 \quad \text{für } k=0$

Index-
vers.

$j = k - 1$

$$\stackrel{\textcircled{=}}{=} \sum_{j \in \mathbb{N}_0} x^j \frac{\ln^{j+1} a - \ln^{j+1} b}{(j+1)!} \quad \text{Darst. auch für } x=0.$$

We gen

$$\left| \frac{\ln^{j+1} a - \ln^{j+1} b}{(j+1)!} \right|^{1/j} \leq \left(\frac{|\ln^{j+1} a| + |\ln^{j+1} b|}{(j+1)!} \right)^{1/j}$$
$$\leq \frac{|\ln^{j+1} a|^{1/j} + |\ln^{j+1} b|^{1/j}}{[(j+1)!]^{1/j}} \leq \frac{|\ln a|^{1+1/j} + |\ln b|^{1+1/j}}{\left(\frac{j}{3}\right)^{j/j}}$$

$$= \underbrace{\frac{3}{j}}_{\rightarrow 0} \underbrace{\left(|\ln a|^{1+1/j} + |\ln b|^{1+1/j} \right)}_{\rightarrow |\ln a| + |\ln b| \text{ fest.}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

$\Rightarrow$ konv.-Radius $\rho = \infty$

$\Rightarrow$ auf jedem beschränkten Intervall $I \subset \mathbb{R}$
konv. Pot.-Reihe glm.

$\Rightarrow h \in C^\infty(I)$ nach S. 7.11+12

$\Rightarrow h \in C^\infty(\mathbb{R})$ und

$$\underline{h^{(m)}(0) = \frac{(\ln a)^{m+1} - (\ln b)^{m+1}}{m+1}}$$

8. Taylor-Entwicklung

Vorüberlegung:

Sei $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ echtes Intervall, $x_0 \in I$

und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar in x_0 . Wir haben im

Ama I gez., dass dann eine Fkt. $\varepsilon: I \rightarrow \mathbb{R}$ ex.,

s.d. $\forall x \in I: f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0)$

und $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$

Bis hier am Do. 5.5.22

Nachtrag 7.14

komplexwertige Fkt. $f: I \rightarrow \mathbb{C}$, $I \subset \mathbb{R}$
Intervall echtes und $x_0 \in I$.

7.14 (a)

f heißt diffbar in x_0 .

$$\Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{C} \text{ mit } \lim_{x \rightarrow x_0} \left| b - \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \right| = 0$$

Setze dann $f'(x_0) := b$

(b) f heißt diffbar auf I

$\Leftrightarrow \forall x_0 \in I$ ist f diffb. in x_0

(c) Seien $g = \operatorname{Re} f$, $h = \operatorname{Im} f$, also

$f = g + ih$. Dann

f diffb. in $x_0 \Leftrightarrow g$ & h diffbar in x_0

Dann gilt $f'(x_0) = g'(x_0) + i h'(x_0)$

(d) Auch für solche f gelten Summen-
und Produktregel sowie der Hauptsatz der
D & I Rechnung,

aber nicht der Zwischen- und Mittelwertsatz.

(e) f stetig in $x_0 \Leftrightarrow g, h$ stetig in x_0

$\Leftrightarrow \forall$ Folgen $(x_n) \subset I$ mit $x_n \rightarrow x_0$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

(f) Sei $I = [a, b]$, dann

f Riemann-intbar $\Leftrightarrow g$ & h R-intbar

Setze dann
$$\int_a^b f \, dx = \int_a^b g \, dx + i \int_a^b h \, dx$$

(g) Wir setzen

$$\|f\| = \|f\|_I = \sup_{x \in I} |f(x)| \in [0, \infty]$$

Auf der Menge $\underbrace{B(I, \mathbb{C})}_{\text{beschränkten Fkt}}$

$f: I \rightarrow \mathbb{C}$ definiert dies eine Norm

Insbes. ist $B(I, \mathbb{C})$ ein Vektorraum.

Also ist für $x \approx x_0$ die Fkt

$$P(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

eine gute Approximation / Näherung für $f(x)$.

Dabei: * ist P ein Polynom (vom Grad 1)

* $\varepsilon(x)(x - x_0)$ ist der Näherungsfehler

$$* P(x_0) = f(x_0)$$

$$P'(x_0) = f'(x_0), \text{ d.h. Funktionswert}$$

und Ableitung von P in x_0 werden von f übernommen.

Q: i kann man den „abstrakten“ Fehler

$\varepsilon(x) \cdot (x - x_0)$ berechnen oder abschätzen?

i kann man eine bessere Approximation (d.h. mit kleinerem Fehler) erreichen, indem man ein Polynom mit höherem Grad wählt?

Betrachte $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal diffbar.

Suche Polynom, s.d. sogar

$$(x) \quad P(x_0) = f(x_0), \quad P'(x_0) = f'(x_0), \dots, \quad P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

übereinstimmen. Dazu machen den Ansatz

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-x_0)^k = a_0 + a_1 (x-x_0) + \dots + a_n (x-x_0)^n$$

Dies ist eine (abbrechende) Potenzreihe, also gilt nach S. 7.11. & 12:

$$a_m = \frac{P^{(m)}(x_0)}{m!} = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} \quad (m=0, \dots, n)$$

Damit haben wir ein eind. Polynom vom Grad n mit den gew. Eig. bestimmt.

D. 8.1 Sei $f: I = (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal diffb.

und $a < x_0 < b$. Dann heißt $T_{n,x_0}: C^n(I) \rightarrow \text{Polyn.}$
 $f \rightarrow T_{n,x_0} f$

$$(T_{n,x_0} f)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

das n -te Taylorpolynom von f um den Entwicklungspunkt x_0 .

Also ist für $x \approx x_0$ die Fkt

$$P(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

eine gute Approximation / Näherung für $f(x)$.

Dabei: * ist P ein Polynom (vom Grad 1)

* $\varepsilon(x)(x - x_0)$ ist der Näherungsfehler

$$* P(x_0) = f(x_0)$$

$$P'(x_0) = f'(x_0), \text{ d.h. Funktionswert}$$

und Ableitung von P in x_0 werden von f übernommen.

Q: i kann man den „abstrakten“ Fehler

$\varepsilon(x) \cdot (x - x_0)$ berechnen oder abschätzen?

i kann man eine bessere Approximation (d.h. mit kleinerem Fehler) erreichen, indem man ein Polynom mit höherem Grad wählt?

Betrachte $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal diffbar.

Suche Polynom, s.d. sogar

$$(x) \quad P(x_0) = f(x_0), \quad P'(x_0) = f'(x_0), \dots, \quad P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

übereinstimmen. Dazu machen den Ansatz

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-x_0)^k = a_0 + a_1 (x-x_0) + \dots + a_n (x-x_0)^n$$

Dies ist eine (abbrechende) Potenzreihe, also gilt nach S. 7.11. & 12:

$$a_m = \frac{P^{(m)}(x_0)}{m!} = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} \quad (m=0, \dots, n)$$

Damit haben wir ein eind. Polynom vom Grad n mit den gew. Eig. bestimmt.

D. 8.1 Sei $f: I = (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal diffb.

und $a < x_0 < b$. Dann heißt $T_{n,x_0}: C^n(I) \rightarrow \text{Polyn.}$
 $f \rightarrow T_{n,x_0} f$

$$(T_{n,x_0} f)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

das n -te Taylorpolynom von f um den Entwicklungspunkt x_0 .

Die Abb. $T_{n, x_0} : C^n(I) \rightarrow \text{Polynome}$
 $f \mapsto T_{n, x_0} f$
 ist linear (für jedes n und $x_0 \in I$).

Bsp. 8.2

(a) Betrachte $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1+x}$
 mit Entw. pht $x_0 = 0$.

Für $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ gilt (mit vollst
 Ind.) $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}$

insbes $f^{(k)}(0) = (-1)^k k!$, also

$$T_{n, 0} f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{k!}{k!} x^k,$$

was für $x \in (-1, 1)$ eine konv. Potenzreihe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{n, 0} f(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} (-x)^k = \frac{1}{1+x} = f(x)$$

9-5 ergibt, die dort mit f übereinstimmt.

(b) Für $x > -1$ betrachte $g(x) = \ln(1+x)$
mit $x_0 = 0$.

Da $g'(x) = \frac{1}{1+x} \cdot 1 = f(x)$ nutzen

wir die Formel aus Bsp (a) und erhalten
für $k \in \mathbb{N}_0$, $x > -1$:

$$g^{(k)}(x) = f^{(k-1)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(1+x)^k}$$

insbes. $g^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} (k-1)!$

also $T_{n,0} f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{k!} x^k$
 $= \frac{1}{k}$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{n,0} f(x) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} \quad (*)$$

ergibt $x \mapsto -s(-x)$ wobei $s(\cdot)$ die
in Bsp. 6.6.(b) betrachtete Potenzreihe ist,

g-6 die auf $B_1(0) \supset (-1,1)$ konvergiert.

$$(c) \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^x, \quad x_0 = 0.$$

Da $\exp' x = \exp x$ also $\exp^{(k)}(x) = \exp x$

folgt
$$T_{n,0} f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = E_n(x)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Das Taylor polynom $T_{n,x} f$ ist nur dann eine gute Approximation für f , falls der Restterm / Fehler

$$R_{n,x_0} f(x) := f(x) - T_{n,x_0} f(x)$$

gut abgeschätzt werden kann

S. 8.3 (Taylor-Formel)

Sei $f \in C^{n+1}(I)$ und $x, x_0 \in I$ offenes Interv.

(i) Dann:

$$f(x) = T_{n,x_0} f(x) + R_{n,x_0} f(x)$$

g-7 mit $R_{n,x_0} f(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$

Dies wird „Integraldarstellung des Restglieds $R_{n, x_0} f$ “ genannt.

(ii) Es ex. ein ξ zwischen x_0 und x , s.d.

$$R_{n, x_0} f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

„Restglied darst. von Lagrange“

Sieht fast so aus, wie die Summanden von $T_{n, x_0} f$, nur dass die Abl. an unbekannter Stelle genommen wird.

(iii) Es ex. ein ζ zwischen x_0 und x , s.d.

$$R_{n, x_0} f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{n!} (x - \zeta)^n (x - x_0)$$

„Cauchy - Restglied darstellung“

Bw: Vollst. Ind. nach n

$$\underline{n=0} \quad \text{HDI} \Rightarrow$$

$$R_{0,x_0} f(x) = f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t) (x-t)^0 \frac{1}{1!} dt$$

da $T_{0,x_0} f(x) = f(x)$ konstantes Polynom.

$$\underline{n \mapsto n+1}$$

Für das Restgl. der Ordn. n gilt

$$R_{n,x_0} f(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

$$\begin{aligned} \text{part.} &= \frac{1}{n!} \left(- \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(t) \right) \Big|_{x_0}^x + \int \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+2)}(t) dt \\ \text{Intg.} & \end{aligned}$$

$$= \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt$$

(xx)

$$= R_{n+1,x_0} f(x)$$

$$\text{Also: } f(x) - T_{n+1,x_0} f(x) = \left[f(x) - T_{n,x_0} f(x) \right] - \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} x (x-x_0)^{n+1}$$

$$= R_{n, x_0} f(x) - \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \stackrel{\text{S.O.}}{=} R_{n-1, x_0} f(x) \quad \square$$

Es gibt verschiedene Möglichkeiten den Fehler $R_{n, x}$ darzustellen, obige Darst. wird Integraldarstellung des Restglieds genannt. Manchmal sind andere Darst. praktischer

(Restglied darst. von Lagrange)

S. 8.3 (ii) Seien I, x, x_0, f und $R_{n, x_0} f$ wie in S. 8.3. Dann ex. ein ξ zwischen x und x_0 s.d.

$$R_{n, x_0} f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

Bw $\exists x > x_0$ Auf Integraldarst. d. Rest gl.

Wende 2. Mittelwert s. der Integralr.

mit $g(t) = (x-t)^n > 0$ für $t > x_0$.

$$R_{n, x_0} f(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x g(t) f^{(n+1)}(t) dt$$

wobei
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varepsilon(x - x_0)}{|x - x_0|^m} = 0$$

„ $\varepsilon(x - x_0)$ geht schneller gegen Null

als $|x - x_0|^m$; $\varepsilon(x - x_0) \ll |x - x_0|^m$ “

Beachte, dass wir für diese qualitative, nicht explizite Darstellung des Fehlers eine Diffbarkeitsordnung weniger fordern

(ii) Seien $f'(x_0) = \dots = f^{(m-1)}(x_0) = 0$ aber $f^{(m)}(x_0) \neq 0$. Dann gelten:

a) m gerade & $f^{(m)}(x_0) > 0$

$\Rightarrow f$ hat lokales Min in x_0

b) m gerade & $f^{(m)}(x_0) < 0$

$\Rightarrow f$ hat lok. Max in x_0

c) m ungerade

$\Rightarrow f$ hat kein lok. Extremum in x_0

Vgl. mit notw/hinr. krit. für Min/Max bei Kurvendiskussion.
9-11

$$\begin{aligned}
 \text{MWS} &= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \underbrace{\int_{x_0}^x \overbrace{(x-t)^n}^{g(t)} dt}_{=} \\
 &= - \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \bigg|_{x_0}^x = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} \\
 &= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) (x-x_0)^{n+1}
 \end{aligned}$$

Sieht fast so aus, wie Terme in $T_{n,x_0} f$,
 nur, dass Ableitung an unbekannter Stelle
 ξ genommen wird.

(iii) o. B.

□

Die Integral - Restglied darst. gilt auch für
 C^{n+1} Fkt $f: I \rightarrow \mathbb{C}$, die beiden
 anderen nicht. Analog zu Aussagen über
 diffb. Fkt hat man:

S. 8.4 Sei $I \subset \mathbb{R}$ offenes, echtes Intervall,
 $f \in C^n(I)$ und $x_0 \in I$. (i) Dann

$$f(x) = T_{n,x_0} f(x) + \varepsilon(x-x_0)$$

ohne Bw. / übg.

B.8.5 Sei $I = \mathbb{R}$, $\cos = f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 = 0$.

$$T_{2,0} f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

Restglied: $\exists \xi$ zwischen 0 und x s.d.

$$R_{2,0} f(x) = f'''(\xi) \frac{x^3}{3!} = \sin \xi \frac{x^3}{3!}$$

$$\Rightarrow | \quad | \leq \frac{|x|^3}{3!} \quad \text{da } |\sin \xi| \leq 1$$

Es gilt aber auch $|\sin \xi| \leq |\xi| \leq |x|$,

$$\text{s.d. } |R_{2,0} f(x)| \leq \frac{|x|^4}{6}.$$

Weiter verbessert sich die Abschätzung,

falls man $f'''(0) = \sin(0) = 0$ beachtet, s.d.

$$T_{3,0} f = T_{2,0} f \quad \text{also} \quad R_{3,0} f = R_{2,0} f$$

gilt. Denn

$$|R_{2,0} f(x)| = |R_{3,0} f(x)| \leq |\cos \xi| \frac{|x|^4}{4!} \leq \frac{|x|^4}{24},$$

wobei ξ eine Stelle zw. 0 und x .

Taylor - Reihen

Im Rest des Kapitels sei

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^\infty(I),$$

I offenes Intervall, $x_0 \in I$ fixiert

Offensichtlich sind die Taylorpolynome

(x) $(T_{n, x_0} f)_n$ eine Folge von

Partialsummen. Wir fragen

(i) konvergiert (x) gegen eine Potenzreihe

(ii) Falls ja, ist die Reihe eine

Darstellung von f ?

D. 8.6

Die Potenzreihe $\sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$

heißt Taylor-Reihe von f um

(Entwicklungspunkt) x_0

Es. ein $\delta > 0$ s.d. diese Reihe für
 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ konvergiert, so
schreibt man für den Summenwert

$$(\square) \quad T_{x_0} f(x) := \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad x \in B_\delta(x_0)$$

Gilt
 $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : T_{x_0} f(x) = f(x)$

sagen wir, dass sich f um x_0 in
eine Taylor-Reihe entwickeln oder
als ————— darstellen lässt.

Wir sind insbesondere daran interessiert, auf
welchen Intervallen die konv. $(\square)$ uniform
ist, denn da dürfen wir gliedweise
differenzieren und integrieren.

Die Untersuchung sowohl der
p.k.t. als auch g.l.m. Konvergenz in $(\square)$
führt auf geeignete Abschätzungen und
das Restglied $R_{n, x_0} f$.

L. 8.7 Sind $x_0 \in \mathbb{R}$ und $a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
derart, dass die Potenzreihe

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k (x - x_0)^k \quad (PR)$$

einen positiven Konvergenzradius hat, so
sind die a_k gem. 7.12 durch

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

gegeben, wobei f die C^∞ -Fkt

$$(x_0 - \varrho, x_0 + \varrho) \ni x \mapsto f(x) = \sum_k a_k (x - x_0)^k$$

ist. Also ist (PR) die Taylorreihe von f
und die Taylorpolynome die zugehörigen
Partialsummen, d. h. $S_n = T_{n, x_0} f$.

Bw: 7.8 & 7.12 □

Anwendung in 2 Richtungen:

① 10-3 ↑ Berechne Abl $f^{(k)}(x_0)$ von f , zeige $\varrho > 0$
↑ Falls ich a priori weiß, dass f Potenzreihe besitzt

und erhalte dadurch Taylorentwicklung
und damit Potenzreihen darstellung
von f .

② Ist eine Potenzreihen darst. von f
mit positiven $\rho > 0$ gegeben, kann
ich daraus die Ableitungen $f^{(h)}(x_0)$
ab lesen.

Bsp. 8.8 (a) Für $f = \exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt ja

$f^{(n)} = f$, daher für $x_0 = 0, x \in \mathbb{R}$:

$$|R_{n,0}(x)| = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^{\tau} \frac{\tau^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

ξ zwischen
0 und x

NF, da exp-
Reihe summ.

sofern $x \in \overline{B}_{\tau} := [-\tau, \tau]$, haben also sogar

uniforme Konvergenz auf jedem beschränkten
Intervall $I \subset \mathbb{R}$ der Reihe

10-4
$$e^x = \sum_k \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{x^k}{k!}$$

$$(b) \quad f = \sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], \quad x_0 = 0$$

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x \Rightarrow f^{(2k)}(0) = 0$$

$$f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x \Rightarrow f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$$

$$\Rightarrow T_0 f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1} \quad (T_{\sin})$$

als formale Potenzreihe, wobei Konvergenzbereich noch zu klären ist. Um Restterm abzuschätzen beachte

$$|\cos x| \leq 1, \quad |\sin x| \leq 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |R_{2k+1,0} f(x)| = |R_{2k+2,0} f(x)|$$

$$\leq \frac{|x|^{2k+3}}{(2k+3)!} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

$\Rightarrow g = \infty$, ganz $\mathbb{R}$ ist Konvergenzbereich

$\Rightarrow (T_{\sin})$ ist tatsächl. überall konvergent.

und stimmt mit schon bekanntem

$$\sin(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad \text{überein.}$$

konkrete Bsp - Abschätzung:

Für $|x| \leq 1$ und $k \geq 4$ gilt:

$$|R_{2k+1,0} f(x)| \leq \frac{1}{(2k+3)!} \leq \frac{1}{11!} < 10^{-7}$$

(c) Ganz analog zeigt man, dass
Taylorentwicklung von

$f := \cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um $x_0 = 0$, also

$$T_0 f(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

auf ganz $\mathbb{R}$ konvergiert. Da bereits

bekannt, dass $\cos$ eine konv. Potenz

reihenentwicklung um $x_0 = 0$ besitzt,

folgt mit L. 8.7, dass $T_0 f$ mit f

übereinstimmt.

D.8.9 Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$

definieren wir den verallgemeinerten

Binomialkoeffizienten durch

$$\binom{\alpha}{0} := 1 \text{ und}$$

$$\binom{\alpha}{h} := \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-h+1)}{h!} \text{ für } h \in \mathbb{N}$$

Es gilt dann die Verallgemeinerung
der binomischen Formel

S.8.10 (Binomische Reihe)

Für $x \in (-1, 1)$ und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = (1+x)^\alpha$$

Bw & Diskussion : übg.

Bsp. 8.11

Im der Üb. zeigen Sie, dass

für $x \in (-1, 1)$ die Potenzreihenentwicklung

$$(ATR) \quad \arctan x = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$$

Mit L. 8.7 bzw 7.11 & 12 können wir daraus

$$\frac{(-1)^k}{2k+1} = a_{2k+1} = \frac{\arctan^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}$$

$$\text{und } 0 = a_{2k} = \frac{\arctan^{(2k)}(0)}{(2k)!}$$

folgem, also

$$\arctan^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ gerade} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} (n-1)! & \text{für } n = \underline{2k+1} \\ & \text{ungerade} \end{cases}$$

Falls ich schon a-priori weiß, dass Taylor Reihe von $\arctan$ auf $(-1, 1)$ konvergiert,

könnte ich - umgekehrt - (ATR) durch be-
10-8

rechnung aller Ableitungen in $x_0 = 0$
beweisen.

Fehlerabschätzung:

Für $x \in [-1, 1]$ ist $\left(\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right)_k$ eine

monotone Nullfolge, also ergibt die

Fehler schranke zum Leibnitz - Kriterium

$$\left| \arctan x - \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \right| \leq \frac{|x|^{2m+3}}{2m+3}$$

$$\begin{aligned} |x| &\leq 1 \\ &\leq \frac{1}{2m+3} \longrightarrow 0 \quad \text{uniform in } [-1, 1] \end{aligned}$$

Setze $x = 1$ ein. Da $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{2k+1} \right| \leq \frac{1}{2m+3}$$

$$\text{und } \pi = 4 \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$



Konvergenzradius ρ von (ATR):

$$\frac{2^{k+1}}{\sqrt{2^{k+1}}} = e^{\frac{\ln 2^{k+1}}{2^{k+1}}} \longrightarrow 1$$

$\Rightarrow$ Reihe konvergiert für alle $x \in (-1, 1)$
sogar für alle $z \in B_1 \subset \mathbb{C}$.

konvergiert nicht für $|x| > 1$, obwohl
 $\arctan \in C^\infty(\mathbb{R})$!

$\Rightarrow$ Potenzreihe stellt $\arctan$ nur lokal
dar.

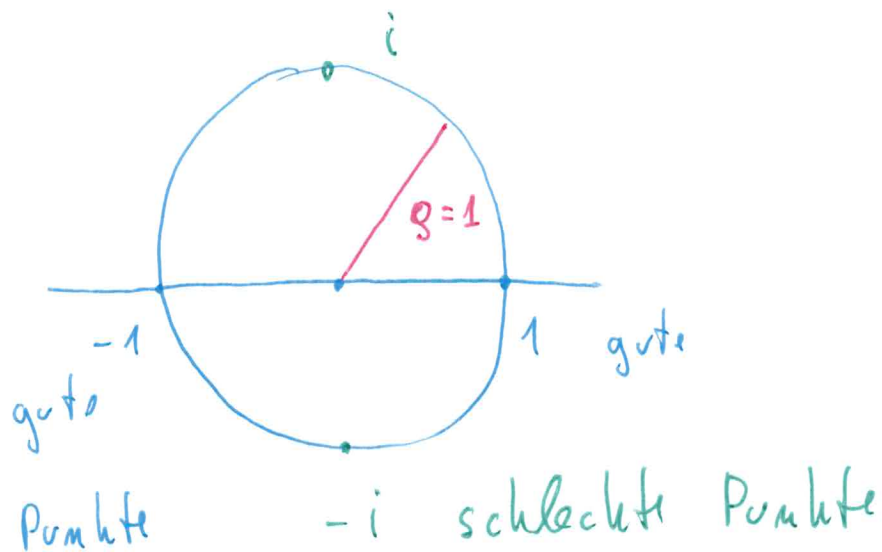
Was geht kaputt bei Radius $\rho = 1$?

Betrachte dazu Randpunkte $\pm i \in \partial B_1$

$$\sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{(-1)^k (\pm i)^{2k+1}}{2k+1} = \pm i \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{(-1)^k \overbrace{[(\pm i)^2]^{-1}}^{= -1}}{2k+1}^k$$

$$= \pm i \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{2k+1} \quad \text{ist divergent}$$

analog zur harmonischen Reihe



Bm 8.12 (Vorsicht: Pathologien)

- a) Es gibt $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ deren Taylorreihe nur in $x = x_0$ konvergiert.
- b) S.v. Borel: Zu jeder Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ ex. $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $f^{(n)}(0) = a_n, n \in \mathbb{N}$.
(Aber a_n kann so schnell wachsen, dass $g=0$.)
- c) Es gibt $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ deren Taylorreihe auf ganz $\mathbb{R}$ konvergiert, aber gegen eine andere Fkt g ! z.B.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ e^{-1/x^2} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

Offensichtlich
 $f \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$

Induktiv zeigt man $\forall k \in \mathbb{N}_0$:

$$f^{(k)}(0) = 0 \quad \text{und} \quad f \in C^k(\mathbb{R}).$$

$$\Rightarrow \text{Taylorreihe} \quad T_0 f(x) = \sum_k 0$$

konv. auf ganz $\mathbb{R}$ gegen $g \equiv 0$.

Bsp. 8.13 (Fehler fkt)

$$\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = \int_0^x \underbrace{\frac{2}{\sqrt{\pi}}}_{\text{Dichte der Standard normalverteilung}} e^{-t^2} dt$$

vgl. Dichte der Standard normalverteilung

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dt \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{(-1)^k}{k!} t^{2k} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)}$$

Exp. Reihe gfm konv. auf $[0, x]$

z. B.

$$x=1 \Rightarrow \Phi(1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{(-1)^k}{k! (2k+1)}$$

mit Fehler
abschätzung
aus Leibnitz
kriterium

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{216} + \frac{1}{1320} - \frac{1}{3360} \pm \dots \right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} (0,762497 \pm 1,4 \cdot 10^{-5})$$

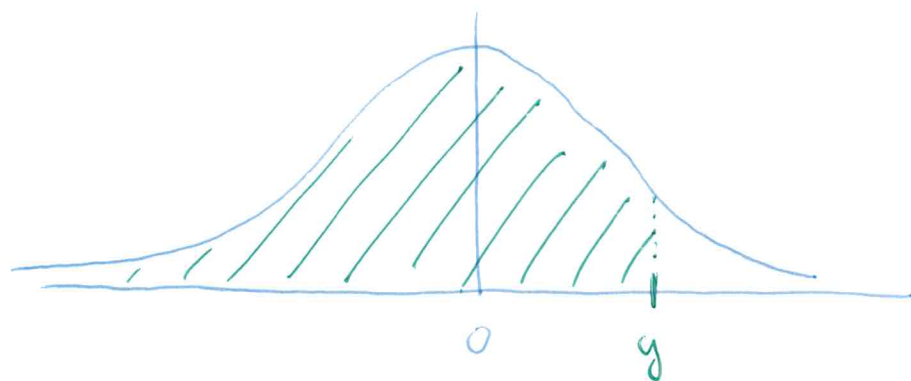
$$= 0,860386 \pm 2 \cdot 10^{-5}$$

Bm

Normalverteilung und Fehlerfkt.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

ist die Dichte der Standardnormalverteilung



Stammfunktion: (als uneigentliches Int)

$$F(y) := \int_{-\infty}^y f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

heißt Verteilungsfkt der St Norm Vert.

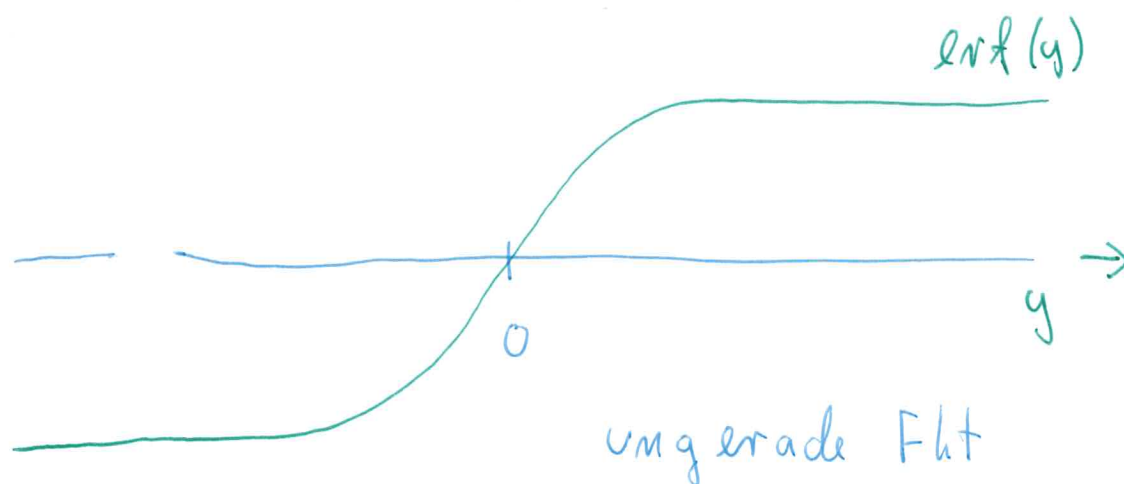
Interpretation als Wahrscheinlichkeit

$$IP(X \leq y) = F(y)$$

wobei X eine standardnormalverteilte
Zufallsgröße ist, z. B. Preis eines

Finanzderivats.

Graph der Fehler fkt $y \mapsto \Phi(y) = \text{erf}(y)$



Bz. zur Vert Fkt F :

$$F(y) = \frac{1}{2} \left[1 + \text{erf}\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) \right]$$

$\text{erf}\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)$ ist die Wk, dass der Wert einer St Nor. vert. Zufallsgröße im Intervall $(-y, y)$ liegt.

9 Funktionen im $\mathbb{R}^d$

Die VR $\mathbb{R}^d$ (und $\mathbb{C}^d$) sind aus Lin A bekannt.

$x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ ist ein d -Tupel reeller Zahlen

geometrische Interpretation als

Ortskoordinaten eines Punktes p ,

z.B. in der Ebene falls $d=2$, ansonsten im d -dim Raum $\mathbb{R}^d$

geom. Interpret. als Translation / Parallelverschiebung des Raumes $\mathbb{R}^d$, d.h. einer (affinen) bijektiven Abb.

$$v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d, (p_1, \dots, p_d) \mapsto (p_1 + v_1, \dots, p_d + v_d)$$

Vektor v ist durch seine Wirkung auf einen bel. Punkt $p \in \mathbb{R}^d$ festgelegt, insbes.

kann v als gerichtete Strecke $\overrightarrow{pq}$

11-3 dargestellt werden, falls $q = v(p)$.

Ist $p \in \mathbb{R}^d$ fixiert, liefert

$$v \mapsto v(p)$$

eine Bijekt. zw. Vektoren und Punkten im $\mathbb{R}^d$.

Für $X \subset \mathbb{R}^d$ betrachten wir Funktionen

$$f: X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x = (x_1, \dots, x_d) \mapsto f(x) \\ = f(x_1, \dots, x_d)$$

mehrerer (mehrerer) Veränderlicher. Für $d=1$

kennen wir schon den Funktionsgraphen

$$G_f = \left\{ \underbrace{(x, f(x))}_{\mathbb{R}^d} \in \mathbb{R}^{d+1} \mid x \in X \right\}$$

$d=2 \Rightarrow G_f$ (gekrümmte) Fläche
bei schönem f

Bsp: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$P(x, y) = x^2 + 2y^2, \quad Q(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$$

$$N_0(f) = \{ x \in X \mid f(x) = 0 \}$$

ist die Nullstellenmenge von f , allgemeiner

$$N_\alpha(f) = \{ x \in X \mid f(x) = \alpha \}$$

die α -Niveaumenge von f (zu $\alpha \in \mathbb{R}$).

Z. B. werden auf Landkarten

Höhenlinien

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ Höhe über m. N.

Isobaren

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ Luftdruck

Isothermen

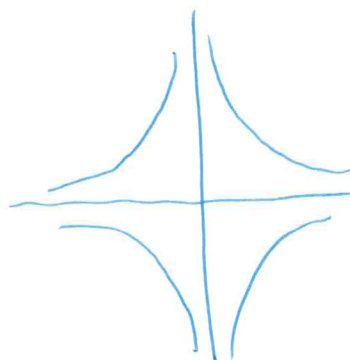
Temperaturen

dargestellt.

Zu $\alpha > 0$ sehen N_α von P und Q etwa



Ellipse



Hyperbel

so aus. (Was gilt für $\alpha = 0$, $\alpha < 0$?)

Füge ich mehrere Fkt $f_1, \dots, f_m: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

zu einem Vektor

$$f := (f_1, \dots, f_m)$$

zusammen, erhalte ich eine Abb

$$f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m, (x_1, \dots, x_d) \mapsto f(x) =$$

$$= (f_1(x_1, \dots, x_d), \dots, f_m(x_1, \dots, x_d))$$

Bsp. 9.1

a) Lineare Abb. $L: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$, die bzgl. einer Basis als Matrix A dargestellt werden kann. Ist insbesondere L bijektiv, kann ich es als Koordinatentransformation des Raumes auffassen (Basiswechsel).

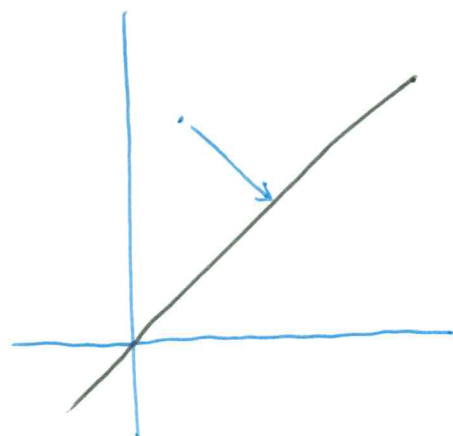
b) Projektion: $P: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2)$$

Längen- & Breitengrad einer Stadt auf der

11-6 Landkarte, Höhe x_3 vergessen.

$$p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \mapsto (x+y, x+y)$$



c) Abb $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ können wir mittels der Identifikation $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2, z \sim x+iy \sim (x, y)$

auch als Abb $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ auffassen

d) $z \mapsto z^2$ entspr. $x+iy \mapsto (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$

also $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$

e) $z \mapsto e^z$ entspricht

$g(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ da ja

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

f.) Für $\alpha \in [0, 2\pi]$ sei $D_\alpha: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto e^{i\alpha} z$

11-7 Drehung um Winkel α

$$\begin{aligned} \text{Da} \quad & (\cos \alpha + i \sin \alpha) (u + iv) \\ &= u \cos \alpha - v \sin \alpha + i (v \cos \alpha + u \sin \alpha) \end{aligned}$$

entspricht dies

$$D_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad D_\alpha(u, v) = (u \cos \alpha - v \sin \alpha, v \cos \alpha + u \sin \alpha)$$

Speziell für $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ist $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \alpha$

$$\text{und} \quad D_{\frac{\pi}{4}}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2}} (u - v, v + u).$$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt:} \quad (Q \circ D_{\frac{\pi}{4}})(u, v) &= Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(u - v, v + u)\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 (u^2 - v^2) = \frac{u^2 - v^2}{2} \end{aligned}$$

In den neuen Koordinaten wird der gemischte Term des Polynoms $Q(x, y) = x \cdot y$ transformiert in die Summe zweier Polynome jeweils einer Veränderlichen.

Da D_α bijektiv ist, darf ich es als eine Koordinatentransformation

$$\overline{11-8} \quad \Psi : U \rightarrow X \quad X, U \subset \mathbb{R}^d \quad \text{auffassen}$$

vgl. auch Bsp. a)

g) Polar koordinaten der Ebene

$$X := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad U := \underset{\substack{\psi \\ r}}{(0, \infty)} \times \underset{\substack{\varphi \\ \in}}{(-\pi, \pi]}$$

$$\Psi(r, \varphi) := (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

Die Inverse Abb. ist

$$\Psi^{-1}(x, y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{sign} y \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

$$\text{wobei } \operatorname{sign}(y) = \begin{cases} 1 & \text{für } y \geq 0 \text{ insbes } y=0 \\ -1 & y < 0 \end{cases}$$

Vorüberlegung im Komplexen:

$\forall z \in \mathbb{C} \quad \text{ex. } r \geq 0 \text{ und } \varphi \in \mathbb{R} \text{ mit}$

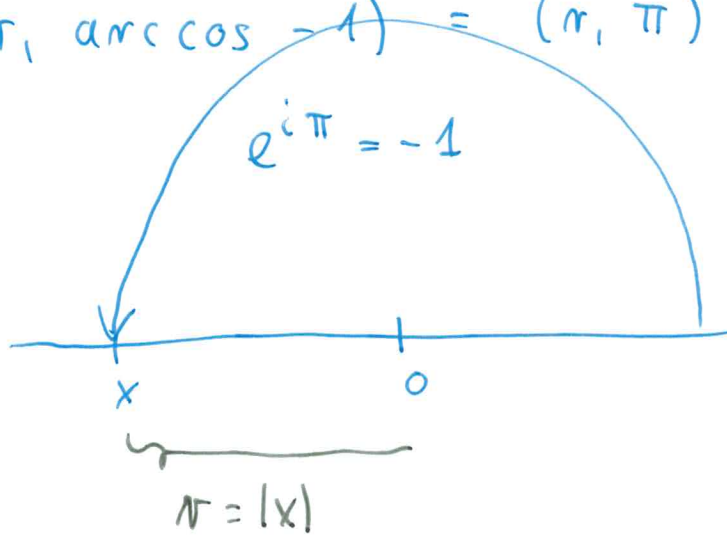
$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi}$$

Dabei ist $z \mapsto r = |z|$ eindeutig. Ist $z \neq 0$ und φ aus $(-\pi, \pi]$ gewählt, dann ist auch

$z \mapsto \varphi$ eindeutig (sonst nicht).

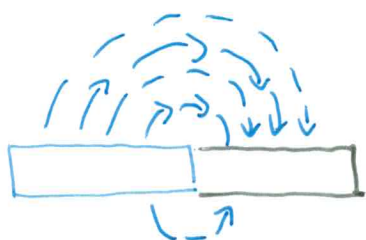
$$\text{Test: } \stackrel{x \neq 0}{\Psi}^{-1}(x, 0) = \left(\sqrt{x^2}, 1 \cdot \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2}} \right) \\ = \left(|x|, \arccos \frac{x}{|x|} \right) = (r, \arccos \operatorname{sign} x)$$

$$= \begin{cases} (r, \arccos 1) = (r, 0) & \text{für } x > 0 \\ (r, \arccos -1) = (r, \pi) & x < 0 \end{cases}$$



Spezialfälle: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ Kurve im $\mathbb{R}^m$
 insbes $\mathbb{R}^3$ — 11 — Raum
 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ Fläche im 11
 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ Vektorfeld

z.B. Eisenstäbe im Feld eines Magnets



10 Normen und Metriken

D. 10.1 Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$
 $\in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Eine Abb. $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{K}$, die

(N1) $\forall x \in V: \|x\| \geq 0$
 $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ „Definitheit“

(N2) $\forall x \in V, \alpha \in \mathbb{K}: \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
 „Homogenität“

(N3) $\forall x, y \in V: \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

„||-||“ erfüllt, heißt Norm auf V . „Dreiecksungleichung“

und das Paar $(V, \|\cdot\|)$ normierter Raum.

Es folgt: $\forall x, y \in V: |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

Bsp. 10.2 a) Ist V ein euklidischer Vektorraum,
d.h. VR über $\mathbb{R}$ mit Skalarprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

so definiert

$x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$ eine Norm auf V . übg.

Es gilt insbes die Cauchy-Schwarz Ungl.

$$\forall x, y \in V: |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \leq \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2}$$

" = "

genau dann wenn $\exists t \in \mathbb{R}$ mit $x = ty$ oder
 $y = tx$.

b) Spezialfall: $V = \mathbb{R}^m$

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y = \sum_{j=1}^m x_j y_j$$

ergibt Norm $\|x\| = \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^m x_i^2 \right)^{1/2}$

c) Auf $V = \mathbb{K}^m$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ gibt es auch andere Normen; z. B.

$$\|x\|_1 = \left(\sum_{j=1}^m |x_j| \right)^1$$

oder allgemeiner

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^m |x_j|^p \right)^{1/p}$$

für $p \in [1, \infty)$.

$\|x\|_p$ verallgemeinert also $\|x\|_1$ und $\|x\|_2$

d) Ergänzend definiert man auf $V = \mathbb{K}^m$

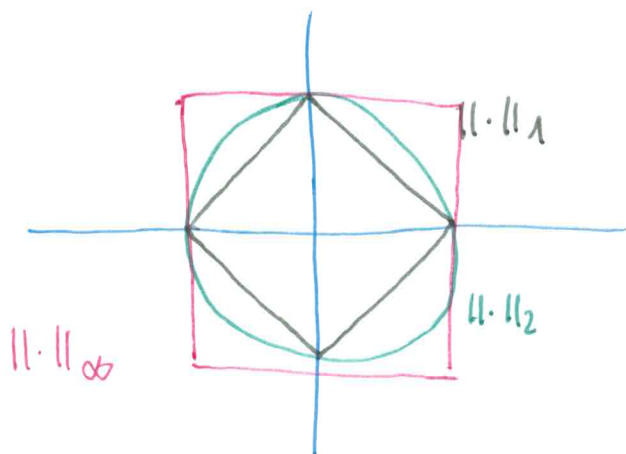
$$\|x\|_\infty := \max \{ |x_1|, \dots, |x_m| \}$$

$$\Rightarrow \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{m} \|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq m \|x\|_\infty$$

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{m} \|x\|_2$$

Betrachte nun
im $\mathbb{R}^2$ jeweils die
Einheitskreislänge
 $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$
bzgl. $\|\cdot\|_p$, $p=1, 2, \infty$



In c) und d) ist immer $|x_j| \in [0, \infty)$
egal, ob $x \in \mathbb{R}^M$ oder $x \in \mathbb{C}^M$

e) Setze für $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ (Folgenraum)

$$K^{\mathbb{N}} := \{ a = (a_i)_{i \in \mathbb{N}} = (a_1, a_2, \dots) \mid a_i \in K \}$$

↑ ganz allg. ist für zwei Mengen A, B

$$A^B := \{ f: B \rightarrow A \} \quad \downarrow$$

und für $p \in [1, \infty)$

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_p : K^{\mathbb{N}} &\rightarrow [0, \infty] \\ a &\mapsto \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} |a_i|^p \right)^{1/p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{\infty} : K^{\mathbb{N}} &\rightarrow [0, \infty] \\ a &\mapsto \sup_{i \in \mathbb{N}} |a_i| \end{aligned}$$

Dann:

$\forall p \in [1, \infty], \forall a \in K^{\mathbb{N}}:$ isoton in n .

$$\|a\|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\| (a_1, \dots, a_n) \|_p}_{\text{Norm auf } K^n}$$

Setze für $p \in [1, \infty]$:

$$\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{K}) = \{a \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \|a\|_p < \infty\}$$

Satz 10.3 Für alle $p \in [1, \infty]$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

ist $(\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{K}), \|\cdot\|_p)$ ein normierter

Raum.

Bw. übg.

Bsp 10.4

Sei $a_n = (-1)^n / n$

$$\Rightarrow \sum |a_n| = \sum \frac{1}{n} = \infty \text{ divergent} \Rightarrow a \notin \ell^1$$

$$\sum |a_n|^2 = \sum \frac{1}{n^2} < \infty \Rightarrow a \in \ell^2$$

$$\sup |a_n| \leq 1 \Rightarrow a \in \ell^\infty$$

$$b_n = 1 \text{ für alle } n \Rightarrow \sum b_n = \infty = \sum b_n^2$$

$$\text{aber } \sup |b_n| = 1 \Rightarrow b \in \ell^\infty \setminus \ell^2$$

$$c_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum |c_n| = \sum \frac{1}{n^2} < \infty \Rightarrow c \in \ell^1$$

$$\boxed{12-2} \quad \sum \left| \frac{1}{n^2} \right|^2 = \sum \frac{1}{n^4} < \infty \Rightarrow c \in \ell^2$$

Analog zu Bild in Bsp. 10.2 d) gilt:

$$l^1 \subset l^2 \subset l^\infty$$

Abfall schneller als $\frac{1}{n} \Rightarrow$ Abf. schneller als $\frac{1}{\sqrt{n}}$

$\Rightarrow$ beschränkte Folge

Bsp 10.5 Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Dann sind

$$V = C([a, b], \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad V = C([a, b], \mathbb{C}) \quad \text{VR}$$

von Funkt. Wir definieren drei Normen

auf V

Max wird angenom.

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)| = \max_{x \in I} |f(x)| \quad \uparrow \text{stetig}$$

Supre norms norm

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx \quad L^1\text{-Norm}$$

$$0 < \delta := |f(x_0)| \Rightarrow |f(x)| > \frac{\delta}{2} \quad \text{für } x \in B_\varepsilon(x_0)$$

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad L^2\text{-Norm}$$

$$\boxed{12-3} \quad = (\langle f, f \rangle)^{1/2}$$

für Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

falls $V = C([a, b], \mathbb{C})$

Cauchy-Schwarz-U. lautet hier

$$\left| \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| |g(x)| dx$$

$$\leq \|f\|_2 \|g\|_2 = \left(\int |f|^2 dx \cdot \int |g|^2 dx \right)^{1/2}$$

D. 10.6 (Metrik)

Sei $X \neq \emptyset$ Menge. Eine Abb. $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$

heißt Metrik* auf X und (X, d) metrischer

Raum, falls für alle $x, y, z \in X$

$$d(x, y) \geq 0 \quad \text{und} \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

(Definitheit)

$$d(x, y) = d(y, x) \quad \text{Symmetrie}$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \text{Dreiecksungl.}$$

Bsp. 10.7 a) Sei $(V, \|\cdot\|)$ normierter Raum

$$\text{und } d(x, y) = \|x - y\| = \|(y - x)\| \\ = |-1| \|y - x\|$$

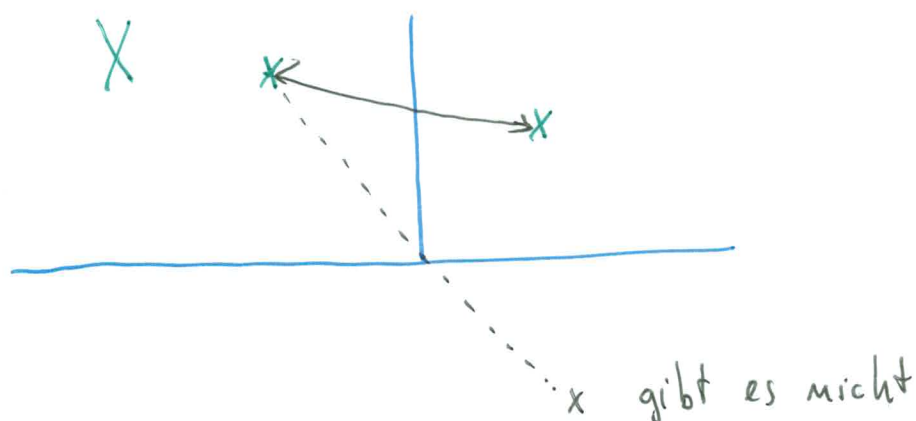
Dann ist (V, d) metrischer Raum.

b) Ist $Y \subset X$ und (X, d) metrischer Raum, dann ist $(Y, d_Y) = \|\cdot\|$ R,

wobei $d_Y(x, y) = d(x, y)$ für $x, y \in Y$.

„Einschränkung von d auf Y “.

z.B. $X = \mathbb{R}^2$, $d(x, y) = \|x - y\|_2$, $Y = \mathbb{R} \times [0, \infty)$



Allg: V VR mit Norm $\|\cdot\|$, $X \subset V$ bel.

$\Rightarrow$ X metr. Raum mit $d(x, y) = \|x - y\|$

$\Rightarrow \mathbb{Q}^n$ ist metrischer Raum mit $d(x, y) = \|x - y\|_p$

b) Diskrete Metrik

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

$\Rightarrow$ alle (unterschied) Punkte haben gleichen Abstand voneinander

Übg: Bw. Metrik & kommt nicht von Norm

c) Französische Eisenbahnmetrik

Sei $(V, \|\cdot\|)$ normierter Raum, $x_0 \in V$ und

$$d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \|x - x_0\| + \|x_0 + y\|$$

$\Rightarrow (V, d)$ metrischer Raum

„alle Wege führen über Paris“

D. 10.8 Sei (X, d) metr. Raum, $x_0 \in X$ und $A \subset X$.
Sätze $A^c = X \setminus A$.

a) Sei $\varepsilon > 0$. $B_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < \varepsilon\}$ heißt
(offener) ε -Ball um x_0

$$\overline{B_\varepsilon(x_0)} = \{x \in X : d(x, x_0) \leq \varepsilon\}$$

12-6 abgeschlossener ε -Ball um x_0

b) x_0 heißt Randpunkt von A

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \text{ist } B_\varepsilon(x_0) \cap A \neq \emptyset \\ \text{und } B_\varepsilon(x_0) \cap A^c \neq \emptyset$$

$$\partial A = \{ x \in X \mid x \text{ Randpunkt von } A \}$$

c) $\overline{A} := A \cup \partial A$ heißt Abschluss von A .

d) $A^\circ := A \setminus \partial A$ heißt offenes Inneres von A

Ein $x \in A^\circ$ heißt innerer Punkt von A

e) A heißt offen $\Leftrightarrow A^\circ = A$

A heißt abgeschlossen $\Leftrightarrow \overline{A} = A$

(f) x_0 heißt Häufungspunkt von $A \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \text{ist } B_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\} \cap A \neq \emptyset$$

x_0 heißt isolierter Punkt von $A \Leftrightarrow$

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{mit } B_\varepsilon(x_0) \cap A = \{x_0\}$$

12-7. g) A ist dicht in $X \Leftrightarrow \overline{A} = X$

Bm 10.9

d diskrete Metrik auf X , $x_0 \in X$

$$B_1(x_0) = B_R(x_0) = X \quad \text{für } R > 1$$

$$\underline{B_{\frac{1}{2}}(x) = \{x_0\} = B_\varepsilon(x)} \quad \varepsilon \in [0, 1)$$

X ist offen und abgeschlossen, da $\partial X = \emptyset$.

$$\emptyset \quad \text{---||---} \quad \partial \emptyset = \emptyset$$

x_0 innerer Pkt von $A \Rightarrow x_0$ Häufungsp. von A

$$\left[\begin{array}{l} A = \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \Rightarrow 0 \text{ ist } \text{---||---} \\ \text{jedes } x \in A \text{ ist isolierter Punkt von } A, \\ A^\circ = \emptyset, \quad \overline{A} = A \cup \{0\} \\ \mathbb{Q} \text{ liegt dicht in } \mathbb{R} \end{array} \right.$$

bzgl. jeder Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$ von einer Norm auf $\mathbb{R}$.

10.10 Satz (X, d) metrischer Raum, $A \subset X$.

$$(a) \quad x \in A^\circ \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset A$$

$$(b) \quad A^\circ \text{ ist offen, d.h. } (A^\circ)^\circ = A^\circ$$

$$(c) \quad \bar{A} \text{ ist abgeschlossen, } \overline{(\bar{A})} = \bar{A}.$$

$$(d) \quad A \text{ offen} \Leftrightarrow A^c \text{ abgeschlossen.}$$

$$= A \setminus \partial A$$

Bw (a) $x \in A^\circ \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \underbrace{B_\varepsilon(x_0) \cap A^c = \emptyset}$

$$\Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset A$$

$$B_\varepsilon(x) \subset A \Rightarrow B_\varepsilon(x) \cap A^c = \emptyset$$

$$(b) \quad (A^\circ)^\circ = A^\circ \setminus \partial(A^\circ) \subset A^\circ$$

$$\text{z.z. } (A^\circ)^\circ \supset A^\circ$$

$$\text{Sei } x \in A^\circ \stackrel{(a)}{\Rightarrow} \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset A$$

$$\Rightarrow B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \subset A^\circ$$

$$\text{Ansonsten } \exists y \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap \partial A$$

$$\Rightarrow \emptyset \neq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y) \cap A^c \ni z \Rightarrow d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

$$< \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \text{zu } z \in B_\varepsilon(x) \subset A$$

$$\stackrel{(a)}{\Rightarrow} \underset{12-9}{x} \in (A^\circ)^\circ \quad \checkmark$$

Teil c & d: übg.

Bsp 10.11

(a) Sei $X = \mathbb{R}$ mit bel. Norm $\|\cdot\|$ und
 $d(x,y) = \|x-y\|$.

$$\partial [a,b) = \partial (a,b] = \partial (a,b) = \partial [a,b] = \{a,b\}$$

$$\overline{(a,b)} = [a,b] \quad , \quad [a,b]^\circ = (a,b)$$

ist abgs.

ist offen

$[a,b)$ weder noch

$$\mathbb{Q}^\circ = \emptyset, \quad \overline{\mathbb{Q}} = \partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$$

Analog $\overline{\mathbb{Q}^m} = \mathbb{R}^m$ usw.

(b) (X,d) metr. Raum $x_0 \in X$, $\delta > 0$

$\Rightarrow A = B_\delta(x_0)$ ist offen, denn.

Zu $x \in B_\delta(x_0)$ wähle $\varepsilon = \delta - d(x, x_0) > 0$

$$\Rightarrow \forall y \in B_\varepsilon(x) : d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0) < \varepsilon + d(x, x_0) = \delta$$

also $y \in A \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset A$

S. 10.10 (a)

$\Rightarrow x \in A^\circ$ also $A = A^\circ$ d.h. offen.

12-10 Analog: $\overline{B_\delta(x_0)}$ ist abgeschlossene Menge.

Ist X normierter Raum und $A = \{x \in X \mid d(x, x_0) = 1\}$ so gilt

$$\partial B_\delta(x) = A$$

Dies ist im allg. metr. Räumen nicht richtig. z.B.
 X mit diskreter Metrik, $x_0 \in X$

$$\Rightarrow A = \{x \in X \mid d(x, x_0) = 1\} = A \setminus \{x_0\}$$

$$\text{Aber: } \forall x \in X \text{ ist } B_{\frac{1}{2}}(x) \cap D^c = \{x\} \cap D^c$$

$$\forall D \subset X$$

$$= \begin{cases} \{x\} & \text{falls } x \in D^c \\ \emptyset & x \notin D^c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \partial D = \emptyset \text{ für jedes } D \subset X$$

$$\text{Also } \emptyset \neq X \setminus \{x_0\}$$

(c) Sei $X = \mathbb{R}^2$ mit $d(x, y) = \|x - y\|$ für
bel. Norm. und

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 < 4\} \\ \cup \{(0, 0)\}$$

Ist X normierter Raum und $A = \{x \in X \mid d(x, x_0) = 1\}$ so gilt

$$\partial B_\delta(x) = A$$

Dies ist in allg. metr. Räumen nicht richtig. z.B.
 X mit diskreter Metrik, $x_0 \in X$

$$\Rightarrow A = \{x \in X \mid d(x, x_0) = 1\} = A \setminus \{x_0\}$$

$$\text{Aber: } \forall x \in X \text{ ist } B_{\frac{1}{2}}(x) \cap D^c = \{x\} \cap D^c$$

$$\forall D \subset X$$

$$= \begin{cases} \{x\} & \text{falls } x \in D^c \\ \emptyset & x \notin D^c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \partial D = \emptyset \text{ für jedes } D \subset X$$

$$\text{Also } \emptyset \neq X \setminus \{x_0\} \quad \text{DO}$$

Ki 25.5.2022

(c) Sei $X = \mathbb{R}^2$ mit $d(x, y) = \|x - y\|$ für
bel Norm. und

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 < 4\} \\ \cup \{(0, 0)\}$$

$$\Rightarrow A^\circ = \{ (x,y): 1 < x^2 + y^2 < 4 \}$$

$$\overline{A} = \{ (x,y): 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \} \cup \{ (0,0) \}$$

$$\partial A = \{ (x,y): x^2 + y^2 \in \{1, 4\} \} \cup \{ (0,0) \}$$

$(0,0)$ ist (einzig.) isolierter Punkt von A .

S. 10.12 Im einem metrischen Raum (X, d) ist

(a) die Vereinigung $\bigcup_{j \in J} U_j$ von beliebig vielen
offenen Mengen $U_j \subset X$, $j \in J$ und
der Durchschnitt endlich vieler ($n \in \mathbb{N}$)
 $\bigcap_{h=1}^n U_h$

offener Mengen wieder offen

(b) der Durchschnitt von bel. vielen abgeschl.
Mengen und die Vereinigung von endl.
vielen abgeschlossenen Mengen wieder
abgeschlossen.

(a) Sei J bel. Indexmenge und

$\forall j \in J$ sei $U_j \subset X$ offen. Setze $A = \bigcup_j U_j$.

$$x \in A \Rightarrow \exists j \in J \text{ mit } x \in U_j$$

$$U_j \text{ offen} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \text{ mit } B_\varepsilon(x) \subset U_j \subset A,$$

also ist A offen.

Seien nun $U_1, \dots, U_m \subset X$ offen und

$$B = \bigcap_{k=1}^m U_k \text{ sowie } x \in B.$$

$$\Rightarrow \forall j = 1, \dots, m \text{ ist } x \in U_j$$

$$U_j \text{ offen} \Rightarrow \exists \varepsilon_j > 0 \text{ mit } B_{\varepsilon_j}(x) \subset U_j$$

$$\text{Setze } \varepsilon := \min \{ \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m \} > 0.$$

$$\Rightarrow \forall j \in \{1, \dots, m\}: B_\varepsilon(x) \subset U_j$$

$$\Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset \bigcap_{j=1}^m U_j = B$$

$$\Rightarrow B \text{ ist offen.}$$

□

B w Teil b)

Seien für $j \in J$ $K_j \subset X$ jeweils abgesch.

s 10.10.d
 $\Rightarrow$

$K_j^c = X \setminus K_j$ ist ~~offen~~

Teil (a)
 $\Rightarrow$

$\bigcup_{j \in J} K_j^c$ ist offen

||

$\left(\bigcap_{j \in J} K_j \right)^c$ Morgan Rgl.

10.10.d

$\Rightarrow$

$\bigcap_j K_j$ ist abgesch.

2. Auss. auch mit Morgan Rgl. $\square$

11 Konvergenz & Stetigkeit in metrischen Räumen

D. 11.1 Sei (X, d) metr. Raum und $(x_n)_n \subset X$

Folge, $a \in X$.

$(x_n)_n$ konvergiert gegen a (bzgl. d) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_0 = m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} :$$

$$\forall m \geq m_0 \text{ gilt } d(x_m, a) < \varepsilon$$

geschrieben: $x_m \rightarrow a$ für $m \rightarrow \infty$ oder $a = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m$.

LEM. 11.2 $a, x_m \in X$ metr. Raum, $m \in \mathbb{N}$.

Dann:

$$a = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_0 = m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ s.d.}$$

$$\forall m \geq m_0 \text{ gilt : } x_m \in B_\varepsilon(a)$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ liegen fast alle } x_m, m \in \mathbb{N}, \text{ im } B_\varepsilon(a)$$

$$\Leftrightarrow d(x_m, a) \text{ ist eine Nullfolge in } \mathbb{R}.$$

$$\textcircled{*} \Rightarrow \text{Für jedes } j \in \{1, \dots, d\} \text{ gilt}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (x_m)_j = a_j$$

$\uparrow$ $\nwarrow$ $\uparrow$
 m . Folg.glied j . Komponente.

$$\textcircled{*}: X = \mathbb{K}^d \text{ und } d(x, y) = \|x - y\| \text{ für eine Norm auf } \mathbb{K}^d$$

$\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}.$

(*)
 $\Leftrightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - a\|_{\infty} = 0$$

Bw: Erste 3 Äquivalenzen: Umformen!

Es gelte $\lim_n (x_n)_j = a_j$ für $j = 1, \dots, d$

$$\Leftrightarrow \max_{j=1}^d |(x_n)_j - a_j| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Leftrightarrow \|x_n - a\|_{\infty} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (xx)$$

Sei nun $\|\cdot\|$ bel. Norm auf $\mathbb{K}^d$ und
 $e_1, \dots, e_d$ kanonische Basis von $\mathbb{K}^d$. Setze

$$C := \sum_{j=1}^d \|e_j\|$$

Dann gilt für $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_d e_d \in \mathbb{K}^d$

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\| \sum \alpha_j e_j \right\| \leq \sum \|\alpha_j e_j\| = \sum |\alpha_j| \|e_j\| \\ &\leq \max_{j=1}^d |\alpha_j| \sum \|e_j\| = \|x\|_{\infty} C \end{aligned}$$

Also impliziert (xx) auch $\|x - a\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

13-6 Der Umkehrschluss gilt auch, aber mit

anderen Methoden $\square$

Analog wie im eindimensionalen Fall gelten:

LEM. 11.3 Sei (X, d) metr. R. und $(x_n) \subset X$,

$a, b \in X$. Gelten $x_n \rightarrow a$ und $x_n \rightarrow b$,

so $a = b$.

⌈ Dies rechtf. erst die Schreibweise $a = \lim x_n$. ⌋

Es gibt allgemeinere Räume (gewisse topol. R)

bei denen diese Aussage nicht gilt. ⌋

Bw: Widersp.-Ann.: $a \neq b \Rightarrow \varepsilon := \frac{1}{2}d(a, b) > 0$.

$\Rightarrow \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, s.d.

$\forall n \geq n_0(\varepsilon)$ sind $d(x_n, a) < \varepsilon$
und $d(x_n, b) < \varepsilon$

$\Rightarrow d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \text{⌋} \square$

Sei V VR über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

D. 11.4 Sei $(V, \|\cdot\|)$ normierter Raum und $M \subset V$.

M heißt beschränkt : $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ mit

$\forall x \in M: \|x\| \leq k$.

L. 11.5 Sei V VR über $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ mit Norm $\|\cdot\|$. Dann

(i) Jede konvergente Fg in $(V, \|\cdot\|)$ ist beschränkt.

(ii) Enthält V mehr als ein Element, dann auch eine unbeschränkte Menge.

Bw: (i) Analog wie für $V = \mathbb{R}$.

(ii) V enthält ein $x \neq 0$. Sei

$$M = \text{span} \{x\} = \{ \alpha x \mid \alpha \in K \}$$

Dann

$K \ni \alpha \mapsto \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ist unbeschränkte Fkt. $\square$

Im allg. metr. R. gilt (ii) nicht, z. B. kann ich auf K^n eine Metrik durch

$$d(x, y) = \frac{\|x - y\|_2}{1 + \|x - y\|_2} \in [0, 1)$$

definieren. Bz gl. dieser Metrik gilt für jedes

13-8 $x_0 \in K^n$: $B_1(x) = K^n$

aber auch:

$$d(x_k, x_0) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \Leftrightarrow \|x_k - x_0\|_2 \rightarrow 0$$

Also ist d in manchen Aspekten unterschiedlich zu $\|\cdot\|$, in $\| \cdot \|$ ähnlich.

L. 11.6 Sei V normierter Raum über $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$,
 $(x_n), (y_n)$ F.l.g. in V mit $\lim x_n = a$ und
 $\lim y_n = b$ und $(\lambda_n)_n$ F.l.g. in K mit
 $\lim \lambda_n = \lambda$. Dann:

$$(i) \quad \lim (x_n + y_n) = a + b$$

$$(ii) \quad \lim \lambda_n x_n = \lambda a \quad \text{insbesondere}$$

$$(iii) \quad \lim \|x_n\| = \|a\|$$

Bw: übg außer

□

$$(ii) \Rightarrow \lim \| \lambda_n x_n - \lambda a \| = 0$$

speziell für $\lambda_n = 1 = \lambda$

$$\lim_n \|x_n - a\| = 0$$

$$\boxed{13-9} \quad | \|x_n\| - \|a\| | < \|x_n - a\| \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

D.11.7 Sei (X, d) metrischer Raum, $(x_n)_n \subset X$.

(i) (x_n) ist Cauchy-Folge (bzgl $d(\cdot, \cdot)$)

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$\forall n, m \geq n_0$ gilt: $d(x_n, x_m) < \varepsilon$

(ii) $\exists x$ zu jeder Cauchyfolge $(x)_n$ in (X, d) ein $a \in X$ mit $d(x_n, a) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, so heißt (X, d) vollständiger metrischer

Raum

(iii) Ein vollständiger normierter Raum heißt Banachraum.

(iv) Ein vollständiger euklidischer oder unitärer Raum heißt Hilbertraum.

Im Ana I zeigten wir, dass $\mathbb{R}$ mit $d(x, y) = |x - y|$ ein vollständiger (metrischer) Raum ist.

Bsp 11.5 (für nicht vollständige Räume)

a) $\mathbb{Q}$ ist mit $d(x, y) = |x - y|$ ein metrischer Raum, aber nicht vollständig. Wir haben ja in Ana I mit dem Heron Verfahren gezeigt, dass es eine Folge $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ mit $|x_n - \sqrt{2}| \rightarrow 0$ gibt. Dies ist insbes. eine Cauchy Folge, da aber $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, konvergiert diese nicht in $\mathbb{Q}$.

b) $X = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ mit $d(x, y) = |x - y|$ ist metrischer Raum, aber nicht vollst.
 $x_n = \frac{1}{n} \in X$ konvergiert gegen $0 \in \mathbb{R} \setminus X$, ist also Cauchy-F, besitzt aber kein Limes in X .

$X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ ist dagegen vollst. metr. Raum.

c) Auf $V = C[-1, 1]$ ist durch

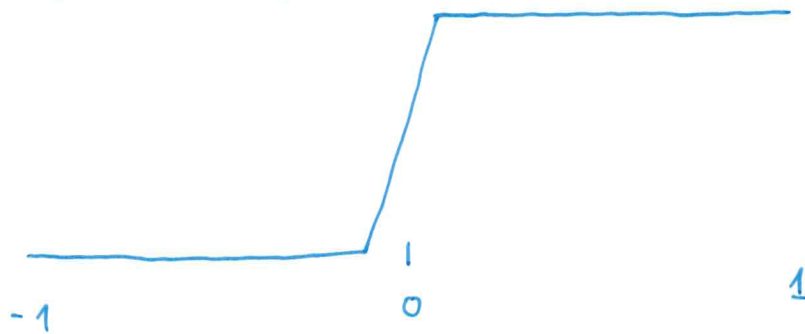
$\|f\|_1 = \int_{-1}^1 |f|$ eine Norm gegeben und

$d(f, g) = \|f - g\|_1$ damit ein Abstand.

$(V, \|\cdot\|_1)$ ist aber nicht vollständig, denn

$$f_m: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} -1 & -1 \leq x \leq -\frac{1}{m} \\ mx & -\frac{1}{m} \leq x < \frac{1}{m} \\ 1 & \frac{1}{m} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

ist in $C[-1, 1]$



und

$$\begin{aligned} \|f_m - f_n\|_1 &= \int_{-1}^1 |f_m(x) - f_n(x)| dx = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| \\ &\leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{2}{n_0} \quad \text{für } m, n \geq n_0 \end{aligned}$$

also Cauchy-F. Der Limes ist aber

$f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ↑
punktweise

$$f = \text{sgn} : x \rightarrow \begin{cases} 1 & x \in (0, 1] \\ 0 & 0 \\ -1 & [-1, 0) \end{cases}$$

also $f \notin C[-1, 1]$. kann es ein anderes
 $g \in C[-1, 1]$ geben, so dass

$$\lim_n \|f_n - g\| = 0 \quad ?$$

$$f = \text{sgn} : x \rightarrow \begin{cases} 1 & x \in (0, 1] \\ 0 & 0 \\ -1 & [-1, 0) \end{cases}$$

also $f \notin C[-1, 1]$. kann es ein anderes $g \in C[-1, 1]$ geben, so dass

$$\lim_n \|f_n - g\| = 0 \quad ?$$

1.6.22

Ang. $\exists g \in C[-1, 1]$ mit $\|f_n - g\|_1 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$

Dann $\forall \delta \in (0, 1)$:

$$n > \frac{1}{\delta}$$

$$\int_{\delta}^1 |1 - g(x)| dx \stackrel{(*)}{=} \int_{\delta}^1 |f_n(x) - g(x)| dx \leq \|f_n - g\|_1$$

g stetig $\Rightarrow |1 - g(\cdot)|$ stetig und ≥ 0

Ana I $\Rightarrow |1 - g| \equiv 0$ auf $[\delta, 1]$, d.h. $g \equiv 1$

$\delta \in (0, 1)$ bel $\Rightarrow g \equiv 1$ auf $[0, 1]$

Analog: $g \equiv -1$ auf $[-1, 0)$

$\Rightarrow g$ unstetig in 0 $\Rightarrow$ Wider sp.

L. 11.5 $\frac{1}{2}$

Sei $a < b \in \mathbb{R}$.

$C[a, b]$ ist vollständig bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.

Bw:

Sei (f_n) Folge

im $C[a, b]$. Dann besagt das Cauchy-
kriterium aus L. 5.3: mit $M = [a, b]$

(f_n) ist Cauchy-Folge bzgl. Sup-Norm

$\Leftrightarrow \exists f: M \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\|f - f_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Γ f ist dann auch stetig, also $f \in C[a, b]$

Setze $A = \{x \in X \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } x_n = x\}$.

Dann: a HP von $A \Leftrightarrow a$ HP von (x_n)

$\Rightarrow$ " a HP von $A \Rightarrow \forall h \in \mathbb{N} \exists y_h \in B_{\frac{1}{h}}(a) \cap A \setminus \{a\}$ "

zu $\varepsilon > 0$ bel. und $k_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ gilt $(y_h)_{h \geq k_0} \in B_\varepsilon(a)$,

das sind unendlich viele untersch. Punkte

$\Leftarrow$ " $\forall \varepsilon > 0$ ist $\# B_\varepsilon(a) \cap (x_n) = \infty$
 $= \# B_\varepsilon(a) \cap A$ "

$\Rightarrow \# (B_\varepsilon(a) \cap A) \setminus \{a\} = \infty$

$\Rightarrow B_\varepsilon(a) \setminus \{a\} \cap A$ nicht leer.

Folgendes ist ebenfalls eine Verallg. vom Sachverhalten in $\mathbb{R}$

D. 11.6 Sei (X, d) metr. Raum und $(x_n) \subset X$.

$a \in X$ heißt Häufungspunkt (HP) von (x_n)
: $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ ex. unendlich viele Indizes n
mit $x_n \in B_\varepsilon(a)$

S. 11.7

(X, d) metr. R., $(x_n) \subset X$, $a \in X$. Dann äquiv:

- (i) a ist HP von (x_n)
- (ii) Es ex eine Teilfolge (TF) $(x_{n_k})_k$ von $(x_n)_n$, die gegen a konvergiert.

Bw: Wk im $\mathbb{R}$, nur mit d .

S. 11.8 (Bolzano - Weierstraß in $\mathbb{R}^d$)

Eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}^d$ besitzt mindestens einen HP.

Bw:

Bez. die Folgen glieder mit

$$x^k = (x_1^k, \dots, x_d^k) \in \mathbb{R}^d$$

Folgenindex

↑
Koordinate

Dann ist $(x_1^k)_{k \in \mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{R}$ und

beschränkt da $\sup_k |x_1^k| \leq \sup_k \|x^k\| < \infty$
da beschr.

B.-W. in $\mathbb{R} \Rightarrow$ es ex Teilfolge $(k_j)_{j \in \mathbb{N}}$ und

$$a_1 \in \mathbb{R} \text{ mit } \lim_{j \rightarrow \infty} x_1^{k_j} = a_1.$$

Die TF $(x^{k_j})_j$ in $\mathbb{R}^d$ ist weiterhin beschr.

also auch die Folge $(x_2^{k_j})_j$ in $\mathbb{R}$. Wie

oben besitzt diese eine TTF $(x_2^{k_{j_m}})_m$

die gegen ein $a_2 \in \mathbb{R}$ konvergiert. Durch diesen

14-4 2. Übergang zur Teilfolge haben wir es

erreicht, dass sogar die ersten
 beiden Koordinaten der T-Folge
 konvergieren. In dem wir $(d-2)$ weitere
 Male eine TF auswählen, finden
 wir $(a_1, a_2, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ und

TF $(y^m)_m \subset (x^h)_k$ s.d.

$$\lim_m y^m_1 = a_1$$

$\vdots$

$$\lim_m y^m_d = a_d$$

L. 11.2

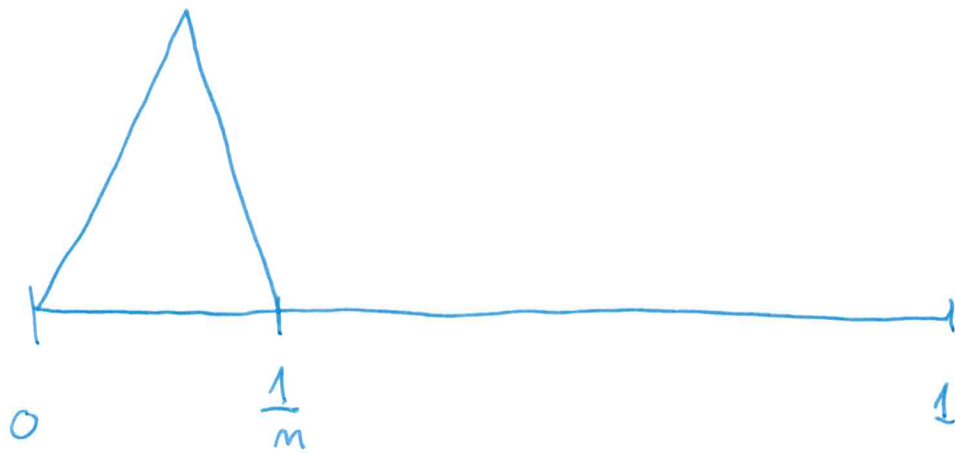
$$\Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \|y^m - a\| = 0 \quad \square$$

In ∞ -dimensionalen VR gilt der S.v. B-W.
 nicht $\otimes$

Bsp 11.8 Betrachte Folge $x_n \in [0, 1]$

mit

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx & 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 2-2nx & \frac{1}{2n} < x < \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$



$\Rightarrow f_n$ stetig, $\|f_n\|_\infty = 1$

$\Rightarrow$ Folge $(f_n)_n$ ist beschränkt.

⊗ Beobachtung

Ist $M \neq \emptyset$ bel. Menge und $f, g, f_n : M \rightarrow \mathbb{C}$
 $n \in \mathbb{N}$, mit

$f_n \rightarrow f$ punktweise und

$f_n \rightarrow g$ glm

so folgt $f = g$ auf ganz M

14-6 Bw: ① Gleichmäßige Konv. impliziert

auch punktweise, also $f_n \rightarrow g$ phtw.

② Limesfunktion ist eindeutig

$$\forall x \in M \text{ gilt } f(x) \xleftarrow{n \rightarrow \infty} f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(x)$$

f_n ist der Limes eindeutig, also $f(x) = g(x)$

$\Rightarrow f = g$ auf ganz M .

Nach früheren Überlegungen gilt $f_n \rightarrow f$
 $\equiv 0$ phtw. für $n \rightarrow \infty$.

Gibt es ein $g \in C[0,1]$ mit

$$\|g - f_n\|_{\infty} \rightarrow 0$$

so muß nach Beob. $g \equiv f \equiv 0$ sein.

$$\text{L. 11.6} \Rightarrow \|g\| = \lim \|f_n\| = 1$$

aber $\|f\| = 0$ $\Rightarrow$ Widerspruch.

Beachte Unterschied.

* Cauchy - F in $C[0,1]$ besitzt Grenzf. iff mit.

14-7 * beschränkte F $-||-$ $\parallel$ i.a. keine Grenzf.

Grundlegende Bezüge zw. Folgen und Geometrie in metr. R.

L. 11.9 Sei (X, d) metr. R. & $A \subset X, x \in X$.

(i) $x \in \partial A \Leftrightarrow$ es ex. Folgen $(x_n) \subset A, (y_n) \subset A^c$
mit $\lim x_n = x = \lim y_n$

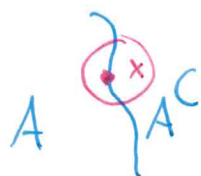
(ii) $x \in \overline{A} \Leftrightarrow$ es ex. $(x_n) \subset A$ mit $\lim x_n = x$
 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ gilt $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$

(iii) A ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$ Ist $(x_n) \subset A$ mit
 $x = \lim x_n$, dann $x \in A$.

(iv) ∂A ist abgeschlossen.

Bw (i) Sei $x \in \partial A$. Dann gilt

$$\textcircled{*} \left[\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \\ \exists \delta > 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \\ B_\delta(x) \cap A^c \neq \emptyset \end{array}$$



Insbes exist. $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap A$

$y_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap A^c$

14-8 Also $(y_n) \subset A^c, (x_n) \subset A$ und $\lim x_n = x = \lim y_n$. (A)

Umgekehrt: Gibt es Folgen wie in (Δ), dann ist
⊗ offensichtlich erfüllt.

(ii) - (iv) übg

□

k. 11.9 Sei (X, d) metr. R. und $A \subset B \subset X$. Dann

$$(i) \quad A \text{ offen} \Rightarrow A \subset B^\circ$$

$$(ii) \quad B \text{ abgeschlossen} \Rightarrow \bar{A} \subset B.$$

" A° ist die größte offene Menge, die in A enthalten ist und $\bar{A}$ die kleinste abgeschl., die A enthält. "

Bw: (i) Sei $x \in A$ offen $\stackrel{10.10}{\Rightarrow} \exists \varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset A$
 $\Rightarrow B_\varepsilon(x) \cap B^c = \emptyset \Rightarrow$ kein Randpunkt von B
 $\Rightarrow x \in B \setminus \partial B = B^\circ$

(ii) Sei $x \in \bar{A}$ und B abgeschl. Dann ex. nach
S. 11.8 $(x_n) \subset A \subset B$ mit $x = \lim x_n$

$\Rightarrow x \in B$ da B abgeschl., nach S. 11.8 □

Bsp. 11.10

(a) Durchschnitt von bel. vielen offenen Mengen ist i. a. nicht offen.

$$U_m = (-1/m, 1/m) \subset \mathbb{R} \quad \text{offen}$$

$$\bigcap_{m \in \mathbb{N}} U_m = \{0\} \quad \text{abgeschlossen, nicht offen}$$

(b) Vereinigung von bel. vielen abgeschl. Mengen ist i. a. nicht abgeschl.

$$A_m = [1/m, 1] \subset \mathbb{R} \quad \text{abgeschlossen}$$

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m = (0, 1] \quad \text{nicht abgeschlossen}$$

D. 11.11 Sei X metr. R. und $A \subset X$.

A heißt kompakt, falls jede Folge $(x_n) \subset A$ eine Teilfolge besitzt, die gegen ein $x \in A$ konvergiert.

B.-W. umformuliert:

S. v. Bolzano - Weierstraß 11.12

Jedes beschränkte & abgeschlossene $M \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt.

Bw: Sei $(x_n) \subset M \Rightarrow (x_n)$ beschränkt

B.W.

$\Rightarrow$ besitzt TF $(y_k) \subset (x_n)$ mit $\lim y_k = a \in \mathbb{R}^n$.

Da $(y_k) \subset M$ und M abgeschl. $\Rightarrow a \in M$. $\square$

Allg. gilt die Umkehrung

S. 11.13 Sei $(V, \|\cdot\|)$ normierter Raum & $A \subset V$ komp.

$\Rightarrow A$ ist abgeschlossen und beschr.

Bw: Sei $(x_n) \subset A$ konvergent gegen $x \in V$.

A komp. $\Rightarrow \exists (y_k) \subset (x_n)$ mit $\lim y_k = y \in A$

Eindert. des Limes $\Rightarrow x = y \in A$. Also A abgeschl.

nach L.11.9.

Wäre A unbeschränkt, gäbe es $\forall m \in \mathbb{N}$ ein

$x_m \in A$ mit $\|x_m\| > m$. Nach Kompaktheitsvor.

14-11 ex. $(y_k) \subset (x_n)$ konvergent gegen $y \in A$.

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad \underline{\|y_k - y\| < 1} \quad \forall k \geq N$$

$$\Rightarrow \|y_k\| < \|y\| + 1$$

$\Rightarrow$ Widerspruch zu $\|y_k\| \rightarrow \infty$. $\square$

Bsp 11.14

(i) für kompakte Mengen:

abg. Intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$

abg. Quader $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d] \subset \mathbb{R}^d$

abg. Kugeln $\overline{B_R(x_0)} \subset \mathbb{R}^d$ oder $\mathbb{C}^d$

für $R > 0$ und $x_0 \in \mathbb{K}^d$.

(ii) In bel. norm. Räumen ist

abgesch. & beschr. $\Rightarrow$ kompakt FALSCH!

Bsp. 11.8 liefert eine Flg. $(f_n) \subset \underline{\overline{B_1(0)}}$

$\subset C[0, 1]$, die keine konv. TF besitzt. abg. + beschr.

aber nicht kompakt.

Allg: Ist V VR mit $\overline{B_1(0)}$ kompakt $\Rightarrow \dim V < \infty$

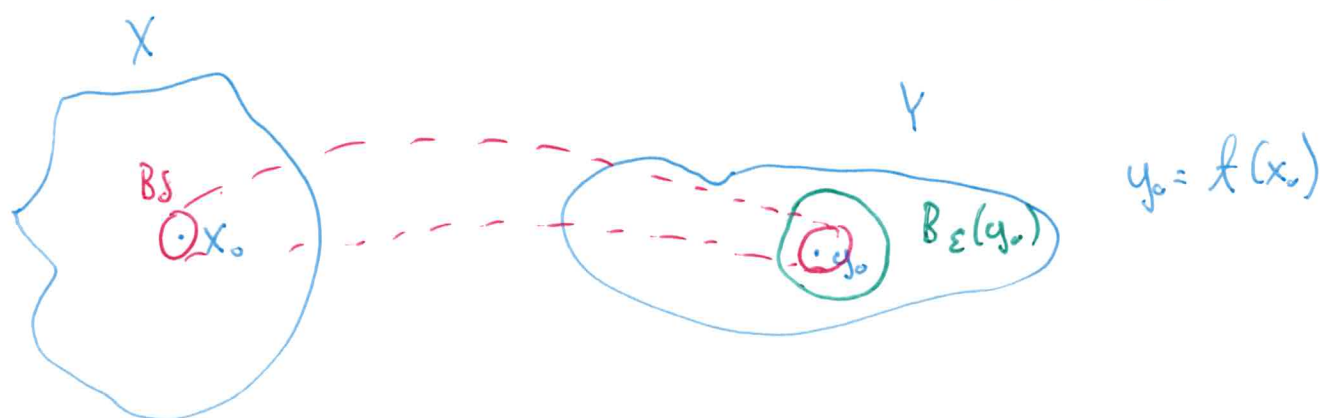
D. 11. 20

Seien (X, d) , (Y, g) metrische Räume

und $f: X \rightarrow Y$, $x_0 \in X$. Dann heißt

f stetig in x_0 : $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ mit

$g(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ für alle $x \in X$ mit
 $d(x, x_0) < \delta$



f stetig auf X : $\Leftrightarrow f$ stetig in x für alle $x \in X$

f gleichm./uniform stetig auf X : $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ s.d. für alle $x_1, x_2 \in X$
mit $d(x_1, x_2) < \delta$ gilt $g(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$

Offensichtlich:

x_0 isolierter Punkt von X

$\Rightarrow$ für jedes (Y, g) und jedes $f: X \rightarrow Y$ ist

f stetig in x_0 .

Äquivalente Umformulierungen wie in $\mathbb{R}$.

L. 11.21 Seien (X, d) , (Y, ρ) metrische R., $x_0 \in X$,
und $f: X \rightarrow Y$. Dann s. äquivalent

(i) f stetig in x_0 .

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ mit $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$

(iii) Für jede F.lg. $(x_n) \subset X$ mit $x_0 = \lim x_n$

gilt $\lim_n f(x_n) = f(x_0)$

Ähnlich wie bei $\mathbb{R}/\mathbb{C}$ kann man aus stetigen
Fkt neue konstruieren

S. 11.22

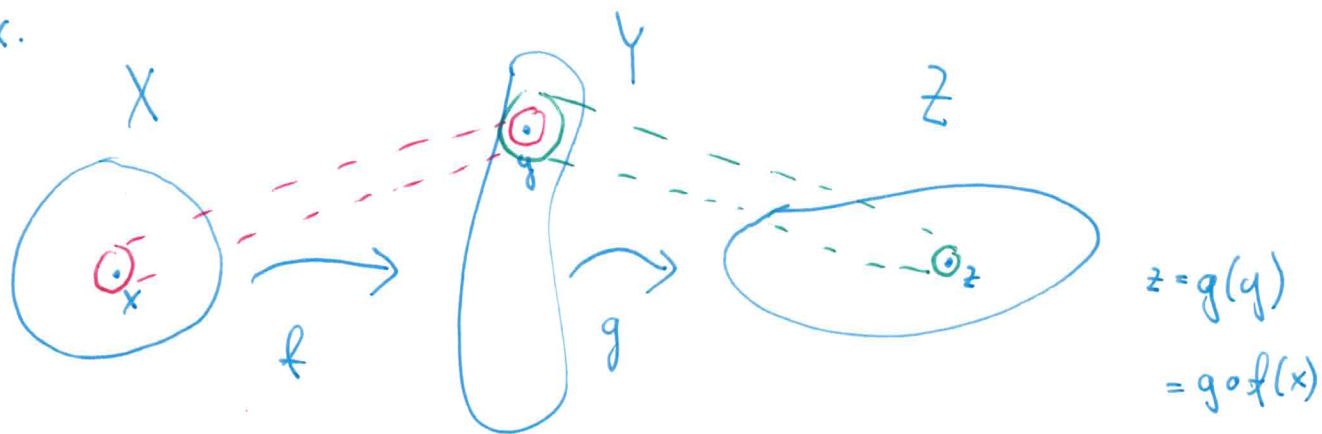
$\lambda \in \mathbb{C}$

(a) Sei X metr. R., $x_0 \in X$ und $f, g: X \rightarrow \mathbb{C}$
stetig in x_0 . Dann sind auch

$f + g$, $\lambda \cdot f$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ (sofern $g(x_0) \neq 0$)

stetig in x_0 .

(b) Seien X, Y, Z metrische Räume, $x \in X$,
 $f: X \rightarrow Y$ stetig in x , $y := f(x)$ und $g: Y \rightarrow Z$
 stetig in y . Dann ist auch $g \circ f: X \rightarrow Z$ stet.
 in x .



S. 11.23 Sei X metr. Raum und $f: X \rightarrow \mathbb{C}^m$
 eine Abb. mit Koord. - Fkt. $f_1, \dots, f_m: X \rightarrow \mathbb{C}$,
 $x \in X$. Dann:

f stetig in $x \quad :\Leftrightarrow$

alle $f_1, \dots, f_m$ stetig in x

Bw: Wende L. 11.2 an. $\square$

Bsp. 11.24 (a) Sei $L: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare Abb.

$\Rightarrow$ Bzgl. Standardbasen in $\mathbb{R}^d$ & $\mathbb{R}^m$ gibt es endl.

$(m \times d)$ Matrix $A = (a_{jk})$ mit $L(x) = Ax$ für $x \in \mathbb{R}^d$.

$$\Rightarrow \|Ax\|_2^2 = \sum_{j=1}^m |(Ax)_j|^2 = \sum_{j=1}^m \left| \sum_{k=1}^d a_{jk} x_k \right|^2$$

Cauchy-Schwarz

$$\leq \left(\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^d |a_{jk}|^2 \right) \cdot \underbrace{\left(\sum_{k=1}^d |x_k|^2 \right)}_{= \|x\|_2^2}$$

$$\Rightarrow \|Ax\|_2 \leq \left(\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^d |a_{jk}|^2 \right)^{1/2} \cdot \|x\|_2$$

Linearität $A(x-y) = Ax - Ay$

$$\Rightarrow \|Ax - Ay\|_2 = \|A(x-y)\|_2 \leq \left[\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^d |a_{jk}|^2 \right]^{1/2} \|x-y\|_2$$

$\Rightarrow T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist sogar Lipschitz-stetig
insbes. uniform stetig, insbes. stetig auf $\mathbb{R}^d$.

Spezialfall $j \in \{1, \dots, d\}$, $\pi_j: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

mit $\pi_j(x_1, \dots, x_d) = x_j$ ist linear, also

glm stetig auf $\mathbb{R}^d$.

(b) Sei $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^m a_{k_1 \dots k_n} x_1^{k_1} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n}$$

ein Polynom in n Variablen. Diese Fkt. ist stetig, da ich sie aus elementaren stet.

Fkt. zusammenbauen kann. Denn es sind

stetig: Betrachte nun Spezialfall $(x,y) \mapsto \sum_{j,k=1}^m b_{j,k} x^k y^j$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^k$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y \mapsto y^j$$

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto (f(x), g(y)) \text{ vgl. 11.23}$$

$$M: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto (x \cdot y, 0)$$

$$(f(x), g(y)) \mapsto (f(x) \cdot g(y) = x^k \cdot y^j, 0)$$

$$\pi_1: (u,v) \mapsto u$$

Linear kombination stetiger Fkt. auch stet.

Ebenso ist $P: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$

$$(z_1, \dots, z_n) = \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^m a_{k_1 \dots k_n} z_1^{k_1} \cdot \dots \cdot z_n^{k_n}$$

(c)

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto$$

$$\sin \left[e^{xy^2} + \sqrt{y^2 + z^4} - \arctan \cos \frac{xyz}{1+z^2} \right]$$

ist stetig, da folgende Abb stetig sind.

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto \left(e^{xy^2}, \sqrt{y^2 + z^4}, \arctan \cos \frac{xyz}{1+z^2} \right)$$

$$\psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v, w) \mapsto (u+v+w, 0, 0)$$

$$\pi_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{und } f = \sin \circ \pi_1 \circ \psi \circ \varphi$$

(d) Ähnlich zeigt man, dass

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

stetig auf $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ist.

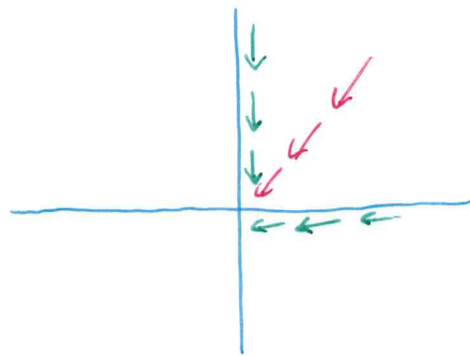
Wie verhält sich f in (der Nähe von) $(0, 0)$?

Sind (x_n) und (y_n) Nullfolgen in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, gilt

$$\lim_n f(x_n, 0) = \lim_n \frac{0}{x_n^2} = 0 = \lim_n f(0, y_n) = f(0, 0).$$

Also sind die Einschränkungen von f auf die Koordinatenachsen stetig. Solche f nennt man partiell stetig.

Allerdings gilt $f(x_n, x_n) = \frac{x_n^2}{x_n^2 + x_n^2} = \frac{1}{2} \neq 0$, also ist f nicht stetig in $(0,0)$



übrigens $f(x_n, -x_n) = \frac{-x_n^2}{x_n^2 + x_n^2} = -\frac{1}{2}$

(e) Abbildung: $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x \cdot f(x)$

$$= \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wie oben ist g stet. auf $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
 ? Stetig in $(0,0)$?

15-7 $(x,y) \neq (0,0) \Rightarrow |g(x,y)| \leq |y|$ denn

$$|x^2| \leq |x^2 + y^2|$$

$$\Rightarrow |x^2 y| \leq |x^2 + y^2| \cdot |y| \quad \checkmark$$

Für jede Nullfolge $((x_n, y_n))_n \subset X$ gilt

$$\lim_n |g(x_n, y_n)| \leq \lim_n |y_n| = 0$$

$\Rightarrow g$ stetig in 0 .

(A) Sei $(V, \|\cdot\|)$ normierter Raum und

$f(x) = \|x\|$. Dann ist f Lipschitz,

insbes. glm/uniform stetig, da

$$|f(x) - f(y)| = |\|x\| - \|y\|| \stackrel{2. \Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \|x - y\|.$$

S. 11.25 Sind X, Y metrische R. und $f: X \rightarrow Y$,
so sind äquivalent:

(a) f ist stetig auf X

(b) $f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)}$ für jedes $E \subset X$

(c) $B = \overline{B} \subset Y \Rightarrow A := f^{-1}(B)$ ist abges. in X

15-8 (d) $V = V^\circ \subset Y \Rightarrow U := f^{-1}(V)$ ist offen in X .

k. 11.26

Sei X ein metr. Raum und

$f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Dann:

f ist stetig

$\Leftrightarrow \forall c \in \mathbb{R}$ ist $\{x \mid f(x) < c\}$ offen in X

$\Leftrightarrow \forall c \in \mathbb{R}$ $\quad \quad \quad >$

$\Leftrightarrow \forall c \in \mathbb{R}$ ist $\{x \mid f(x) \leq c\}$ abgesc. in X
 $\quad \quad \quad \geq c$

Insbesondere

f stetig $\Rightarrow$ alle Niveaumengen $\{x \in X \mid f(x) = c\}$
sind abgeschlossen.

Skizze

Bw. Die Mengen $(-\infty, c)$ und (c, ∞) sind
offen

$[-\infty, c]$, $[c, \infty)$ sind abgeschl.

in $\mathbb{R}$. Ist also f stetig, so sind nach

S. 11.25 für alle $c \in \mathbb{R}$

15-9 $\{x \in X \mid f(x) < c\} = f^{-1}((-\infty, c))$ und

$$\{x \in X \mid f(x) > c\} = f^{-1}((c, \infty)) \text{ offen}$$

und

$$\{x \in X \mid f(x) \leq c\} = f^{-1}((-\infty, c]) \text{ und}$$

$$\{x \mid f \geq c\} = f^{-1}([c, +\infty)) \text{ abgeschl.}$$

Andere Richtung ist aufwändiger. $\square$

Nun eine Aussage zu Bildern $f(A)$, nicht Urbildern $f^{-1}(A)$.

S. 11.27 Sind X, Y metr. Räume, $f: X \rightarrow Y$ stetig und $A \subset X$ kompakt. Dann ist $f(A)$ kompakt in Y .

Bw: Sei $(y_n) \subset f(A)$. Dann ex $(a_n) \subset A$ mit $f(a_n) = y_n$.

A kompakt $\Rightarrow \exists$ TF $(a_{n_k})_k \subset (a_n)$ und $a \in A$ mit $\lim_k a_{n_k} = a$.

15-10 f stetig $\Rightarrow \lim_k f(a_{n_k}) = f(a) \in f(A)$.

Also besitzt (y_n) TF (y_{n_k}) , die gegen
 $f(a) \in f(A)$ konverg. $\checkmark$ $\square$

Wichtiger Spezialfall:

K. 11.28

X metr. Raum, $A \subset X$ kompakt, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ stet.

Dann ex. $x_-, x_+ \in A$ mit

$$\forall x \in A: f(x_-) \leq f(x) \leq f(x_+),$$

$$\text{d.h.} \quad \max_{x \in A} f(x) = f(x_+)$$

$$\min_{x \in A} f(x) = f(x_-)$$

" f nimmt sein Min & Max auf jeder
kompakten Teilmenge an".

Bw:

S. 11.27 $\Rightarrow f(A)$ ist kompakt in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(A)$ besitzt Min & Max. $\square$

D. 11.29 Seien X, Y metr. R., $x_0 \in X$

ein HP von X und $f: X \setminus \{x_0\} \rightarrow Y$ eine Abb.

Gibt es ein $c \in Y$ mit:

Für jede Flg $(x_n) \subset X \setminus \{x_0\}$ mit $\lim x_n = x_0$

gilt $\lim f(x_n) = c$, so hat f in x_0 den

Grenzwert c , geschrieben:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c \quad \text{oder} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} c$$

Umformulierung: Ist die Fortsetzung

$$F : X \rightarrow Y, \quad f(x) = \begin{cases} c & \text{für } x = x_0 \\ f(x) & \text{sonst} \end{cases}$$

stetig in x_0 , so hat f Limes c in x_0 .

Ist x_0 kein HP von X , so ist jede

Fortsetzung F von f stetig in x_0 .

• x_0



Ähnlich wie in $\mathbb{R}$ gilt:

S. 11.30 Seien X, Y metr. R., X kompakt
und $f: X \rightarrow Y$ stetig. Dann

(a) ist f sogar glm stetig

(b) ist $f^{-1}: Y \rightarrow X$ stetig, falls
 f bijektiv ist.

Bw. (a) wie in $\mathbb{R}$.

(b) Sei $y_0 \in Y$ bel. Beh: f^{-1} ist stet in y_0 .

Bw Sei $(y_n) \subset Y$ mit $y_n \rightarrow y_0$.

Setze $x_n := f^{-1}(y_n)$ (wohl def., da f bij)

$$x_0 := f^{-1}(y_0) \in X$$

X kompakt $\Rightarrow \exists \text{ TF } (x_{n_k}) \subset (x_n) \subset X$

mit $x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \tilde{x}$

$$f \text{ stet} \Rightarrow f(\tilde{x}) = \lim_k f(x_{n_k}) = \lim_k y_{n_k} = y_0 = f(x_0)$$

$$\& \text{inj} \Rightarrow \overline{X} = X_0$$

Konvergiert die ganze Folge $(x_n)_n$ gegen x_0 ?

Falls nicht, so ex. $\varepsilon > 0$ und eine (andere) TF

$(x_{n_j})_j \subset (x_n)$ mit $d(x_{n_j}, x_0) > \varepsilon$ für $j \in \mathbb{N}$.

X kompakt $\Rightarrow \exists$ TTF $(x_{n_{j_\ell}})_\ell \subset (x_{n_j})_j$, die

gegen ein $x' \in X$ konvergiert. Wie oben

folgt $x' = x_0$, im Widerspruch zu

$$d(x_{n_{j_\ell}}, x_0) > \varepsilon \quad \forall \ell \in \mathbb{N}$$

Also doch $x_n \rightarrow x_0$ für $n \rightarrow \infty$ $\square$

D. 11.31 (a) Sei X metr. R. und $I \subset \mathbb{R}$ Intervall.

Eine stetige Abb. $\gamma: I \rightarrow X$ heißt Weg,

die Menge $\gamma(I) \subset X$ Spur / Bahn von γ .

(b) Ein metr. R. X heißt wegzusammen-

hängend, falls es zu bel $x, y \in X$ einen

16-2 Weg: $[0, 1] \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$

gibt. Dann heißen x Anfangspkt von γ
 y End

(c) $U \subset X$ heißt Gebiet, falls U offen & wegzusch. ist.

(d) Sei V VR über $\mathbb{R}$ und $M \subset V$.

M konvex $:\Leftrightarrow \forall x, y \in M$ und $t \in [0, 1]$ gilt
$$tx + (1-t)y \in M$$

Bsp. 11.32

(a) Jede konvexe Menge $M \subset V = X$ ist wegzuschgd.

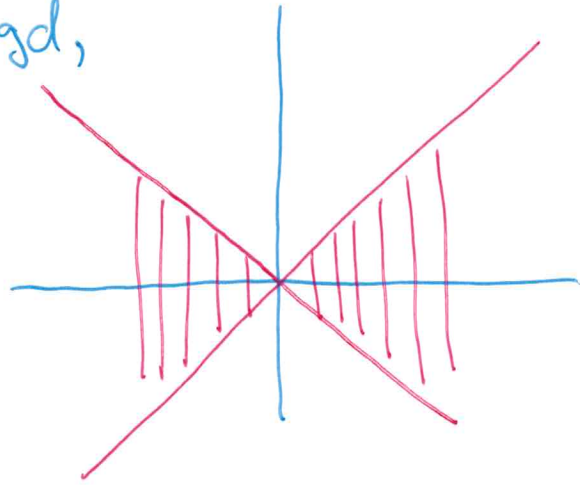
(b) Jeder offene Ball $B_\varepsilon(x_0) \subset V$ ist wegzusch, $\varepsilon > 0$, in einem normierten Raum $(V, \|\cdot\|)$.

(c) Jeder UVR von V ist konvex.

(d) ^{Für} $M \subset \mathbb{R}$: M wegzuschgd. $\Leftrightarrow M$ ist Intervall
 $\Leftrightarrow M$ ist konvex.

(e) $A = \{ (x,y) \mid |y| < |x| \} \subset \mathbb{R}^2$ ist
nicht wegzus hgd,

denn $(0,0) \notin A$.

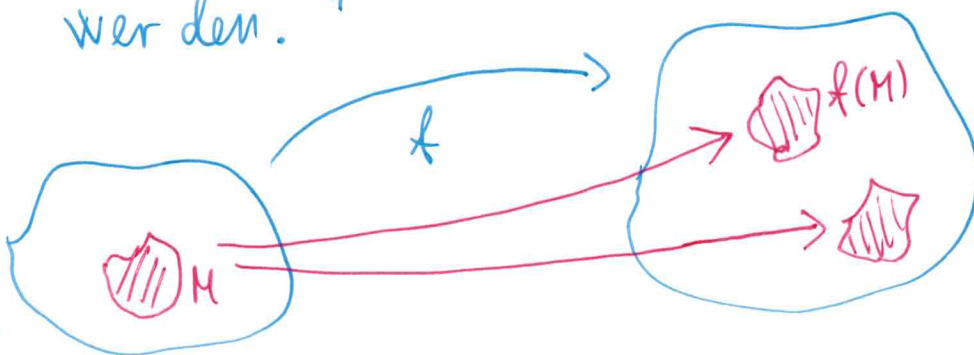


S. 11.33 Seien X, Y metr. Räume, $f: X \rightarrow Y$
stetig und $M \subset X$ wegzusammenhängend

(a) $f(M) \subset Y$ ist —||—

(b) Ist insbes $Y = \mathbb{R}$, so ist $f(M) \subset \mathbb{R}$
ein Intervall. (Zwischenwertsatz)

„Eine wegzusammenhängende Menge kann
durch stetiges f nicht auseinandergerissen
werden.“



ist unmögl.

Bw: Seien $y, y' \in f(M)$ bel.

$$\Rightarrow \exists x, x' \in M \text{ mit } y = f(x) \\ y' = f(x')$$

M wgzsh.

$$\Rightarrow \exists \gamma: [0,1] \rightarrow M \text{ mit } \gamma(0) = x \\ \gamma(1) = x'$$

$$\Rightarrow \sigma = f \circ \gamma: [0,1] \rightarrow f(x) \subset Y \text{ ist eben-}$$

$$\text{falls Weg mit } \sigma(0) = f(\gamma(0)) = y$$

$$\sigma(1) = f(\gamma(1)) = y'$$

$$\Rightarrow f(M) \text{ wgzshd. } \square$$

12 Partielle Differenzierbarkeit von

Funktionen mehrerer Variablen

D. 12.1 Sei $D \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ und

$a = (a_1, \dots, a_d) \in D$. Setze dann für $k \in \{1, \dots, d\}$

f ist partiell differenzierbar in a nach

(Variablen) x_k : $\Leftrightarrow$

$$\text{Limes } (D_h f)(a) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h} \left[f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + h, a_{k+1}, \dots, a_d) - f(a) \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h} [f(a + h e_k) - f(a)] \text{ existiert}$$

Dann heißt $(D_h f)(a) \in \mathbb{R}^m$ partielle

Ableitung von f in a nach x_k und

wird auch mit

$$D_h f(a), \frac{\partial}{\partial x_k} f(a), (\partial_k f)(a), (\partial_{x_k} f)(a)$$

bezeichnet.

f partiell diffbar nach x_k (in D) : $\Leftrightarrow$

$\forall a \in D$ ist f part diffb. in a nach x_k

⊗

f partiell diffbar (in D) : $\Leftrightarrow$

$\forall k \in \{1, \dots, d\}, \forall a \in D$ ist f part. diffb. in a
nach x_k

⊗ In diesem Fall definiert $a \mapsto (D_h f)(a)$
eine Abb. $f_{x_h} := (D_h f) : D \rightarrow \mathbb{R}^m$,

genannt partielle Ableitung von f nach x_h .

Beachte: „Partielle Abl.“ kann einen Vektor
 $(D_h f)(a)$ meinen oder eine Abb. $(D_h f)$.

Bsp: Für $d=2$ und $m=1$ haben wir

$$\begin{aligned} \partial_x f(x_0, y_0) &:= D_1 f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_y f(x_0, y_0) &:= (D_2 f)(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} \end{aligned}$$

Man erkennt daran die Idee hinter dem partiellen Ableiten: Betrachte die x_k -Koordinate als variabel, alle anderen $(d-1)$ Koordinaten als „eingefroren“ und wende Defn. aus Ama I an.

Bsp. 12.2

$$(a) \quad f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto x^2 \sin(yz)$$

$$\Rightarrow D_1 f(x, y, z) = 2x \sin(yz)$$

$$D_y f(x, y, z) = x^2 \cos(yz) \cdot z = D_2 f(x, y, z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = x^2 \cos(yz) \cdot y$$

$$(b) \quad r: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad x = (x_1, \dots, x_d) \mapsto \|x\|_2 = \left[\sum_{i=1}^d x_i^2 \right]^{1/2}$$

$$x \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x_k}(x) = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^d x_i^2 \right]^{-1/2} \cdot 2x_k \quad \text{für } k \in \{1, \dots, d\}$$

$$= \frac{x_k}{\|x\|_2} = \frac{x_k}{r(x)}$$

die anderen x_i
sind konstanten bzgl. x_k .

(c) Sei $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar und r wie in (b). Dann heißt die Fkt

$$g = f \circ r : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{rotationssymmetris.}$$

$$x \neq 0, h \in \{1, \dots, d\} \Rightarrow (D_h g)(x) = \frac{\partial g}{\partial x_h}(x)$$

$$\stackrel{(\circledast)}{=} f'(r(x)) \frac{\partial r}{\partial x_h}(x) = f'(r(x)) \frac{x_h}{r(x)}$$

Hier haben wir die Kettenregel verwendet.

$$= x_h \frac{f'(r(x))}{r(x)}$$

(Bw. übg.) Formale Argumentation:

$$\frac{\partial g}{\partial x_h}(x) \stackrel{\text{erweit.}}{=} \frac{\partial (f \circ r)}{\partial r(x)} \frac{\partial r(x)}{\partial x_h}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{r=\|x\|} \frac{x_h}{r(x)}$$

$$= f'(r(x)) \frac{x_h}{r(x)}$$

16-9] Bw. im allg. Kontext später

Partielle Diffbarkeit ist keine starke Eig.

Insbes: part. diffb $\nRightarrow$ stetig

Bsp. 12.3 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

§ 11 $\Rightarrow$ f nicht stetig in $(0,0)$

Aber: f ist partiell diffbar auf $\mathbb{R}^2$.

Für $(x,y) \neq (0,0)$ ergibt sich

$$\partial_x f(x,y) = \frac{y(x^2+y^2) - xy(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\partial_y f(x,y) = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

Da für alle $x,y \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x,0) = 0 = f(0,y) \quad \text{haben wir}$$

entlang der beiden Koordinatenachsen
eine konstante Fkt. Damit sind in $(0,0)$
beide part. Abl. Null:

$$\partial_x f(0,0) = 0 = \partial_y f(0,0)$$

$\Rightarrow f$ part. db. auf $\mathbb{R}^2$ $\checkmark$

Beachte: für $x \neq 0 \neq y$

$$f_x(0,y) = \frac{y^3}{y^4} = \frac{1}{y}$$

beides unbeschr.
Fkt. auf jedem

$$f_y(x,0) = \frac{x^3}{x^4} = \frac{1}{x}$$

$B_\varepsilon(0,0) \setminus \{(0,0)\}$

$\varepsilon > 0$.

Tatsächlich ist dies das einzige was schief
gehen kann!

S. 12.4 Seien $D \subset \mathbb{R}^d$ offen,

$f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ partiell diffbar und für

jedes $k \in \{1, \dots, d\}$ die part. Abl.

16-11 $\partial_k f := D_k f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ beschränkt, d.h.

die Menge $f_k(D) \subset \mathbb{R}^m$ beschränkt.

Dann ist f stetig auf D .

Bw: Nach § 11 gilt

$$f = (f_1, \dots, f_m): D \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ stetig}$$

$\Leftrightarrow$ jede Koordinate f_k nicht zu verwechseln mit part. Abl. $f_k: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Also reicht es den Fall $m=1$ zu betrachten.

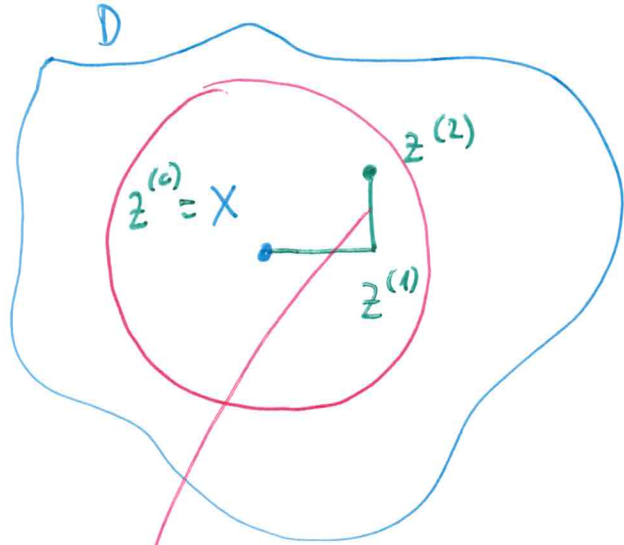
D offen $\Rightarrow$ Zu jedem $x \in D$ ex. $\delta > 0$ mit $B_{\sqrt{d}}(x) \subset D$.

$$\Rightarrow \{y \in \mathbb{R}^d : \|x - y\|_{\infty} < \delta\}$$

$$\textcircled{C} \{y : \|x - y\|_2 < \sqrt{d} \delta\} \subset D$$

Sei nun $h \in \mathbb{R}^d$ mit $\|h\|_{\infty} < \delta$. Setze

$$\text{für } l = 0, 1, 2, \dots, d: z^{(l)} := \sum_{j=1}^l h_j e_j + x$$



$$\Rightarrow z^{(0)} = x$$

$$z^{(d)} = x + h$$

$z^{(l)}$ und $z^{(l-1)}$ unterscheiden sich nur in l. Koordinate, liegen alle in $B_{\sqrt{d}}(x)$.

$$\parallel [z^{(1)}, z^{(2)}]$$

Insb.:

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{l=1}^d [f(z^{(l)}) - f(z^{(l-1)})]$$

nach Mittelwerts. d. Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

$\exists \xi^{(l)} \in [z^{(l-1)}, z^{(l)}], l \in \{1, \dots, d\}$, s.d.

$$= \sum_{l=1}^d (D_l f)(\xi^{(l)}) \quad (h_l) \leq \boxed{\max_{l=1}^d |h_l| = \|h\|_{\infty}}$$

Nach Beschränktkeitsvoraus. $c := \sum_{l=1}^d \|D_l f\|_{\infty} < \infty$

$$\Rightarrow |f(x+h) - f(x)| \leq c \|h\|_{\infty} \leq c \|h\|_2$$

Also ist f sogar Lipschitz-stetig auf D $\square$

Dennheit vom letzten Mal:

Sei $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ metrischer Raum und $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Dann ist auch $(X, |\cdot|)$ metr. Raum.

$$\begin{aligned} \text{Ball } B_2(1) &= \{x \in X : |x-1| < 2\} \\ &= (-1, 0) \cup (0, 3) \end{aligned}$$

ist nicht wegzsh.

Bsp. 11.32 (b) korrigiert:

Jeder offene Ball $B_\varepsilon(x_0) \subset V$ in einem normierten Raum $(V, \|\cdot\|)$ ist wegzsh., da konvex.

13 Parameterabhängige Integrale

Notation 13.1 Seien X, Y metrische Räume und $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}^m$. Für ein bel., aber festes $x \in X$ setzen wir $f_x(y)$

$f_x(y) = f(x, y)$. Damit haben wir eine

Funktion $f_x : Y \rightarrow \mathbb{R}^m$ definiert. Ebenso setzen wir für bel. aber festes $y \in Y$ $f_y(x) = f(x, y)$ und definieren damit Abb.

$$f_y : X \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Häufig sind $X \subset \mathbb{R}^d$, $Y \subset \mathbb{R}^M$. Dies begegnet uns schon im Kontext der

a) partiellen Stetigkeit:

Für die Fkt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

haben wir gesehen, dass $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$f_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $f_y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind,

aber $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ nicht.

b) partielle Ableitung:

Ist $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ gegeben und eine

Koordinate $k \in \{1, 2, \dots, d\}$ ausgewählt,

kann ich $\mathbb{R}^d = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \underset{\substack{\uparrow \\ x_k}}{\mathbb{R}} \times \dots \times \mathbb{R} = X \times Y$

schreiben mit $X = \mathbb{R}^{d-1}$ und $Y = \mathbb{R}$. Bezeichne

$$\hat{x}_k = (x_1, \dots, x_{k-1}, \overset{\substack{\uparrow \\ \text{koord. } x_k \text{ fehlt}}}{x_{k+1}}, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^{d-1} = X$$

Also ist $f_{\hat{x}_k}(x_k) = f(x_1, \dots, x_d)$

eine Abb $f_{\hat{x}_k} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, wie oben

definiert. Die k -te partielle Ableitung

$(D_k f)(x)$ ist dann gerade

$$f'_{\hat{x}_k}(x_k) = \frac{\partial}{\partial x_k} f_{\hat{x}_k}(x_k) = \frac{\partial}{\partial x_k} f(x_1, \dots, x_d)$$

eine eindimensionale Abl. (nach x_k) bei

eingefrorenem $\hat{x}_k$.

(c) Neu: Parameter abhängige Integr.

Idee: Über eine ausgezeichnete Variable wird integriert, die anderen werden eingefroren und als Parameter betrachtet.

17-3 Für $a < b \in \mathbb{R}$ sei $Y = [a, b]$ und

X metrischer Raum. Sei $f: X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$
 $\in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ derart, dass für jedes $x \in X$ die
 partielle Abbildung $f_x: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$
 Riemann-integrierbar (z. B. stetig) ist. Dann
 ist die Funt.

(PAI) $F: X \rightarrow \mathbb{K}, F(x) = \int_a^b f_x(y) dy = \int_a^b f(x, y) dy$
 wohldefiniert.

Um diese zu studieren brauchen wir Vorbereitung.

L. 13.2 Ist Y kompakter metrischer Raum,
 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$
 so ist $C(Y, \mathbb{K}) = \{f: Y \rightarrow \mathbb{K} \text{ stetig}\}$ ein
 normierter Raum bzgl.

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{y \in Y} |f(y)|$$

Bw: Schon bekannt: $C(Y)$ ist VR bzgl.

17-4 $(f+g)(y) = f(y) + g(y), (\lambda f)(y) = \lambda(f(y)).$

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so ist $\sup_{y \in Y} |f(y)| = \max_{y \in Y} |f(y)|$

$\in \mathbb{R}$ für jedes $f \in C(Y)$, da Y kompakt.

(K 11.28 $\Rightarrow$ min und max werden angenommen.)

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so betrachte

$$f_1 : Y \rightarrow \mathbb{R} \quad f_1 = \operatorname{Re} f$$

$$f_2 : Y \rightarrow \mathbb{R} \quad f_2 = \operatorname{Im} f.$$

Wende obiges an auf f_1 & f_2 und schliesse:

$$\sup_{y \in Y} |f(y)| \leq \sup_{y \in Y} |f_1(y)| + \sup_{y \in Y} |f_2(y)| < \infty$$

Fazit: $\forall f \in C(Y, \mathbb{K})$ ist $\|f\|_\infty$ endlich.

Dass $\|\cdot\|_\infty$ die 3 Bed. für Norm erfüllt, rechnet man leicht nach. $\square$

S. 13.3 Seien X, Y metrische Räume,

Y kompakt, $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$ stetig

(simultan, nicht nur partiell) und $x_0 \in X$.

$\boxed{17}$
 $\boxed{5}$ Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$

mit:

umformuliert partielle Stetigkeit

$$\forall x \in B_\delta(x_0), y \in Y \text{ gilt } |f(x, y) - f(x_0, y)| < \varepsilon$$

Häufig sind $X \subset \mathbb{R}^d, Y \subset \mathbb{R}^m$ mit vom $\|\cdot\|_2$ induziertem Abstand.

Bw: Widerspruch ann:

Ich finde ein $\varepsilon_0 > 0$ und zu jedem $n \in \mathbb{N}$

Punkte $x_n \in X, y_n \in Y$ so, dass

$$\circ \quad x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x_0) \quad \text{aber} \quad |f(x_n, y_n) - f(x_0, y_n)| \geq \varepsilon_0$$

komme immer näher zu x_0 aber es hilft nicht

⊗ f ensicht lich impliziert ⊗: $x_n \rightarrow x_0$.

Da Y kompakt, ex TF $(y_{n_k})_k \subset (y_n)$ mit

$y_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y_0$ für ein $y_0 \in Y$. Da f

(ins besondere) in (x_0, y_0) stetig ist folgen:

$$f(x_0, y_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x_0, y_0) \quad \text{partielle Stet.}$$

$$17-6 \quad f(x_{n_k}, y_{n_k}) \longrightarrow f(x_0, y_0) \quad \text{echte Stet.}$$

$$\Rightarrow |f(x_{n_k}, y_{n_k}) - f(x_0, y_{n_k})|$$

$$\leq |f(x_{n_k}, y_{n_k}) - f(x_0, y_0)| + |f(x_0, y_0) - f(x_0, y_{n_k})|$$

$$\rightarrow 0 \quad \text{da beides Nullfolgen.}$$

$\Rightarrow$ $\downarrow$ zur Widerspruchsannahme. $\square$

(Mit fast demselben Bw. folgt diese) Umformulier.

S. 13.4 Seien X, Y metr. R., Y kompakt

$f: X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$ stetig. Dann ist die Abb.

$$\Phi: X \rightarrow C(Y)$$

$$x \mapsto f_x$$

stetig (bzgl. der $\|\cdot\|_\infty$ -Norm auf $C(Y)$).

Anwendung:

k. 13.5 Sei X metr. Raum und $f:$

$X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ stetig. Dann ist $F: X \rightarrow \mathbb{K}$

aus (PAI) stetig.

17-7 Bw: Sei $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$.

13.3 $\Rightarrow \exists \delta > 0$ s.d. für alle $B_\delta(x_0)$ und $y \in [a, b]$ gilt $|f(x, y) - f(x_0, y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$

Für $x \in B_\delta(x_0)$ folgt:

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0)| &= \left| \int_a^b [f(x, y) - f(x_0, y)] dy \right| \\ &\leq \int_a^b \underbrace{|f(x, y) - f(x_0, y)|}_{< \frac{\varepsilon}{b-a}} dy < \frac{\varepsilon}{b-a} \int_a^b 1 dy = \varepsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow F$ ist stetig in x_0 □

Bei Potenzreihen (Limiten von Summen) unter suchen wir, wann man die Ableitung in die Reihe hineinziehen darf.

Da Integral ebenfalls ein Limes von Summen ist, ergibt sich Analogie zu:

S. 13.5

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und

$f: \Omega \times [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ stetig. Für jedes

$k \in \{1, \dots, d\}$ möge die partielle Abl.

$\frac{\partial}{\partial x_k} f: \Omega \times [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ existieren und

auf ganz $\Omega \times [a, b]$ stetig sein. Dann

ist die Fkt. F in (PAI) partiell diffbar

auf Ω und für $x \in \Omega$ und $k \in \{1, \dots, d\}$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_k} F(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_k}(x, y) dy$$

Beweis: nur für $d=1$ und $\Omega \subset \mathbb{R}$ Intervall.

Seien $x_0, x \in \Omega$, $x_0 \neq x$.

$$\Rightarrow \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \int_a^b \partial_x f(x_0, y) dy$$

$$= \int_a^b \left[\frac{f(x, y) - f(x_0, y)}{x - x_0} - \partial_x f(x_0, y) \right] dy$$

17-9 nach Df'n (PAI) von $F(x)$.

MWS d. Differentialrechnung in $\mathbb{R} \Rightarrow$

$\exists \xi = \xi_{x,y}$ zwischen x_0 und x s.d.

$$\frac{f(x,y) - f(x_0,y)}{x - x_0} = \partial_x f(\xi,y)$$

Nach Ann. ist $\partial_x f$ stetig auf $\Omega \times [a,b]$ s.d.
und $[a,b]$ kompakt.
S. 13.3 besagt:

$\exists \delta > 0$ s.d. für alle $x \in B_\delta(x_0) \cap \Omega, y \in [a,b]$

gilt: $|\partial_x f(x,y) - \partial_x f(x_0,y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$

ξ zwischen x und $x_0, x \in B_\delta(x_0) \cap \Omega$

$$\Rightarrow \xi \in B_\delta(x_0) \cap \Omega$$

Für $x \in B_\delta(x_0) \cap \Omega$ folgt:

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \int_a^b \partial_x f(x_0, y) dy \right|$$
$$\leq \int_a^b \underbrace{|\partial_x f(\xi, y) - \partial_x f(x_0, y)|}_{< \frac{\varepsilon}{b-a}} dy < \varepsilon$$

17-10

$$< \frac{\varepsilon}{b-a}$$

und damit die Beh. $\square$

Bsp. 13.6

Für das PAI

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto F(x) := \int_0^1 \frac{e^{-(1+y^2)x^2}}{1+y^2} dy$$

$$= e^{-x^2} \int_0^1 \underbrace{\frac{e^{-y^2 x^2}}{1+y^2}}_{\leq 1} dy \leq e^{-x^2}$$

gilt nach letztem S.

$$\partial_x F(x) = F'(x) = \int_0^1 \partial_x \left(\frac{e^{-(1+y^2)x^2}}{1+y^2} \right) dy$$

$$= \int_0^1 -2x \cancel{(1+y^2)} \frac{e^{-(1+y^2)x^2}}{\cancel{1+y^2}} dy$$

Substitution $yx = u \Rightarrow du = x dy$

$$= -2 \cancel{x} e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} \frac{du}{\cancel{x}}$$

Leite nun auch

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto G(x) := \left[\int_0^x e^{-u^2} du \right]^2 \text{ ab:}$$

$$G'(x) = 2 \left[\dots \right] \cdot e^{-x^2} \text{ also}$$

$$G'(x) = -F'(x) \text{ bzw. } (F+G)'(x) = F'(x) + G'(x) = 0.$$

Also gibt es eine konstante $c \in \mathbb{R}$ mit

$$F(x) + G(x) = c \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Um c zu bestimmen, setzen wir $x=0$ ein:

$$c = F(0) + G(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dy + 0$$

$$= \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Also: } \left[\int_0^x e^{-y^2} dy \right]^2 = G(x) = \frac{\pi}{4} - F(x)$$

Wegen $0 \leq F(x) \leq e^{-x^2}$ folgt im

Limes $x \mapsto \infty$:

$$\left(\int_0^\infty e^{-y^2} dy \right)^2 = \frac{\pi}{4} - 0$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{Dies impliziert}$$

17-12 für Gauß-Fehlerfkt: $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{erf}(x) = 1$

$$\int_0^{\infty} e^{-u^2} du + \int_0^{\infty} e^{-\overset{v}{(-u)}^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$= \int_0^{-\infty} e^{-v^2} (-dv)$$

$$= \int_{-\infty}^0 e^{-v^2} dv$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

14 Partielle Abl. höherer Ordnung

D. 14.1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen

(a) Eine Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt stetig partiell differenzierbar, falls alle part. Abl. $D_1 f, \dots, D_d f$ exist. und stetig sind auf Ω . Der Raum aller solcher Fkt. wird mit $C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ bezeichnet, für $m=1$ schlichtweg mit $C^1(\Omega)$.

Da $g := D_k f$ wieder eine Fkt $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist, macht es Sinn, darauf wieder (a) anzuwenden.

(b) Ist für jedes $k \in \{1, \dots, d\}$

$g_k \in C^1(\Omega)$, wobei wir $g_k = D_k f$ setzen,

so schreiben wir $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$ und

18-1 nennen f 2 mal stetig differenzier-

bar.

$D_j g_k = D_j D_k f$ heißt partielle Ableitung
von f 2. Ordnung (nach x_k und x_j).

(c) Für $n \in \mathbb{N}$ definieren rekursiv:

$$C^n(\Omega, \mathbb{R}^m) := \{ f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m) \mid$$

$$D_k f \in C^{n-1}(\Omega, \mathbb{R}^m) \text{ für } k \in \{1, 2, \dots, d\} \}$$

$$\text{und } C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n(\Omega, \mathbb{R}^m)$$

$$C^n(\Omega) = C^n(\Omega, \mathbb{R}^1).$$

Also besitzt ein $f \in C^n(\Omega, \mathbb{R}^m)$ alle
partiellen Ableitungen

$$D_{k_1} D_{k_2} \dots D_{k_\ell} f, \quad k_1, \dots, k_\ell \in \{1, \dots, d\}$$

der Ordnung $\ell \in \{1, \dots, n\}$

Bsp. 14.2 (a) Sei $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, g(x, y, z) = x \sin(yz)$

$$\boxed{18-2} \quad \text{Dann: } D_1 g(x, y, z) = \sin(yz)$$

$$D_2 g(x, y, z) = x \cdot z \cdot \cos yz$$

$$D_3 g(x, y, z) = x \cdot y \cdot \cos yz$$

$$D_1 D_1 g(x, y, z) = 0, \quad D_2 D_2 g(x, y, z) = -x \cdot z^2 \sin yz$$

$$D_3 D_3 g(x, y, z) = -x y^2 \sin yz$$

$$D_1 D_2 g(x, y, z) = z \cos yz$$

$$D_2 D_1 g(x, y, z) = z \cos yz$$

$$D_1 D_3 g(x, y, z) = y \cos yz$$

$$D_3 D_1 g(x, y, z) = y \cos yz$$

$$D_2 D_3 g(x, y, z) = x \cos yz - x yz \sin yz$$

$$D_3 D_2 g(x, y, z) = x \cos yz - x yz \sin yz$$

Beobachtung:

$$D_j D_k g = D_k D_j g \quad \text{auf } \Omega \text{ für alle } j, k \in \{1, 2, 3\}$$

Ist das immer so?

(b) Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt für $(x,y) \neq (0,0)$

$$D_1 f(x,y) = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \frac{2x(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2)2x}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} \left[(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) + 2x^2(\cancel{x^2 + y^2} - \cancel{x^2 + y^2}) \right]$$

$$\begin{aligned} \text{3. binomische} \\ = y \frac{x^4 - y^4 + 4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad x=0 \\ = -\frac{y^5}{y^4} = -y \end{aligned}$$

Analog

$$D_2 f(x,y) = x \frac{x^4 - 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2} \quad y=0 \\ = \frac{x^5}{x^4} = x$$

Dar aus folgt:

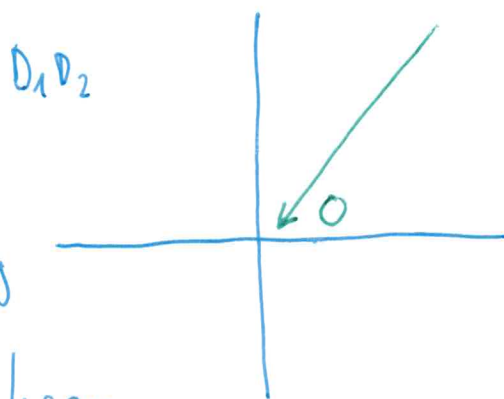
$$D_1(D_2 f)(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(D_2 f)(h,0) - D_2 f(0,0)}{h}$$

$$D_2 D_1 f(x, y) = \frac{x^6 + 9x^4 y^2 - 9x^2 y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3} = D_1 D_2 f(x, y)$$

Insbesondere für $x = y$

$$D_2 D_1 f(x, x) = D_1 D_2 f(x, x) = 0$$

Wie sieht es entlang
der Koordinatenachsen
aus?



Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x, 0) = 0 = f(0, y)$

Insbes:

$$D_1 f(x, 0) = 0 = D_2 f(0, y)$$

und

$$D_1 f(0, 0) = 0 = D_2 f(0, 0)$$

Daraus folgt:

$$D_1 (D_2 f)(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overset{\downarrow \text{fix}}{(D_2 f)(h, 0)} - \overset{\downarrow \text{fix}}{(D_2 f)(0, 0)}}{h}$$

$\uparrow$
 fix

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [h - 0] = 1$$

und

$$D_2 (D_1 f)(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(D_1 f)(0,h) - (D_1 f)(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h - 0}{h} = -1$$

$$\neq D_1 D_2 f(0,0)$$

Fazit:

* $D_1 D_2 f$ und $D_2 D_1 f$ stimmen nicht überein (in $(0,0)$)

* $D_1 D_2 f$ (und $D_2 D_1 f$) ist nicht stetig (in $(0,0)$)

S. 14.3 (von Schwarz)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, und

Sei $D_j D_k f$ stetige auf Ω Funktion j, k $\in \{1, \dots, d\}$
fix.

Dann ist auch $D_k D_j f$ wohldefiniert und stetig und es gilt

$$(*) \quad D_k D_j f(x) = D_j D_k f(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega.$$

Insbesondere gilt (*) für alle $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Für den Bw und auch sonst hilfreiche

Beobachtung 14.4 $f = (f_1, \dots, f_m)$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $a \in \Omega, m \in \mathbb{N}_0$,
 $k \in \{1, \dots, d\}$. Dann gelten:

(a) f ist part. diffb. in a nach $x_k \iff$

Jedes $f_1, \dots, f_m$ ist part. diffb. in a nach x_k .

(b) $D_k f \in C^m(\Omega, \mathbb{R}^m) \iff \forall l \in \{1, \dots, m\}$ ist
 $D_k(f_l) \in C^m(\Omega, \mathbb{R})$.

Bw. 14.4

(a) f part. diff. bar in a nach $x_k \Leftrightarrow$

$\exists$ Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ mit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{h} [f(a + h e_k) - f(a)] - (D_h f)(a) \right\| = 0$$

[bezeichnen dann $(D_h f)(a) := b$]

L. 11.2.

$\Leftrightarrow \exists b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}^m$ mit

$$\forall l=1, \dots, m : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f_l(a + h e_k) - f_l(a)] - b_l = 0$$

$\Leftrightarrow$ Für alle $l=1, \dots, m$ ist die Fkt

$f_l : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ part. diff. bar in a nach x_k .

(b) Wende ganz analog L. 11.2 an, um

die Stetigkeit der vektorwertigen Fkt

$D_h f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch die Stetigkeit aller

$D_h f_1, \dots, D_h f_m : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zu charakterisieren. $\square$

Bw. vom 14.3

Wg Beobachtung reicht es den

18-7 Fall $m=1$ zu betrachten.

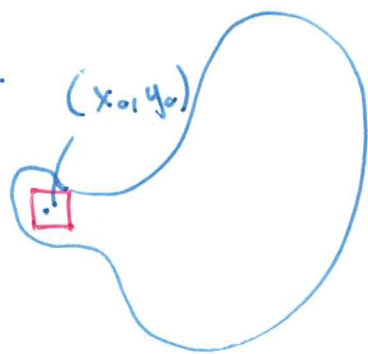
Da in der Aussage nur zwei Variablen x_k und x_j involviert sind, können wir die restlichen einfrieren und die Fkt

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x_k, x_j) = f(x_1, x_2, \dots, x_d)$$

betrachten. D.h. es reicht, den Satz nur für $d=2$ zu zeigen.

Also nehmen wir an, dass für $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, $D_x D_y f$ existiert und stetig ist auf Ω . Sei $(x_0, y_0) \in \Omega$.

Dann ex. ein Rechteck $R = (a, b) \times (c, d)$ mit $(x_0, y_0) \in R$. Sei $(x, y) \in R$ bel.



HDI im Ana I

$$\Rightarrow D_x \left[\underbrace{f(\underline{x}, y)}_{\text{fixiert}} - \underbrace{f(\underline{x}, y_0)}_{\text{fixiert}} \right] = \int_{y_0}^y D_x D_y f(x, t) dt$$

nach S. 13.5

$$= D_x f(x, y) - D_x f(x, y_0)$$

0 da y_0 eingefroren.

18-8 $\Rightarrow D_y [D_x f(x, y) - D_x f(x, y_0)]$

Falls $j=k$, dann ist offensichtlich

$$D_j D_k f = D_k D_k f = D_k D_j f.$$

Müssen also nur $j \neq k$ betrachten.

Wir bew. (*) unter der stärkeren Ann.

$f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$. Es bleibt also für einen

bel. Punkt $(x_0, y_0) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ zu zeigen, dass

$$D_1 D_2 f(x_0, y_0) = D_2 D_1 f(x_0, y_0)$$

Durch eine globale Verschiebung des

Koordinatensystems dürfen wir sogar

annehmen, dass der Punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ist.

Idee: Stelle relevanten Differenzenquotienten

2. Ordnung auf zwei Weisen dar, und bilde

Grenzwert.

$$\Rightarrow g'(r) = D_1 f(r, t) - D_1 f(r, 0)$$

Für $s, t, r > 0$ bel. setze $g(r) := f(r, t) - f(r, 0)$

und

$$\Delta(s, t) = [f(s, t) - f(0, t)] - [f(s, 0) - f(0, 0)]$$

$$= [f(s,t) - f(s,0)] - [f(0,t) - f(0,0)]$$

$$= g(s) - g(0)$$

$$= g'(\xi) (s - 0) \quad \text{für ein } \xi \in (0, s) \text{ nach MWS}$$

$$= s [D_1 f(\xi, t) - D_1 f(\xi, 0)]$$

$$\text{für } h(r) = D_1 f(\xi, r)$$

$$= s [h(t) - h(0)] \quad \Rightarrow h'(r) = D_2 D_1 f(\xi, r)$$

$$= st h'(\eta) \quad \text{für ein } \eta \in (0, t) \text{ nach MWS}$$

$$= st D_2 D_1 f(\xi, \eta)$$

Dasselbe Vorgehen können wir auf die andere Darst. von Δ anwenden und erhalten:

$$\Delta(s,t) = [f(s,t) - f(0,t)] - [f(s,0) - f(0,0)] = \dots$$

$$= st D_1 D_2 f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \quad \text{mit } \tilde{\xi} \in (0, s) \\ \tilde{\eta} \in (0, t)$$

Wir dividieren durch $s > 0$ und $t > 0$:

$$\Rightarrow D_2 D_1 f(\xi, \eta) = D_1 D_2 f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}).$$

Der Grenzübergang $s \rightarrow 0, t \rightarrow 0$ erzwingt auch

$\xi, \eta, \tilde{\xi}, \tilde{\eta} \rightarrow 0$ und da $f \in C^2$ folgt

$$D_2 D_1 f(0,0) = D_1 D_2 f(0,0)$$

□

15. Differenzierbare Funktionen

Zur Motivation formulieren wir die Differenzierbarkeit einer Fkt einer Veränderlichen um:

L. 15.1 Ein $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann diffbar in $x_0 \in (a, b)$, falls ein $l \in \mathbb{R}$, ein $\varepsilon > 0$ und ein $g: (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ existieren so dass für $h \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ gilt

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + l \cdot h + g(h)$$

und $g(h) = o(h)$, d.h.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} = 0 \quad \text{" } g(h) \text{ geht schneller gegen Null als } h \text{ "}$$

Wie bei der Taylorformel sehen wir, dass in diesem Fall der Zuwachs

$$f(x_0 + h) - f(x_0)$$

bis auf einen Fehlerterm $g(h)$ gut durch

18-11 die lineare Funktion $h \mapsto l \cdot h$

approximiert wird.

Die Forderung der Existenz einer solchen linearen Approximation ist im mehrdim. Fall der richtige Differenzierbarkeitsbegriff.

D. 15.2 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $a \in \Omega$. Ein $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt (total) differenzierbar im Punkt a , falls es eine lineare Abb. $L: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für $h \in B_\varepsilon(a)$

$$\text{für } g(h) := f(a+h) - f(a) - Lh \quad (*)$$

gilt $|g(h)| = o(|h|)$, d.h.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{|h|} \underbrace{(f(a+h) - f(a) - Lh)}_{\in \mathbb{R}^m} = 0$$

Dann bez. wir L mit $(Df)(a) = Df(a)$ und nennen es Ableitung von f in a .

Bm 15.3 (a) Setzt man $x = a + h$, so ist (*)

äquivalent zu:

$$f(x) = f(a) + Df(a)(x-a) + o(|x-a|)$$

(b) Falls wir in (*) f und g komponentenweise aufschreiben:

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix}$$

so gilt für eine $m \times m$ Matrix $C = (c_{\mu, \nu})$

$$\text{genau dann } f(a+h) = f(a) + Ch + g(h)$$

wenn $\forall \mu = 1, \dots, m$ gilt

$$f_{\mu}(a+h) = f_{\mu}(a) + \sum_{\nu=1}^d c_{\mu\nu} h_{\nu} + g_{\mu}(h)$$

Fazit: (i) f ist genau dann total diffbar in a

wenn es alle Komponenten $f_1, \dots, f_m$ sind.

(ii) Die Ableitung $Df(a)$ ist eindeutig. Zu

nächst haben wir ja nur die Existenz geford.

Letztes Mal:

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ (total) diffbar in $a \in \Omega$

$\Leftrightarrow$ Es gibt lineare Abbildung $L: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit

$$(*) \quad \|f(a+h) - f(a) - L(h)\| = o(\|h\|) \quad (h \rightarrow 0)$$

$$\text{(d.h. } \frac{1}{\|h\|} [f(a+h) - f(a) - L(h)] \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0)$$

Wir nennen dann L die Ableitung von f in a und schreiben $(Df)(a)$ bzw. $Df(a)$ statt L .
[bisher nur Existenz, keine Eindeutigkeit]

Erinnerung: Jede lineare Abbildung von $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}^m$ ist Lipschitz-stetig und hat Darstellung als $(m \times d)$ Matrix bzgl. der Standardbasen.

Bemerkung 15.3

(a) Mit $x = a + h$ ist $(*)$ äquivalent zu

$$\|f(x) - f(a) - L(x-a)\| = o(\|x-a\|)$$

(b) Mit $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ und einer reellen $(m \times d)$ Matrix $C = (c_{jk})$ ist

$$f_j(a+h) - f_j(a) - \sum_{k=1}^d c_{jk} h_k, \quad j=1, \dots, m$$

$= (Ch)_j, j\text{-te Komponente von } Ch \in \mathbb{R}^m$

gerade die j -te Komponentenfunktion von

$$f(a+h) - f(a) - Ch.$$

Fazit: f ist total diffbar in $a \Leftrightarrow$ alle f_j sind total diffbar in a . [vgl. zB Stetigkeit]

Dabei entspricht dann $Df_j(a)$ gerade der j -ten Komponentenfunktion von $Df(a)$.

(c) Für $f: I \rightarrow \mathbb{R}, I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall (d.h. $d=m=1$) ist f genau dann total diffbar in $a \in I$, wenn $f'(a)$ existiert. In diesem Fall ist $Df(a)$ gegeben durch $Df(a)(h) = f'(a) \cdot h \quad \forall h \in \mathbb{R}$ [Multiplikation mit $f'(a)$]

Beispiel 15.4

(a) Sei $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ linear und $c \in \mathbb{R}^m$. Wir definieren $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch
 $f(x) := c + T(x)$. — affine Abbildung

Für $a, h \in \mathbb{R}^d$ gilt $= T(a) + T(h)$

$$f(a+h) = c + \overbrace{T(a+h)}^{=T(a)+T(h)} = f(a) + T(h),$$

also $S(h) := f(a+h) - f(a) - T(h) = 0$. Damit ist f (total) diffbar in a mit $Df(a) = T$.

(b) Sei A eine reelle $(d \times d)$ Matrix und $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \langle x, Ax \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Für $a, h \in \mathbb{R}^d$ gilt dann

$$\begin{aligned} f(a+h) &= \langle a+h, A(a+h) \rangle = \langle a, Aa \rangle + \overbrace{\langle h, Aa \rangle}^{= \langle a, A^T h \rangle} + \langle a, Ah \rangle + \langle h, Ah \rangle \\ &= f(a) + \langle a, (A^T + A)h \rangle + S(h), \quad S(h) := \langle h, Ah \rangle. \end{aligned}$$

Mit Cauchy-Schwarz folgt dabei

$$\|S(h)\| \leq \|h\| \cdot \|Ah\|, \text{ insbesondere } \frac{\|S(h)\|}{\|h\|} \leq \|Ah\| \xrightarrow[h \rightarrow 0]{A \text{ (Lipschitz-) stetig}} 0, \text{ also } \|S(h)\| = o(\|h\|)$$

Damit: f (total) diffbar in a mit $Df(a)(h) = \langle a, (A^T + A)h \rangle \quad \forall h \in \mathbb{R}^d$, d.h. $Df(a) = \langle a, (A^T + A) \cdot \rangle$.
Ist speziell $A = I$ die Einheitsmatrix, so ist $f(x) = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$ und $Df(a) = 2\langle a, \cdot \rangle$.

Satz 15.5

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ diffbar in $a \in \Omega$. Dann gilt:

(a) f ist stetig in a .

(b) Für jedes $v \in \mathbb{R}^d$ gilt $Df(a)(v) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in \mathbb{R}}} \frac{1}{t} [f(a+tv) - f(a)]$.

Insbesondere ist f partiell diffbar in a mit $D_{\alpha} f(a) = Df(a)(e_{\alpha})$, $\alpha = 1, \dots, d$,
und $Df(a)$ ist eindeutig bestimmt. (vgl. Bem. 15.3(b)) $D_{\beta} f(a) = Df(a)(e_{\beta}) \quad \forall \beta = 1, \dots, d, \quad j = 1, \dots, m$

Beweis

(a) Nach Definition der Diffbarkeit gilt $f(a+h) = f(a) + Df(a)(h) + \varrho(h)$ mit $\frac{\|\varrho(h)\|}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. Insbesondere gilt $\|\varrho(h)\| = \|h\| \cdot \frac{\|\varrho(h)\|}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

Da auch $\|Df(a)(h)\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ folgt $f(a+h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(a)$, d.h. f ist stetig in a .

(b) Für $v=0 \in \mathbb{R}^d$ ist die Aussage klar, sei also $v \neq 0$.

Mit $h = tv$, $t \in \mathbb{R}$, $t \rightarrow 0$ folgt aus der Diffbarkeit

$$\left\| \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} - Df(a)(v) \right\| = \frac{\|f(a+tv) - f(a) - Df(a)(tv)\|}{\|tv\|} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

$$\xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

Def. part. Abl.

Mit der speziellen Wahl $v = e_k$ gilt also $Df(a)(e_k) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+te_k) - f(a)}{t} = (Df)(a)_k$.

$Df(a)$ ist dann eindeutig durch die Wirkung auf den Basisvektoren e_k festgelegt. $\square$

Ist f diffbar in a , so wird also $Df(a)$ bzgl. der Standardbasen durch die $(m \times d)$ Matrix

$$\begin{pmatrix} D_{f_1}(a) & D_{f_2}(a) & \dots & D_{f_m}(a) \\ D_{f_2}(a) & D_{f_2}(a) & \dots & D_{f_2}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_{f_m}(a) & D_{f_m}(a) & \dots & D_{f_m}(a) \end{pmatrix}$$

dargestellt. Diese Matrix heißt Fundamentalmatrix oder Jacobi-Matrix von f in a und wir bezeichnen sie mit $J_f(a)$. Es gilt dann $Df(a) = J_f(a) \cdot h$, Matrix-Vektor-Produkt

Beachte: Für $m=1$ ist $J_f(a)$ eine $(1 \times d)$ Matrix (Zeilenvektor), für $d=1$ ist $J_f(a)$ eine $(m \times 1)$ Matrix (Spaltenvektor)

[Merkregel: Für jede Komponentenfunktion von f eine Zeile]

Achtung!

Aus der Existenz der partiellen Ableitungen von f kann man nicht auf Diffbarkeit von f schließen (obwohl man die Jacobi-Matrix bilden kann):

$$\text{Bei } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad (\text{siehe Bsp. 12.3})$$

existieren die partiellen Ableitungen auf $\mathbb{R}^2$, aber f ist in $(0,0)$ sogar unstetig. Hier sind die partiellen Ableitungen in keiner Umgebung von $(0,0)$ beschränkt.

Aber auch die Beschränktheit der partiellen Ableitungen genügt nicht für Diffbarkeit:

Bsp. 15.6 Betrachte $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Hier gilt $D_1 g(0,0) = 0 = D_2 g(0,0)$ und

$$D_1 g(x,y) = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, \quad D_2 g(x,y) = \frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \quad ((x,y) \neq (0,0))$$

Dabei

$$|D_1 g(x,y)| = \frac{2|x||y|}{x^2+y^2} \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1 \quad \text{und} \quad |D_2 g(x,y)| \leq \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} \leq 1.$$

Insbesondere ist g stetig. Ferner erhalten wir $J_g(0,0) = (0,0)$ - Nullabbildung

Wäre g in $(0,0)$ diffbar, so müsste also $Dg(0,0) = 0: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gelten, also

$$\frac{g(x,y) - \overbrace{g(0,0)}^{=0} - \overbrace{Dg(0,0)(x,y)}^{=0}}{\|(x,y)\|} = \frac{g(x,y)}{\|(x,y)\|} = \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0.$$

Für $y=x > 0$ haben wir aber

$$\frac{g(x,x)}{\|(x,x)\|} = \frac{1}{2^{3/2}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \quad \nabla$$

Also ist f nicht diffbar in $(0,0)$.

Dennoch existiert für alle $v = (v_1, v_2) \neq (0, 0)$ der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(tv) - g(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 v_1^2 v_2}{t^3 (v_1^2 + v_2^2)} = \frac{v_1^2 v_2}{v_1^2 + v_2^2}.$$

Definition 15.7

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \Omega$ und $v \in \mathbb{R}^d$.

Existiert der Grenzwert

$$D_v f(a) := \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in \mathbb{R}}} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \in \mathbb{R}^m,$$

so heißt $D_v f(a) \in \mathbb{R}^m$ die Richtungsableitung von f in a in Richtung v .

Andere Schreibweisen: $\frac{df}{dv}(a)$, $\partial_v f(a)$.

Speziell für $v = e_k$ erhalten wir wieder die k -te partielle Ableitung von f in a : $D_{e_k} f(a) = D_k f(a)$.

Satz 15.5 sagt: Ist f diffbar in $a \in \Omega$, so existiert die Richtungsableitung von f in jeder Richtung $v \in \mathbb{R}^d$, und es gilt

$$D_v f(a) = Df(a)(v) = J_f(a) \cdot v.$$

In Beispiel 15.6 gesehen: Aus der Existenz aller Richtungsableitungen folgt noch nicht die Diffbarkeit von f . In dem Beispiel ist auch $D_v f(0,0) = J_f(0,0)v$ nicht erfüllt:

$$J_f(0,0) = (0,0), \text{ aber } D_v f(0,0) = \frac{v_1^2 v_2}{v_1^2 + v_2^2} \neq 0 \text{ z.B. für } v = (1,1).$$

Ende VL 22.6.

Selbst die Gültigkeit von $D_v f(a) = J_f(a)v \quad \forall v \in \mathbb{R}^d$ liefert noch keine Diffbarkeit:

Beispiel 15.8 Betrachte $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Dann ist g auf $\mathbb{R}^2$ partiell diffbar mit $D_1 g(0,0) = 0 = D_2 g(0,0)$, d.h. $J_g(0,0) = (0,0)$

Für $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ gilt ferner

$$D_v g(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(tv) - g(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4 v_1 v_2^3}{t^2 v_1^2 + t^6 v_2^2} = 0 = J_g(0,0) \cdot v.$$

Wegen $g(y^3, y) \stackrel{y \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} \frac{y^4}{y^2} = \frac{1}{2} y^2 \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$, ist g aber sogar unstetig in $(0,0)$.

Definition 15.9

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar auf ganz Ω . Dann heißt

$\text{grad } f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit

$$\text{grad } f(x) := (J_f(x))^T = \begin{pmatrix} D_1 f(x) \\ \vdots \\ D_d f(x) \end{pmatrix}, \quad x \in \Omega,$$

Spaltenvektor!

der Gradient oder das Gradientenfeld von f .

Andere Schreibweisen: ∇f (~~Nabla~~ spricht: Nabla f) (etwa in der Physik)

Ist f diffbar in a , so ist $\text{grad } f(a)$ der Vektor in $\mathbb{R}^d$ mit

$$\langle \text{grad } f(a), v \rangle = J_f(a) v = Df(a)(v) = D_v f(a), \quad v \in \mathbb{R}^d,$$

Mit Cauchy-Schwarz folgt

$$|\langle \text{grad } f(a), v \rangle| \leq \|\text{grad } f(a)\| \cdot \|v\|.$$

Hierbei gilt Gleichheit genau dann, wenn $\text{grad } f(a)$ und v linear abhängig sind.

Ist also $J_f(a) \neq 0$, so gibt es genau einen Vektor v , nämlich $v := v_{\max} := \frac{1}{\|\text{grad } f(a)\|} \text{grad } f(a)$, für den die Richtungsableitung maximal wird. In diesem Fall gilt

$$D_{\max} f(a) = \|\text{grad } f(a)\|.$$

Man sagt auch: Der Gradient zeigt in die Richtung des stärksten Anstiegs und seine Norm beschreibt die Stärke dieses Anstiegs.

Es gibt $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, die alle Richtungsableitungen besitzen, aber

$$\partial_v f(a) \neq Jf(a)v \text{ für } a = (0,0) \text{ aufweisen.}$$

also nicht differenzierbar sind.

Aber auch bei Gleichheit muß keine Diffbarkeit vorliegen.

Bsp. 15.8

Sei $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D_1 g(x,y) = y^3 \frac{y^6 - x^2}{(y^6 + x^2)^2} \\ D_2 g(x,y) = 3xy^2 \frac{x^2 - y^6}{(x^2 + y^6)^2} \end{cases} \text{ für } (x,y) \neq (0,0)$$

$$\forall x,y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : g(x,0) = 0 = g(0,y)$$

$$\Rightarrow D_1 g(0,0) = 0 = D_2 g(0,0)$$

20.1 $\Rightarrow g$ partiell diffb. auf $\mathbb{R}^2$

$$\text{und } J_g(0,0) = (D_1 g(0,0), D_2 g(0,0)) = (0,0)$$

Bei der Defn. von J_g gehen nur die
partiellen Ableitungen ein. $\perp$

Berechnen nur Richtungsabl. in $(0,0)$

$$v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow$$

$$\partial_v g(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [g(tv) - g(0,0)]$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \frac{t^4 v_1 v_2^3}{t^2 v_1 + t^6 v_2}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cancel{t^3} v_1 v_2^3}{\cancel{t^2} v_1} = 0$$

$$= J_g(0,0) \cdot v \quad (x)$$

Aber für $y > 0$ ist

$$\boxed{20-2} \quad g(y^3, y) = \frac{y^3 y^3}{y^6 + y^6} = \frac{1}{2} \quad \text{insbesondere}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} g(y^3, y) = \frac{1}{2}$$

Es reicht nicht, sich $(0,0)$ nur entlang von den Koordinatenachsen anzunähern
auch nicht entlang von bel.

$\Rightarrow g$ nicht stetig in $(0,0)$

S. 15.5

$\Rightarrow g$ nicht diffb.



Geraden, sondern muß auch Kurven betrachten.

Übg: Aber auch Stetigkeit in $(0,0)$ zusammen mit (x) garantiert nicht Diffbk.

D. 15.9 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ^{offen} $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \Omega$ und

f partiell differenzierbar in a . Dann

heißt $\text{grad } f(a) := (Jf(a))^T = \begin{pmatrix} D_1 f(a) \\ \vdots \\ D_d f(a) \end{pmatrix}$

Gradient von f in a .

Ist f sogar auf ganz Ω partiell diffbar, so definiert der Gradient eine Abb.

$$\text{grad}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d,$$

die auch als Gradientenfeld bezeichnet

Oft schreibt man auch $\nabla f = \text{grad } f$
mit dem Nabla Symbol „ ∇ “.

Ist f in $a \in \mathbb{R}$ diffbar, so ist
 $w = \text{grad } f(a)$ der eind. Vektor in $\mathbb{R}^d$, den

$$\langle w, v \rangle = J_f(a) \cdot v = Df(a)(v) = \partial_v f(a)$$

für alle $v \in \mathbb{R}^d$ erfüllt.

Cauchy Schwarz Ungl. impliziert
(xx)

$$\|\text{grad } f(a)\| \|v\| \leq \langle \text{grad } f(a), v \rangle \leq \|\text{grad } f(a)\| \|v\|$$

Eine Gleichheit tritt nur auf, falls

$\text{grad } f(a)$ und v lin. abhängig.

Im Fall $J_f(a) \neq 0$ gibt es dann genau
einen normierten Vektor $v \in \mathbb{R}^d$, für

$$\text{den } \partial_v f(a) = \langle \text{grad } f(a), v \rangle = \|\text{grad } f(a)\| \cdot \cancel{\|v\|} = 1$$

20-4 gilt, d.h. für den die

Richtungsableitung den maximal möglichen Wert in (xx) annimmt. Dies ist

$$V = V_{\max} := \frac{1}{\|\operatorname{grad} f(a)\|} \operatorname{grad} f(a)$$

Division erlaubt, da $\nabla f(a) \neq 0$.

„Der Gradient von f zeigt in die Richtung des stärksten Anstiegs und seine Norm beschreibt die Stärke des Anstiegs“.

Hoffnungsschimmer: (Totale) Differenzierbarkeit ist garantiert, falls....

S. 15.10 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ partiell diffbar auf Ω und $a \in \Omega$. Die partiellen Abl $D_1 f, D_2 f, \dots, D_d f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ seien alle stetig in a . Dann ist f diffbar in a .

Für den Bw gehen wir vor wie im S. 12.4.

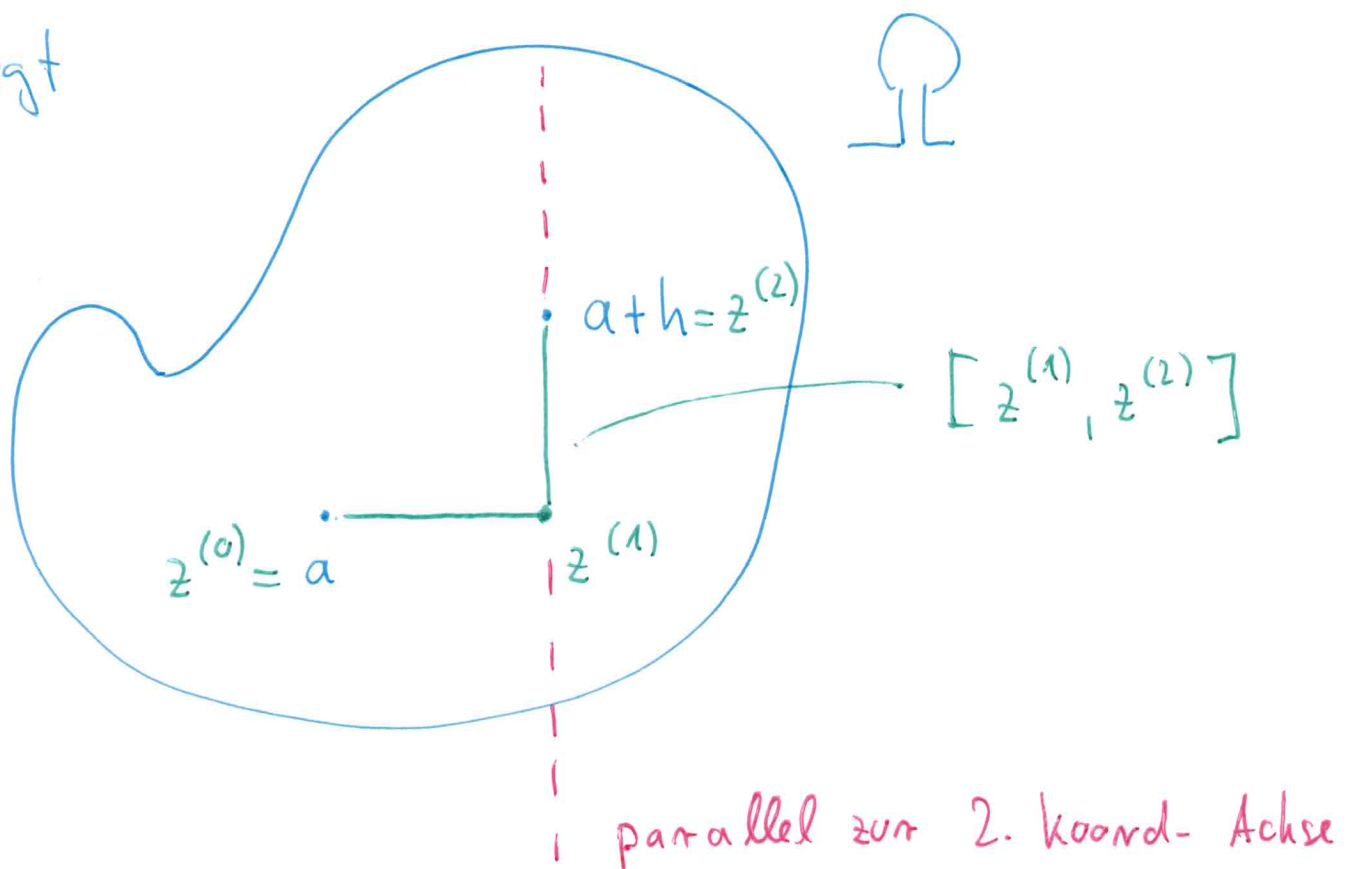
Wie dort reicht es $m=1$ zu betrachten.

Zu $h \in \mathbb{R}^d$ und $l = 0, 1, 2, \dots, d$ setze

$$z^{(l)} = a + \sum_{j=1}^l h_j e_j$$

$$\Rightarrow z^{(0)} = a, \quad z^{(d)} = a+h$$

$[z^{(l-1)}, z^{(l)}]$ ist ein Intervall, das parallel zur l . Koordinatenachse liegt



Indem wir jeweils $(d-1)$ Koordinaten eingefroren und nur eine variiert haben ergab der MWS aus Ama I die Exist. von

$$\xi^{(1)} \in [z^{(0)}, z^{(1)}]$$

$\vdots$

$$\xi^{(d)} \in [z^{(d-1)}, z^{(d)}] \quad \text{mit}$$

$$f(a+h) - f(a) = \overset{\text{Teleskops}}{\sum_{l=1}^d} [f(z^{(l)}) - f(z^{(l-1)})]$$

$$= \sum_{l=1}^d D_{\xi} f(\xi^{(l)}) h_{\xi}$$

Wir setzen:

$$g(h) := \sum_{l=1}^d [D_{\xi} f(\xi^{(l)}) - D_{\xi} f(a)] h_{\xi}$$

und erhalten:

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{l=1}^d D_{\xi} f(a) h_{\xi} + g(h)$$

$$= Df(a)(h) + g(h)$$

Für $h \rightarrow 0$ schrumpfen alle Intervalle $[z^{(l-1)}, z^{(l)}]$ zu einem Punkt zusammen, so dass $\lim_{h \rightarrow 0} \xi^{(l)} = a$ für

alle $l = 1, \dots, d$. Da partielle Abl. stetig in a sind folgt für alle $l = 1, \dots, d$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} [D_l f(\xi^{(l)}) - D_l f(a)] = 0$$

und für g :

$$\frac{|g(h)|}{\|h\|} \leq \sum_{l=1}^d |D_l f(\xi^{(l)}) - D_l f(a)| \underbrace{\frac{h_l}{\|h\|}}_{\leq 1}$$

$$\longrightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0.$$

Also ist f diffb. in a $\square$

20-8 Umgekehrt kann man aus der (totalen)

Differenzierbarkeit nicht die Stetigkeit der part. Abl. folgern wie folgendes

Bsp. 15.11

zeigt,

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \\ (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \sin(x^2+y^2)^{-1} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $(x,y) \neq (0,0)$

gilt dann: mit $r^2 = x^2 + y^2$

$$\frac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|} = \frac{1}{r} r^3 \underbrace{|\sin(r^{-2})|}_{\leq 1} \leq r^2$$

Beh. $Df(0,0) = 0$, denn damit gilt

$$g(h_1, h_2) := f(h_1, h_2) - f(0,0) - 0 \cdot h = f(h_1, h_2)$$

$$\text{also } \frac{|g(h)|}{\|h\|} \leq \|h\|^2 \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0.$$

Aber: für $x > 0$ gilt: $|\dots| \leq 3x^2$

$$\boxed{20-9} \quad D_1 f(x, 0) = \left(3x^2 \sin \frac{1}{x^2} \right) + x^3 \cos \frac{1}{x^2} (-2x^{-3})$$

$$= \sigma(x) - 2 \cos \frac{1}{x^2}$$

oszilliert und hat keinen Limes für $x \rightarrow 0$.

$\Rightarrow D_1 f$ unstetig in $(0,0)$

Symmetrie
 $\Rightarrow$ auch $D_2 f$ -||-

Analog wie im Ana I gilt: Summenregel

S. 15.12 Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $a \in \Omega$, $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$

diffbar in a . Dann ist auch $\lambda f + g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$

diffbar in a und

$$D(\lambda f + g)(a) = \lambda Df(a) + Dg(a)$$

Also gilt für die entsp. Jacobi-Matrizen

$$J_{\lambda f + g}(a) = \lambda J_f(a) + J_g(a)$$

Bw: Übung

S. 15.13 (kettenregel)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $\Sigma \subset \mathbb{R}^m$ offen, $a \in \Omega$

20-10 $f: \Omega \rightarrow \Sigma$, $g: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^l$, $b = f(a) \in \Sigma$,

f diffbar in a , g diffbar in b . Dann ist
 $g \circ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^l$ diffb. in a und

$$\begin{aligned} D(g \circ f)(a) &= Dg(b) \circ Df(a) \\ &= Dg(f(a)) \circ Df(a) \end{aligned}$$

↑
Verkettung von lin. Abb.

Für die Funktionalmatrizen gilt:

$$J_{g \circ f}(a) = J_g(b) J_f(a) = J_g(f(a)) J_f(a)$$

↑
Matrixmultiplikation.

Bw: Laut Ann ex. lin Abb $L = Df(a)$

und $Q = Dg(b)$ und Fkt $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$,

$\tau: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, der art, dass $\|g(h)\| = o(\|h\|)$

und $\|\tau(k)\| = o(\|k\|)$ [d.h. es ex $\varepsilon: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$

mit $\lim_{k \rightarrow 0} \varepsilon(k) = 0$ und $\tau(k) = \|k\| \varepsilon(k)$]

und

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + g(h)$$

$$g(b+k) = g(b) + Q(k) + r(k) \quad \underline{29.6}$$

Wähle speziell $k := f(a+h) - b$, d.h.

$$f(a+h) = b + k$$

Dann

$$(g \circ f)(a+h) = g(b+k)$$

$$= g(b) + Q(k) + r(k)$$

$$= g(b) + Q(\underbrace{f(a+h) - f(a)}_{= L(h) + g(h)}) + r(k)$$

$$= (g \circ f)(a) + Q(L(h) + g(h)) + r(k)$$

Bh: $QL = D_{g \circ f}$, d.h.

$$R(h) := Q(g(h))$$

muß $R(h) = o(h)$
sein.

$$+ r(f(a+h) - b)$$

Q ist Lipschitz-stetig:

$$\|Q(g(h))\| \leq \underbrace{\|Q\|}_{\text{Lipschitz-konstante}} \|g(h)\|$$

Lipschitz-konstante vgl. 11.24

Also
$$\frac{\|Q(g(h))\|}{\|h\|} \leq \|Q\| \frac{\|g(h)\|}{\|h\|} \rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0$$

✓

$$\frac{\tau(f(a+h)-b)}{\|h\|} = \frac{\| \overbrace{L(h) + g(h)}^{L(h) + g(h)} \|}{\|h\|} \varepsilon \left(\underbrace{f(a+h) - f(a)}_{\rightarrow 0} \right)$$

$\rightarrow 0$
f stetig

$$\leq \frac{\|L\| \|h\|}{\|h\|} + \frac{\|g(h)\|}{\|h\|}$$

$$\leq \|L\| + \text{const.}$$

da: * L ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-konstante $\|L\|$

* Nullfolgen sind beschränkt.

Also:

$$\frac{\tau(f(a+h)-b)}{\|h\|} = \text{beschr. Fkt} \times \text{Nullfolge} \varepsilon$$

□

Bsp 15.14

Setze

$$h := g \circ f : \overset{\mathbb{R}^d}{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^l = \mathbb{R}, \quad x \in \Omega.$$

Dann

$$\begin{aligned} J_h(x) &= \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial h}{\partial x_d}(x) \right) \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial y_1}(f(x)), \dots, \frac{\partial g}{\partial y_m}(f(x)) \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_d}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_d}(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= J_g(f(x)) \cdot J_f(x) \quad [\text{Matrix prod}]$$

a) Speziell für $d=1$, $h: \overset{\mathbb{R}}{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$

$$h'(x) = \sum_{h=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_h}(f(x)) \frac{\partial f_h}{\partial x}(x)$$

b) Speziell für $d=2$ und Polarkoord.

$$f: \Omega = (0, \infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(r, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}^T =: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T$$

$$\text{z. B. sei } g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto x \cdot y$$

$$\Rightarrow h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (r, \varphi) \mapsto r^2 \cos \varphi \sin \varphi$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial r}(r, \varphi) &= \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \frac{\partial x_1}{\partial r}(r, \varphi) \\ &+ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \frac{\partial x_2}{\partial r}(r, \varphi) \end{aligned}$$

$$= y \cdot \frac{\partial}{\partial r}(r \cos \varphi) + x \frac{\partial}{\partial r}(r \sin \varphi)$$

$$= y \cos \varphi + x \sin \varphi \quad \text{Additionstheorem.}$$

$$= 2r \sin \varphi \cos \varphi = r \sin 2\varphi$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial \varphi}(r, \varphi) &= \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \frac{\partial}{\partial \varphi} x(r, \varphi) \\ &+ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \frac{\partial}{\partial \varphi} y(r, \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -y \cdot r \sin \varphi + x \cdot r \cos \varphi = r [-r \sin^2 \varphi + r \cos^2 \varphi] \\ &= r^2 \cos 2\varphi \end{aligned}$$

$$c) \quad f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, \dots, x_d) \mapsto \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2}$$

$$g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

diffbar

$$h = g \circ f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$$

rotationsinvariant

$$x \neq 0 \in \mathbb{R}^d \Rightarrow \nabla h(x) = \left(\frac{g'(f(x))}{f(x)} x_1, \dots, \frac{g'(f(x))}{f(x)} x_d \right)$$

$$= \frac{g'(f(x))}{f(x)} x = \frac{g'(\|x\|)}{\|x\|} x$$

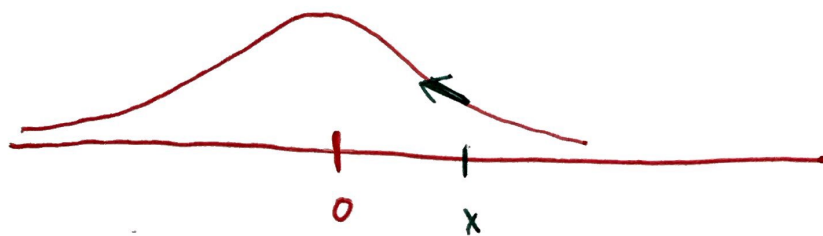
Für $v = \frac{x}{\|x\|}$ folgt:

$$\partial_v h(x) = \langle \text{grad } h(x), v \rangle = g'(\|x\|)$$

Dann ist $v = \frac{x}{\|x\|}$ Richtung des

max. Anstiegs von h

Dann ist $w = -\frac{x}{\|x\|}$ —||—



z.B. $g(y) = e^{-y^2} \Rightarrow h(x) = e^{-\|x\|^2}$

L. 15.15

Seien: $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall

$f \in C^1(I \times (a,b))$, $\varphi, \psi \in C^1(I)$ mit

$$\forall x \in I : a < \varphi(x) < \psi(x) < b,$$

$$F : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$$

Dann ist F diffb. auf I mit

$$F'(x) = \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy D_1 f(x, y) \right] + f(x, \psi(x)) \psi'(x) - f(x, \varphi(x)) \varphi'(x)$$

für $x \in I$.

Bw: Defn: $H : (a,b) \times (a,b) \times I \rightarrow \mathbb{R}$

$g : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ durch

$$H(u, v, w) = \int_u^v f(w, y) dy, \quad g(x) = (\varphi(x), \psi(x), x)$$

$$\text{Dann: } H \circ g(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy = F(x)$$

also

$$F'(x) = \overset{15.14.a}{(D_1 H(g(x)), D_2 H(g(x)), D_3 H(g(x)))} \begin{pmatrix} \varphi'(x) \\ \psi'(x) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$HD I \Rightarrow D_1 H(u, v, w) = -f(w, u)$$

$$D_2 H(u, v, w) = f(w, v)$$

Abl. vom parameter abh. Intg:

$$D_3 H(u, v, w) = \int_u^v \frac{\partial}{\partial w} f(w, y) dy$$

$u = \varphi(x), v = \psi(x), w = x$ einsetzen $\Rightarrow$ Beh $\square$

16 MWS & Taylor formel

S. 16.1 (Mittelwertsatz)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ diffb. auf Ω ,

$a, b \in \Omega$ derart, dass $[a, b] = \{ta + (1-t)b \mid$

$t \in [0, 1]\} \subset \Omega$. Dann ex. $\xi \in (a, b)$

$= \{ta + (1-t)b \mid t \in (0, 1)\}$ mit

$$f(b) - f(a) = J_f(\xi) \cdot (b - a) = \sum_{k=1}^d D_k f(\xi) (b_k - a_k)$$

Bw:

Setze $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$, $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\gamma(t) = a + t(b-a) \quad h = f \circ \gamma$$

$\Rightarrow h$ stetig auf $[0,1]$, diffb. auf $(0,1)$

MWS Ama I $\Rightarrow \exists \tau \in (0,1)$ mit
 $1 \cdot h'(\tau) = h(1) - h(0)$

Kettenregel in 15.14.a:

$$h'(\tau) = \sum_{k=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_k}(g(\tau)) \cdot \underbrace{\frac{\partial g_k}{\partial t}(\tau)}_{= (b-a)_k}$$

$$= J_f(\underbrace{a + \tau(b-a)}_{\substack{!! \\ \text{setze } \xi}}) \cdot (b-a)$$

$$\Rightarrow \underline{Df(\xi)(b-a) = h(1) - h(0) = f(b) - f(a)} \quad \square$$

MWS gilt i.a. nicht für vektorwertige
(nicht mal $\mathbb{C}$ -wertige) Fkt.

$$f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi \mapsto (\cos \varphi, \sin \varphi) \\ \mathbb{C} \quad e^{i\varphi}$$

Wäre MWS gültig, gäbe es $\xi \in (0, 2\pi)$ mit

$$\underline{21-7} \quad (0,0) = f(2\pi) - f(0) = 2\pi f'(\xi) = 2\pi(-\sin \xi, \cos \xi)$$

was $\sin \xi = 0 = \cos \xi$ impliziert.

Dies tritt für kein $\xi \in \mathbb{R}$ ein.

k 16.2

offen, zush.

Ist $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar auf Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

mit $Df(x) = 0$ für alle $x \in \Omega$, so ist

f konstant auf Ω .

Bw. im kball-einfacher
und allgemeiner.

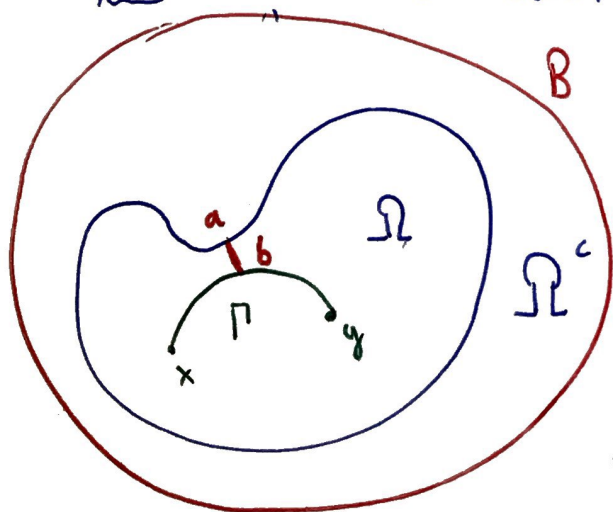
Bw: Für bel. $x, y \in \Omega$ müssen

$f(x) = f(y)$ zeigen.

II) Ω Gebiet $\Rightarrow \exists$ Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$

mit $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$. Sei $\Gamma = \gamma([0, 1])$

Bh: $D := \text{dist}(\Gamma, \Omega^c) = \inf_{b \in \Gamma, a \in \Omega^c} |a - b| > 0$



Bw: Es ex Ball

$x, y \in B \subset \mathbb{R}^d$ mit

$D = \inf_{b \in \Gamma, a \in A} |a - b|$

$b \in \Gamma, a \in A$

21-8 für $A = \Omega^c \cap \overline{B}$

I) Spezialfall $\Omega = B$ Ball (ist konvex)

$$\Rightarrow [x, y] \subset B$$

MWS 16.1 $\Rightarrow \exists \xi \in [x, y]$ mit

$$f(x) - f(y) = \underbrace{f'(\xi)}_{=0} (x - y) = 0$$

Ok.

Nun ist aber $f: A \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}, (a,b) \mapsto |a-b|$
 stetig, Γ beschr & abgeschl. in $\mathbb{R}^d$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R} \\ A \times \Gamma & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R} \end{array} \quad \text{in } \mathbb{R}^{2d}.$$

also kompakt.

$\Rightarrow \exists a_0 \in A, b_0 \in \Gamma$ mit

$D = |a_0 - b_0| > 0$ da A, Γ disjunkt.

γ stetig, $[0,1]$ kompakt $\Rightarrow \gamma$ glm. stetig

Also ex ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$t, s \in [0,1], |t-s| \leq \frac{1}{m} \Rightarrow \|\gamma(t) - \gamma(s)\| < D$$

Setze $t_j = \frac{j}{m} \quad (j = 0, 1, \dots, m)$

$$x_j = \gamma(t_j)$$

und

$$B_j = B_D(x_j)$$

Dann: $x_j \in \Gamma \Rightarrow B_j \subset \Omega$

Distanz zum Rand
eingehalten

$$\text{Da } |t_j - t_{j-1}| \leq \frac{1}{m} \Rightarrow \|x_j - x_{j-1}\| < D$$

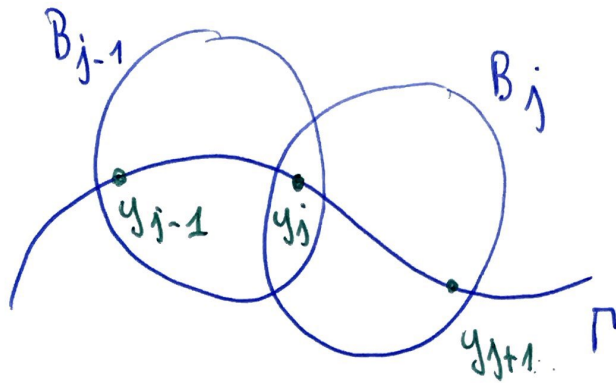
$$\Rightarrow \emptyset \neq B_j \cap B_{j-1} \ni y_j$$

Auf jedem B_j ist f konstant nach I)

$$f(y_{j+1}) = f(y_j) = f(y_{j-1})$$

auf B_j

auf B_{j-1}



Analog wie in Ama I gilt Taylorformel auch für $f \in C^k(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Wir betrachten nur 2. Ordnung.

D. 16.3 (Hesse - Matrix)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ und $x \in \Omega$.

Dann heißt

$$H_f(x) := \begin{pmatrix} D_1 D_1 f(x) & \dots & D_1 D_d f(x) \\ \vdots & & \vdots \\ D_d D_1 f(x) & \dots & D_d D_d f(x) \end{pmatrix}$$

Hesse - Matrix von f in x .

21-11 Wg. Ann $f \in C^2$ und S.v. Schwarz ist

x symmetrisch:

$$D_j D_k f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x) = D_k D_j f(x).$$

S. 16.4 (Taylor - Formel)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f \in C^2(\Omega)$, $a \in \Omega$ und $\varepsilon > 0$ s.d. $B_{2\varepsilon}(a) \subset \Omega$ (offen). Dann gilt

$\forall h \in B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + Df(a)(h) + \frac{1}{2} h^T Hf(a) h + r(h) \\ &= f(a) + \langle \text{grad } f(a), h \rangle + \text{---} || \text{---} \end{aligned}$$

mit Restterm $r(h) = \underline{\underline{o(\|h\|^2)}}$.

Bw: Satze: $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \underbrace{f(a+th)}_{=g(t)}$

Kettenregel für $g = f \circ \gamma$

$$g'(t) = Df(a+th)(h) = \sum_{k=1}^d D_k f(a+th) h_k \quad \text{und}$$

$$g''(t) = \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^d D_j D_k f(a+th) h_k h_j = h^T Hf(a+th) h$$

Bw:

$$\text{Setze } \gamma: (-2, 2) \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^d, \quad t \mapsto a+th$$

$$g := f \circ \gamma: (-2, 2) \rightarrow \mathbb{R}$$

Wende Kettenregel an:

$$\frac{d}{dt} g(t) = \sum_{j=1}^d (D_j f)(\gamma(t)) \underbrace{\frac{d\gamma_j}{dt}(t)}_{= h_j} = (Df)(a+th) \cdot h$$

Wende Kettenregel auf g'' an

$$g''(t) = \frac{d}{dt} (g'(t)) = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^d h_j (D_j f)(\gamma(t))$$

$$= \sum_{j=1}^d h_j \sum_{k=1}^d (D_k D_j f)(\gamma(t)) h_k$$

$$= h^T (Hf)(a+th) h \quad \text{quadratische Form}$$

Hesse-Matrix

Taylor - Formel 2. Ordn. für $g: (-2, 2) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} g(1) & = & g(0) + g'(0) + \frac{1}{2} g''(\xi), \xi \in (0, 1) \\ \parallel & & \parallel \\ f(a+h) & & f(a) \end{array}$$

Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + Df(a)h + \frac{1}{2}h^T H f(a)h \\ &\quad - \frac{1}{2}h^T H f(a)h + \frac{1}{2}h^T H f(a+\xi h)h \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{=: r(h)} \\ &=: r(h) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} h^T (-H f(a) + H f(a+\xi h)) h$$

Cauchy - Schwarz $\Rightarrow$

$$|r(h)| \leq \frac{1}{2} \| [H f(a) - H f(a+\xi h)] h \| \cdot \|h\|$$

Lipschitz-st.

$$\leq \frac{1}{2} \| H f(a) - H f(a+\xi h) \| \cdot \|h\| \cdot \|h\|$$

$$\stackrel{11.24}{=} \frac{1}{2} \left(\sum_{j,k=1}^d |D_j D_k f(a) - D_j D_k f(a+\xi h)|^2 \right)^{1/2} \|h\|^2$$

$\rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$ da $f \in C^2$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0}$$

Die Taylor - Formel ist zentral für die
Untersuchung von

17. Lokale Extrema

D. 17.1 a) Sei X ein metrischer
Raum (z.B. Teilmenge des $\mathbb{R}^d$), $a \in X$, und
 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Wir sagen:

f hat globales Maximum in a $\Leftrightarrow \forall x \in X$:
 $f(x) \leq f(a)$

f hat striktes ---||--- $\Leftrightarrow \forall x \in X \setminus \{a\}$:
 $f(x) < f(a)$

Dann heißt $f(a)$ globales Maximum von f
und a (strikte) globale Maximalstelle von f .

f hat lokales Maximum in a $\Leftrightarrow$

$\exists \varepsilon > 0$ s.d. $B_\varepsilon(a) \subset X$ und $\forall x \in B_\varepsilon(a): f(x) \leq f(a)$

.... striktes ... $\Leftrightarrow$... und $\forall x \in B_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$:

$f(x) < f(a)$

Dann heißt $f(a)$ lokales Maximum und a (strikte) lokale Maximalstelle von f .

Entsp. sind (striktes) globales / lokales

Minimum von f und $-f$

Minimalstelle von f definiert.

f nimmt in a ein Extremum an, falls es dort ein Minimum oder ein Maximum annimmt und a heißt dann Extremalstelle von f .

S. 17.2 (Notwendiges krit. für Extremalstelle im Inneren)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $a \in \Omega$ eine lokale Extremalstelle von f und f diffbar in a . Dann gilt

$$(Df)(a) = 0 \in \mathbb{R}^d$$

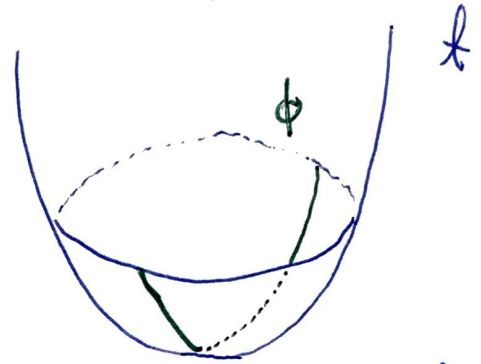
Bw: $a \in \Omega$ offen $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(a) \subset \mathbb{R}^d$

Sei $h \in \mathbb{R}^d$ & $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(a+th)$
 $\|h\|=1$

Dann: $\phi(0) = f(a)$ ist lokales Extremum von ϕ , da von f .

Ama I $\Rightarrow \phi'(0) = 0$

Kettenregel (s.o.)



a Minimalst. von f und ϕ

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= Df(a+th) \cdot h \\ &= \text{grad } f(a+th) \cdot h\end{aligned}$$

Ist $\phi'(0) = 0$, so $\text{grad } f(a) \perp h$.

Dieser Schluß gilt insbesondere für Basisvektoren $h = e_j \Rightarrow (\text{grad } f(a))_j = D_j f(a) = 0$

Dies gilt für $j = 1, 2, \dots, d \Rightarrow Df(a) = 0 \quad \square$

D 17.3 Ist $a \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und

$f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar in a mit $(Df)(a) = 0$,

22-5 so heißt a kritische Stelle von f .

Insgesamte ist jede Extremalstelle eine kritische Stelle, aber nicht umgekehrt, wie zeigt:

Bsp. 17.4

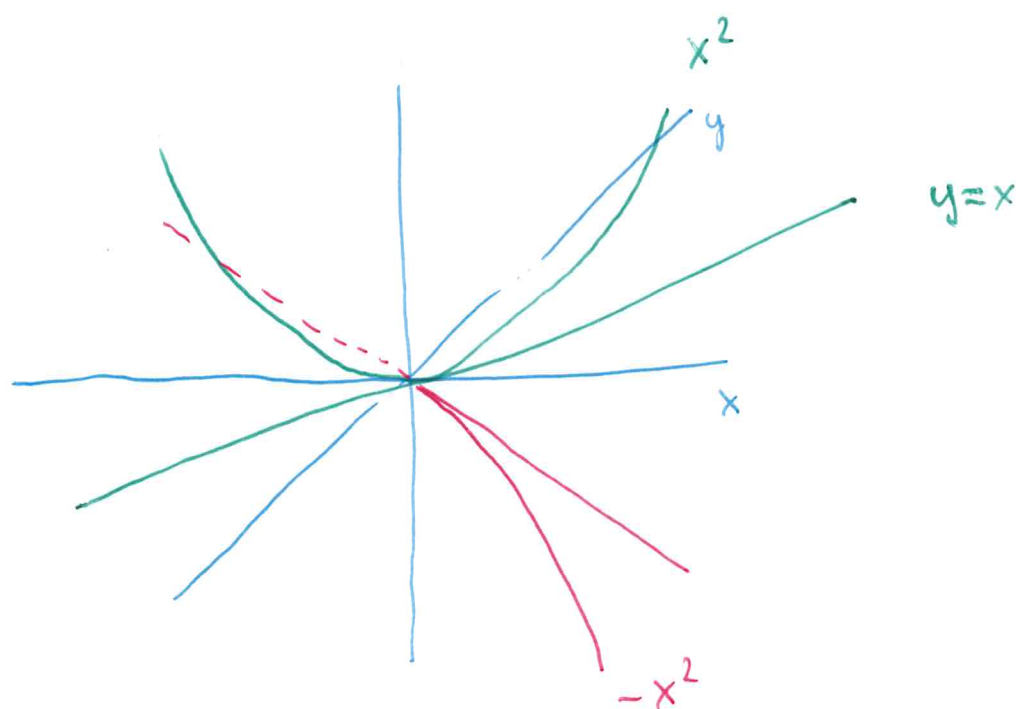
Sei $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x \cdot y$

$$D_1 D_1 g = 0 \quad D_2 D_2 g = 0 \quad D_1 D_2 g = 1 = D_2 D_1 g$$

$$D_1 g(x,y) = y, \quad D_2 g(x,y) = x \Rightarrow Dg(0,0) = (0,0)$$

$g(0,0) = 0$ ist kein Extremalwert,

da $g(\varepsilon, \varepsilon) = \varepsilon^2 > 0$, $g(\varepsilon, -\varepsilon) = -\varepsilon^2 < 0$.



Der Graph von g sieht wie ein Sattel aus.

$\overline{22}$
 $\underline{6}$ $(0,0)$ wird Sattelpunkt von g genannt

Wie in Ama I müssen wir uns für ein hinreichendes Kriterium für ein Maximum auf die zweite Ableitung (also die Hessematrix $(Hf)(a)$) beziehen.

D. 17.5

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix und $q = q_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die zugeh. quadratische Form

$$q(x) = x^T A x = \langle x, Ax \rangle$$

Dann heißt A

positiv definit $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : q(x) > 0$

semi $q(x) \geq 0$

negativ definit $q(x) < 0$

indefinit $\Leftrightarrow \exists x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $q(x) > 0$ & $q(y) < 0$

q ist (quadratisch) homogen:

22-7 $\forall t \in \mathbb{R} : q(tx) = t^2 x^T A x = t^2 q(x)$

S. 17.6 Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f \in C^2(\Omega)$, $a \in \Omega$
eine kritische Stelle von f . Dann gelten

(a) $(Hf)(a)$ positiv definit $\Rightarrow f$ hat in a
streiktes lokales Minimum

(b) $(Hf)(a)$ negativ definit $\Rightarrow f$ hat in a
streiktes lokales Maximum

(c) $(Hf)(a)$ indefinit $\Rightarrow f$ hat in a kein ^{um} Extrem-
In diesem Fall nennen wir a Sattelpunkt von f .

Bw Sei $\varepsilon > 0$ s., d. $B_\varepsilon(a) \subset \Omega$, $f \in C^2 \Rightarrow$

Taylor-Formel für $h \in B_\varepsilon(0)$

$$f(a+h) - f(a) = \langle \cancel{\text{grad } f(a)}, h \rangle + \frac{1}{2} \langle h, Hf(a)h \rangle + r(h)$$

da a kritischer P.

$$= \frac{1}{2} q_{Hf(a)}(h) + r(h)$$

mit $r(h) = o(\|h\|^2)$

für $h \rightarrow 0$.

(a) $Hf(a)$ positiv definit $\Rightarrow$ S. 17.7 S.u.

$\exists$ konstante $m > 0$ mit

$$q_{Hf(a)}(h) \geq 4m \|h\|^2 \quad (x \in \mathbb{R}^d)$$

Wg. $r(h) = o(\|h\|^2)$ ex. ein $\delta \in (0, \varepsilon)$

so dass für alle $h \in B_\delta(0)$: $|r(h)| \leq m\|h\|^2$

$\Rightarrow \forall h \in B_\delta(0) \setminus \{0\}$:

$$f(a+h) - f(a) \geq \frac{1}{2} q_{Hf(a)}(h) - |r(h)|$$

$$\geq 2m\|h\|^2 - m\|h\|^2 = m\|h\|^2 > 0$$

(b) Wende (a) auf $-f$ an.

(c) $Hf(a)$ indefinit $\Rightarrow \exists h, k \in \mathbb{R}^d$

$$\lambda := q_{Hf(a)}(h) > 0 \quad \text{bzw.} \quad \mu := q_{Hf(a)}(k) < 0$$

Wähle $\delta \in (0, \frac{\varepsilon}{\max(\|h\|, \|k\|)})$ klein genug s.d. für $|t| \leq \delta$

$$|r(th)| \leq \frac{\lambda}{4} t^2, \quad |r(tk)| \leq \frac{|\mu|}{4} t^2$$

$$\text{und } f(a+th) - f(a) = \frac{1}{2} \underbrace{q(th)}_{= q_H f(a)} + r(th)$$

Homogenität

$$= q_H f(a)$$

$$\geq \frac{1}{2} t^2 \underbrace{q(h)}_{=\lambda} - \frac{\lambda}{4} t^2 = \frac{\lambda}{2} t^2 > 0$$

so wie

$$f(a+tk) - f(a) = \frac{1}{2} q(tk) + r(tk)$$

$$\leq \frac{1}{2} t^2 \underbrace{q(k)}_{=\mu < 0} + \frac{|\mu|}{4} t^2 = \frac{\mu}{4} t^2 < 0$$

Dabei haben wir benutzt:

$$\begin{aligned} r(tx) &= \|tx\|^2 \varepsilon(tx) \quad \text{mit } \lim_{y \rightarrow 0} \varepsilon(y) = 0 \\ &= t^2 \|x\|^2 \varepsilon(tx) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{|r(tx)|}{t^2} = \|x\|^2 \varepsilon(tx) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

D.h. $r(x) = o(\|x\|^2)$ impliziert $r(tx) = o(t^2)$.

Also nimmt f in jeder Umgebung von a

22-10 | sowohl kleinere als auch gr. Werte als $f(a)$ an.

Exkurs über (in)definite Matrizen ($\text{Lin } A$),
damit wir das hinreichende Kriterium
besser verstehen & anwenden können.

S. 17.7 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrische
Matrix. Dann s. äquivalent.

(i) A ist positiv definit

(ii) $\exists \lambda > 0$ s.d. $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$q_A(x) \geq \lambda_1 \|x\|^2 = q_{\lambda_1 \cdot \text{Id}}(x)$$

Bw: Gilt $q_A(x) \geq \lambda_1 \|x\|^2$ dann

$$q_A(x) > 0 \quad \text{für } x \neq 0 \quad \checkmark$$

Nun (i) $\Rightarrow$ (ii)

Nach Bsp. 15.4 ist $x \mapsto q_A(x)$ (total) diffb.
insbesondere stetig.

$S = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1 \}$ ist beschr & abgesch.,
also kompakt

$\Rightarrow q_A$ nimmt Minimum auf S an, d.h.

$$\exists p \in S \quad \text{mit} \quad \inf_{x \in S} q_A(x) = q_A(p) > 0 \quad (*)$$

da pos. defn.

Setze $\lambda_1 := q_A(p)$. Dann gilt $\forall y \in \mathbb{R}^n$

$$q_A(y) = \|y\|^2 \left\langle A \underbrace{\frac{1}{\|y\|} y}_{= x \in S}, \frac{1}{\|y\|} y \right\rangle = \|y\|^2 q_A(x)$$

$$\geq \|y\|^2 \cdot \lambda_1 \quad \text{nach } (*) \quad \square$$

Genaue gilt folgendes

S. 17.8 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrische Matr.

Dann:

A positiv definit $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte von A positiv
Der kleinste davon ist λ_1

A positiv semidefinit $\Leftrightarrow$ alle Eig. W von A sind nicht-negativ

A negativ definit $\Leftrightarrow$ alle Eig. W von A sind negativ

A indefinit $\Leftrightarrow A$ hat sowohl positive als auch negative Eig. W.

S. 17.9 (Hurwitz - Kriterium)

Sei $A = (a_{j,h}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ symm. Matrix
und für $m \in \{1, 2, \dots, m\}$ sei $A_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$
mit $(A_m)_{j,h} = a_{j,h}$ für $j, h \in \{1, \dots, m\}$.

Dann gelten: $A = \left(\underbrace{\left(A_m \right)}_m \right) \}_{m}$

(i) A positiv definit $\Leftrightarrow$

Für alle $m \in \{1, \dots, m\}$ gilt $\det A_m > 0$
Hauptminoren

(ii) A negativ definit $\Leftrightarrow$ $(-1)^{2l} \det A_{2l} = \det A_{2l}$

Für alle $m \in \{1, \dots, m\}$ ist $(-1)^m \det A_m > 0$

(iii) Gibt es $l \in \mathbb{N}$ mit $l \leq \frac{m}{2}$ und

$\det A_{2l} < 0 \Rightarrow A$ ist indefinit $\square$

K 17.10 (Kriterien für $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$)

Sei $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f \in C^2(\mathbb{R})$ und $a \in \mathbb{R}$ kritische
Stelle von f . Dann gelten:

$$(a) \quad \det Hf(a) > 0 \quad \text{und} \quad D_1 D_1 f(a) > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{---} \parallel \text{---} \quad D_2 D_2 f(a) > 0$$

$\Rightarrow f$ hat in a striktes lokales Minimum.

$$(b) \quad \det Hf(a) > 0 \quad \text{und} \quad D_1 D_1 f(a) < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{---} \parallel \text{---} \quad D_2 D_2 f(a) < 0$$

$\Rightarrow f$ hat in a striktes lokales Max.

$$(c) \quad \det Hf(a) < 0$$

$\Rightarrow f$ hat in a Sattelpunkt.

Bsp 17.10 (Semi definite Hesse M.)

$$\text{Sei } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x^2 + y^2 + ay^4$$

$$a, b \in \mathbb{R} \quad \text{allgem.} \quad x^2 + ay^2 + by^4$$

Erste Abl:

$$D_1 f = 2x, \quad D_2 f = 2ay + 4by^3$$

Zweite Abl. (schreibe $D_{ij} f := D_i D_j f$)

$$D_{11} f = 2 \quad D_{22} f = 2a + 12by^2$$

$$\overline{23-2} \quad D_{21} f = 0 = D_{12} f$$

Also $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2a + 12by^2 \end{pmatrix}$

In $(0,0)$ gilt $Df(0,0) = (0,0)$ und

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$$

I Für $a > 0$

hat f in $(0,0)$ ein striktes lokales Min
nach Satz 17.6. Ist dieses ein globales
Minimum?

! Das hängt von b ab!

Ia: Für $b \geq 0$ gilt

$$f(0,0) = 0 < x^2 + ay^2 \leq f(x,y) \text{ für } (x,y) \neq (0,0) \\ \Rightarrow \text{globales Min.}$$

Ib: Für $b < 0$ gilt

$$ay^2 + by^4 = -by^2 \left(-\frac{a}{b} - y^2 \right) = |by^2| \left(\left| \frac{a}{b} \right| - y^2 \right)$$

< 0 sobald $|y| > \sqrt{\left| \frac{a}{b} \right|}$

$\Rightarrow f(0, y) < 0 = f(0, 0)$ sobald $|y| > \sqrt{\left|\frac{a}{b}\right|}$
 $\Rightarrow$ kein glob. Min.

II Für $a = 0$

ist $Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pos. semidefin.

Also ist 17.6 nicht anwendbar!

IIa Ist $b < 0$

so ist $f(0, \varepsilon) = b\varepsilon^4 < 0 = f(0, 0)$

für $\varepsilon \neq 0$, also $f(0, 0)$ kein Minimum!

IIb Ist $b > 0$

so ist $f(0, 0) = 0 < x^2 + by^4 = f(x, y)$

für $(x, y) \neq (0, 0)$, also globales striktes Min.

IIc Ist $b = 0$

so ist $f(0, 0) = 0$ globales, aber kein striktes Minimum, da: $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$f(x, y) = x^2 \geq 0$ aber $f(0, y) = 0 = f(0, 0)$

III Für $a < 0$

ist $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$ indefinit.

$\Rightarrow$ keine Extremalstelle in $(0,0)$

Ähnlich gilt für $g(x,y) = x \cdot y$ aus 17.4

$$(Dg)(0,0) = (y, x) \equiv (0,0) \text{ in } (0,0)$$

$$(Hg)(0,0) = \begin{pmatrix} D_{11}g & D_{21}g \\ D_{12}g & D_{22}g \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{(x,y)}$$

$$\Rightarrow \det(Hg)(0,0) = 0 - 1 < 0$$

$\Rightarrow (Hg)(0,0)$ indefinit nach Hurwitz

$\Rightarrow$ keine Extremalstelle, wie schon
expliz. berechnet.

Bsp. 17.11

Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^4 + x^3 + y^2$

$$\Rightarrow \text{grad } f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 + 3x^2 \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2(4x+3) \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \parallel \\ (0,0) \end{matrix} \Rightarrow y=0 \text{ und } x=0 \text{ oder } x=-\frac{3}{4}$$

Berechne Hesse matrix

$$(Hf)(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 + 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

in kritischen Stellen

$$(Hf)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ p. semi definit}$$

$$(Hf)\left(-\frac{3}{4}, 0\right) = \begin{pmatrix} 12 \cdot \frac{9}{16} - 6 \cdot \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

positiv definit, also ist nach S. 17.6 $\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$ ein striktes lokales Minimum von f .

Was passiert in $(0,0)$?

Wg $\det Hf(0,0) = 0$ hilft uns S. 17.9 & 10

23-6 nicht weiter.

Aber für $t \in (-1, 0)$ gilt

$$f(t, 0) = t^4 + t^3 = \underbrace{t^3}_{< 0} \underbrace{(t+1)}_{> 0} < 0 = f(0, 0)$$

$< f(x, 0)$ für $x > 0$. Also ist
 $(0, 0)$ keine Extremalstelle von f .

Bsp. 17.12

Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y, z) \mapsto 6xy - 3y^2 - 2x^3 - yz^2$$

$$\Rightarrow Df(x, y, z) = (6y - 6x^2, 6x - 6y - z^2, -2yz)$$

Aus $Df(x, y, z) = 0$ folgt sofort $yz = 0$.

Ist $y = 0$, dann auch $x = 0$ und dann $z = 0$.

Ist $z = 0$, so $x = y$ und $0 = 6y - 6x^2 = 6x(1-x)$,

d.h. $x \in \{0, 1\}$.

noch

$\Rightarrow$ kritische Stellen sind $(0, 0, 0)$

$(1, 1, 0)$.

$$(Hf)(x,y,z) = \begin{pmatrix} -12x & 6 & 0 \\ 6 & -6 & -2z \\ 0 & -2z & -2y \end{pmatrix}$$

$$\text{in } (0,0,0): \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det H = 0$$

$\Rightarrow$ Matrizen weder positiv noch negativ definit

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} = 0 - 36 < 0 \quad \text{also}$$

besagt Hurwitz-Kriterium 17.9, dass

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} \text{ indefinit ist, d.h. ex. } h_{\pm} \in \mathbb{R}^2$$

mit

$$\langle h_{\pm}, A h_{\pm} \rangle = \pm 1$$

Dann aber für $x_{+} = (h_{+}, 0)$, $x_{-} = (h_{-}, 0) \in \mathbb{R}^3$

$$\langle x_{\pm}, (Hf)(0,0,0) x_{\pm} \rangle = \pm 1, \text{ also}$$

ebenfalls indefinit, d.h. f hat einen
Sattelpunkt in $(0,0,0)$.

In der Stelle $(1,1,0)$ gilt:

$$\det A_1 = A_1 = -12 < 0$$

$$\det A_2 = \det \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} = +12 \cdot 6 - 6 \cdot 6 = 36 > 0$$

$$\det A_3 = \det \begin{pmatrix} -12 & 6 & 0 \\ 6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \textcircled{-2} \cdot \det A_2 = \\ = -72 < 0$$

Hurwitz-Krit $\Rightarrow Hf(1,1,0)$ negativ definit
 $\Rightarrow f$ hat in $(1,1,0)$ striktes lokales Max.

18 Der Satz über implizite Funktionen

Ihnen sind bereits (mind.) zwei Arten, Teil-
mengen des $\mathbb{R}^d$ zu beschreiben begegnet

Nochstellen gebildet

parametrisierte
Mengen

z. B. bei lin Abb. $L: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$

ist $\ker L = \{x \in \mathbb{R}^d \mid L(x) = 0\}$ ein Nullstellen gebilde

$$\text{konkret: } L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ker L = \left\{ (x, y, z) \mid L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ (x, -x, 0) \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

Parametrisierte Menge

z. B. Kreislinie $S \subset \mathbb{R}^2$

$$S = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 1 \right\} = \left\{ (\cos \varphi, \sin \varphi) \mid \varphi \in [0, 2\pi] \right\}$$

Betrachten Fragestellung

Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und für $c \in \mathbb{R}$

$N_c = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c \right\}$ die

Niveaumenge.

Unter welchen Voraussetzungen kann man

23-10 N_c (zumindest lokal) als Wege /

Kurven, d.h. Graphen einer stetigen
Fkt einer reellen Veränderlichen beschreiben
Genauer: kann man die Gleichung
 $g(x,y) := f(x,y) - c = 0$ auflösen?

Bsp. 18.1:

Sei $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.

Für $(a,b) \in$

$$M_+ = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1, y > 0, g(x,y) = 0 \}$$

gibt es eind. Fkt. $\varphi : (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(a) = b \quad \text{insbesondere } g(a, \varphi(a)) = 0$$

$$\text{für } a \in (-1,1) \quad \text{—}$$

nämlich: $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad x \in (-1,1).$

Test: $g(x, \sqrt{1-x^2}) = x^2 + (1-x^2) - 1 = 0$

Analog ist für

23-11 $M_- = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1, y < 0, g(x,y) = 0 \}$

$$\psi: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(x) = -\sqrt{1-x^2}$$

die eindeutige Parametrisierung von M_- durch $x \in (-1, 1)$, denn

$$g(\underbrace{x}_{\in (-1, 1)}, \underbrace{\psi(x)}_{< 0}) = x^2 + (-\sqrt{1-x^2})^2 - 1 = x^2 + (1-x^2) - 1 = 0$$

Der Punkt $(a, b) = (1, 0)$ erfüllt ebenfalls $g(a, b) = 1^2 + 0 - 1 = 0$, aber ist weder in M_+ noch in M_- enthalten.

In dieser Stelle können wir $g(x, y) = 0$ nicht nach y auflösen, aber nach x :

Es gibt eind. bestimmte Fkt

$$\chi: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ s.d. } \boxed{\chi(0)=1} \text{ und}$$

$$g(\chi(y), y) = 0 \quad \text{für } y \in (-1, 1), \text{ nämlich}$$

$$\chi(y) = \sqrt{1-y^2}. \quad \text{Test: } \chi(0) = 1 \quad \checkmark$$

$$\boxed{23-12} \quad g(\chi(y), y) = 1-y^2 + y^2 - 1 = 0$$

und $x = \chi(y) > 0$ für $y \in (-1, 1)$

Hier wurde pos. Vorz. durch Bed. $\square$

fixiert.

Allgemeiner gilt

Satz über implizite Fkt. 18.2

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{m+1}$ offen, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ und

$(a, b) = (\underbrace{a_1, \dots, a_m}_{\in \mathbb{R}^m}, b) \in \Omega$ mit $f(a, b) = 0$

und $D_{m+1} f(a, b) \neq 0$. Dann gibt es

einen offenen Würfel $W \subset \mathbb{R}^m$ mit

Mittelpunkt in a und ein offenes Intervall

I mit Mittelpunkt b , mit $W \times I \subset \Omega$ s.d.

$\forall x \in W$ die Gl. $f(x, y) = 0$ in I genau
eine Lösung y besitzt, genauer es gibt eine

Fkt $g: W \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, g(x)) = 0$

23
13 für $x \in W$, $g(x) \in I$, $g(a) = b$. Dieses g

und $x = \chi(y) > 0$ für $y \in (-1, 1)$

Hier wurde pos. Vorz. durch Bed. $\square$

fixiert.

Allgemeiner gilt

Satz über implizite Fkt. 18.2

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{m+1}$ offen, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ und

$(a, b) = (\underbrace{a_1, \dots, a_m}_{\in \mathbb{R}^M}, b) \in \Omega$ mit $f(a, b) = 0$

und $D_{m+1} f(a, b) \neq 0$. Dann gibt es

einen offenen Würfel $W \subset \mathbb{R}^M$ mit

Mittelpunkt in a und ein offenes Intervall

I mit Mittelpunkt b , mit $W \times I \subset \Omega$ s.d.

$\forall x \in W$ die Gl. $f(x, y) = 0$ in I genau
eine Lösung y besitzt, genauer es gibt eine

Fkt $g: W \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, g(x)) = 0$

$\boxed{24}$ für $x \in W$, $g(x) \in I$, $g(a) = b$. Dieses g

erfüllt: (*)

$$g \in C^1(W) \text{ und } D_j g(x) = - \frac{(D_j f)(x, g(x))}{(D_{m+1} f)(x, g(x))}$$

für alle $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ und $x \in W$.

—
 W, I haben also die Form

$$W = (a_1 - \beta_1, a_1 + \beta_1) \times \dots \times (a_m - \beta_m, a_m + \beta_m)$$

$$I = (b - \beta_{m+1}, b + \beta_{m+1}) = (b_-, b_+)$$

mit $\beta_1, \dots, \beta_{m+1} > 0$

(Lokale) Existenz & Eind. von g :

BW: Nach Ann ist

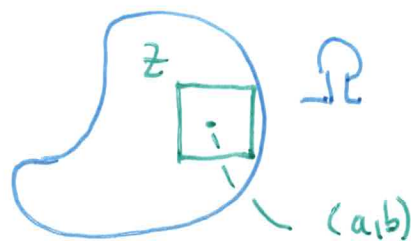
$$z_p := \underbrace{(D_{m+1} f)(a, b)}_{\uparrow} = \frac{\partial f(a, y)}{\partial y} \Big|_{y=b} > 0$$

und $D_{m+1} f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Also ex

$\delta > 0, \beta_{m+1} > 0$ s.d.

$$(D_{m+1} f) \geq p \quad \text{auf } Z := \overline{B_\delta(a)} \times [b_-, b_+]$$

und $Z \subset \Omega$ offen.



Also ist für jedes $x \in \overline{B_\delta(a)}$ die
partielle Funktion:

$$f_x : [b_-, b_+] \rightarrow \mathbb{R}, \quad y \mapsto f_x(y) = f(x, y)$$

streng isotom, insbesondere

$$f(x, b_-) < f(x, b) < f(x, b_+) \quad \text{für } \overline{x \in B_\delta(a)}$$

$$\text{spez. } f(a, b_-) < f(a, b) < f(a, b_+)$$

||

0

$f \in C^1 \Rightarrow f$ stetig $\Rightarrow$ ex. kleiner Würfel wie oben
 $W \subset B_\delta(a)$ s.d.

$$f_+ := \min(x, b_+) > 0$$

$$f_- := \max_{x \in \overline{W}}(x, b_-) < 0$$

$$\text{insbes: } \forall x \in \overline{W}: f(x, b_-) < 0 < f(x, b_+)$$

Stetigkeit von f & ZWS $\Rightarrow \forall x \in W$ hat

Isotonie $\Rightarrow f(x, y) = 0$ genau eine Lsg.

$$y \in I = (b_-, b_+)$$

24-3 insbes. implizit $f(a, y) = 0$ schon $y = b$.

Wegen der $\exists x$ & $\exists$ ind. ist damit eine Fkt

$g: W \rightarrow I$ wohl definiert, s.d.

nach Konstruktion gilt

$$f(x, g(x)) = 0 \quad \text{für } x \in W, \text{ insb. } f(a, g(a)) = 0$$

Stetigkeit

Sei $x \in W$ bel. und $y := g(x) \in I = (b_-, b_+)$

I offen $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ mit $[y - \varepsilon, y + \varepsilon] \subset I$

Nun wieder haben wir die Argumentation von oben für den Punkt (x, y) statt für (a, b) .

$\Rightarrow \exists \alpha > 0$ s.d. $f(\xi, \eta) = 0$ für $\xi \in B_\alpha(x)$

genau eine Lsg. $\eta \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$ besitzt.

Wg der Eindeutigkeit (lokal) muß dann

$\eta = g(\xi)$ sein. Insbes. folgt

$$|g(\xi) - g(x)| = |\eta - y| < \varepsilon \quad \text{für alle}$$

$$\xi \in B_\alpha(x) \Leftrightarrow |\xi - x| < \alpha$$

Dieses Argument können wir für jedes $\tilde{\varepsilon} \in (0, \varepsilon)$ machen. Da $\tilde{\varepsilon} > 0$ dann bel. klein gewählt werden kann, ist die Stetigkeit von g nachgewiesen.

g ist C^1 & Ableit. erfüllt angegebene Formel

Sei $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, $x \in W$, und $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ klein genug, so dass $x + te_j \in W$.

Setze $h := g(x + te_j) - g(x) \in \mathbb{R}$.

Wir wenden zwei mal den MWS aus Ama I.

an: Es ex. $\tau, \theta \in (0, 1)$ s.d.

$$f(x + te_j, y) - f(x, y) = t D_j f(x + \tau te_j, y)$$

$$f(x + te_j, y) - f(x + te_j, y + h) = -h D_{m+1} f(x + te_j, y + \theta h)$$

Setze nun $y = g(x)$ ein,

$$\text{somit } y + h = g(x) + h = g(x + te_j)$$

$$t D_j f(x + \tau t e_j, g(x)) = f(x + t e_j, g(x))$$

$$- \cancel{f(x, g(x))}$$

0 nach Dfm g.

$$- h D_{n+1} f(x + t e_j, g(x) + \theta h)$$

$$= f(x + t e_j, g(x)) - \cancel{f(x + t e_j, g(x + t e_j))}$$

$$= 0$$

Nach Dfm:

$$\frac{g(x + t e_j) - g(x)}{t} = \frac{h}{t} = - \frac{1}{t} \cancel{t} \frac{D_j f(x + \tau t e_j, g(x))}{D_{n+1} f(x + t e_j, g(x) + \theta h)}$$

Nun schicken wir $t \rightarrow 0$, Dies impliziert

wegen der (schon bewiesenen) Stetigkeit

von g:

$$h = h(t) = g(x + t e_j) - g(x) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

Also

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(x + t e_j) - g(x)}{t} = - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{D_j f(x + \tau \cancel{t} e_j, g(x))}{D_{n+1} f(x + \cancel{t} e_j, g(x) + \cancel{\theta} h)}$$

||

$$\boxed{24-6} \quad (D_j g)(x) = - \frac{D_j f(x, g(x))}{D_{n+1} f(x, g(x))} \neq 0$$

Damit haben wir die Differenzierbarkeit beh. Formel bewiesen.

Da $f \in C^1$, sind $D_j f$ und D_{n+1} stetig, somit auch $D_j g$ (nach der Formel (*)) $\square$

Bm 18.3 „Implizites Differenzieren“

(a) Setzen wir bereits voraus, dass g existiert und C^1 ist, kann man

(*) einfacher herleiten:

$$\forall x \in W: f(x, g(x)) = 0$$

impliziert für $h(x) = f(x, g(x))$

$$0 = \frac{d}{dx_j} h(x) = (D_j f)(x, g(x)) \quad \begin{array}{l} \swarrow \text{wird nur} \\ \text{eingesetzt,} \\ \text{nicht abgeleitet.} \end{array} + (D_{n+1} f)(x, g(x)) \frac{\partial g(x)}{\partial x_j}$$

(b) Setzen wir im Satz sogar $f \in C^k$ voraus,

24-7 so folgt mit (*), dass $g \in C^k$.

Ähnlich wie in (a) kann man diese Information nutzen, um mittels implizit differenzieren höhere Abl. von g zu berechnen.

(c) Ist $n=1$, d.h. $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und x, y skalare Variablen, so lautet (*)

$$g'(x) = - \frac{D_1 f(x, g(x))}{D_2 f(x, g(x))}$$

(d) Der S. über implizite Fkt besagt

$$\begin{aligned} & \{ (x, y) \in W \times I \mid f(x, y) = 0 \} \\ &= \{ (x, y) \in W \times I \mid y = g(x) \} = \{ (x, g(x)) \mid x \in W \} \end{aligned}$$

D.h. die Niveaumenge $N_0(f)$ ist also in $W \times I \subset \Omega$ durch den Graphen einer C^1 -Funktion g gegeben

$$N_0(f) \cap (W \times I) = \text{Gr}_g$$

Bsp. 18.4

(a) Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto y^5 + (x^2+1)y + (x^3-4)$

$$\Rightarrow D_2 f(x,y) = 5y^4 + (x^2+1) > 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^2$$

D.h. Ableitungsbed. in S. 18.2 sogar global erfüllt ($\Rightarrow$ globale Isotonie)

Es existiert $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, g(x)) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Formel (*) ergibt

$$g'(x) = - \frac{2xg(x) + 3x^2}{5g(x)^4 + x^2 + 1}$$

$D_1 f(x,y) = 2xy + 3x^2$ implizite Kurvendisk.

Ist x kritischer Punkt von g , d.h. $0 = g'(x)$

$$\text{so } 0 = x(2g(x) + 3x), \text{ d.h. } x=0 \text{ oder}$$

Um zweiten krit. Pkt zu untersuchen: $y = g(x) = -\frac{3}{2}x$

$$\text{Sei } h(x) = f\left(x, -\frac{3}{2}x\right) = -\left(\frac{3}{2}\right)^5 x^5 - (x^2+1)\frac{3}{2}x + x^3 - 4$$

$$\boxed{24-9} \quad = -\left(\frac{3}{2}\right)^5 x^5 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x - 4$$

Wegen $h'(x) = -5 \left(\frac{3}{2}\right)^5 x^4 - \frac{3}{2} x^2 - \frac{3}{2} < 0$

auf ganz $\mathbb{R}$ ist h strikt antoton und

$h(x) = 0$ hat genau eine Lsg $x^* \in \mathbb{R}$.

(da h stetig und $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$

Also gilt

$$0 = h(x^*) = f(x^*, -\frac{3}{2} x^*)$$

$$\Rightarrow g(x^*) = -\frac{3}{2} x^* \Rightarrow \text{krit. Pkt}$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \infty$)

$$\text{Da } h(-1) = \left(\frac{3}{2}\right)^5 - 2 = \frac{179}{32} > 0$$

$$h(0) = -4 < 0$$

ist $x^* \in (-1, 0)$ näherungsweise $x^* \approx -0,80307$

Eine weitere Diskussion ergibt:

$$g(0) \in (1, 2)$$

$$g'(0) = 0$$

$$g''(0) < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

g besitzt in x^*
lokales Minimum

$\Rightarrow g$ hat in 0

isoliertes lok Maximum.

Bsp. 18.5

Parametrisierte Polynome

Seien $a_0, \dots, a_{m-1} \in C^k(\Omega, \mathbb{R}), \Omega \subset \mathbb{R}^n$

und
$$P(x, y) = y^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j(x) y^j$$

Ist $y_0 \in \mathbb{R}$ einfache Nullstelle von $P(x_0, \cdot)$, d.h.

$$P(x_0, y_0) = 0 \quad \text{bzw.} \quad D_y P(x_0, y_0) \neq 0$$

so ist 18.2 anwendbar und es ex

offene $W \ni x_0$, $I \ni y_0$ und $g \in C^k(W, I)$

mit $y = g(x)$ als einzige Lsg. von

$$P(x, y) = 0 \quad \text{in} \quad \{(x, y) \mid x \in W, y \in I\}$$

19 Extrema mit Nebenbedingungen

Bsp 1 Betrachte die stetige Fkt.

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x, y) = xy$$

Nach dem S. Max. & Minimum nimmt φ auf der beschränkten & abgeschlossenen (also kompakten) Menge

$$K = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2 \}$$

sein Min & sein Max an.

Wie berechnen wir diese Werte?

Liegt ein Extremum (x_0, y_0) von φ im offenen Inneren

$$K^\circ = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 2 \},$$

so muss dort eine kritische Stelle vorliegen,

d.h. $(0, 0) = (D\varphi)(x_0, y_0) = (y_0, x_0)$

Aber offensichtlich ist $(0,0)$ keine
Extremalstelle von φ (wie schon
gezeigt).

Also liegen alle Minimal- und Maximal-
stellen von $\varphi|_k : k \rightarrow \mathbb{R}$

auf der Teilmenge:

$$M := \partial k = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2 = 0 \}$$

d.h. dem Rand von k . Es sind also die
Minima & Maxima der Fkt

$$\varphi|_M : M \rightarrow \mathbb{R}$$

zu bestimmen, d.h. die Extrema von

φ unter der Nebenbedingung

$$f(x,y) := x^2 + y^2 - 2 = 0$$

Hier sind wir mit zwei Variablen x, y gestrafft. Die NB reduziert die Freiheitsgrade um Eins, so dass

$$\partial k = \{ (2 \cos \varphi, 2 \sin \varphi) \mid \varphi \in [0, 2\pi) \}$$

ein 1-dimensionalles Gebilde (genauer: eine Mannigfaltigkeit) ist.

Bei Fkt $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ kann man m

Nebenbedingungen stellen, wobei $m \leq m-1$ sein soll, damit die resultierende

Menge

$$\begin{array}{ccc} m - m & \geq 1 & \text{Dimensionen hat} \\ \uparrow & \uparrow & \\ \text{Variablen} & \text{Gleichungen.} & \\ & (\text{unabh}) & \end{array}$$

und wir über diesen freien Parameter noch optimieren können.

Da gegen würde z.B. bei $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
und den beiden NB

$$\left. \begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ F(x, y) &= x - y = 0 \end{aligned} \right\} (x)$$

nur der Punkt $(x, y) = (x, x) = (1, 1)$

und -1 $(x, y) = (-1, -1)$ den

Nebenbed. genügen. Um dann Max & Min zu finden müsste ich nur die beiden

Werte $\varphi(1, 1)$ und $\varphi(-1, -1)$ vergleichen.

S. 19.2 (Lagrange Multiplikatoren)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ offen, $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ und

$f = (f_1, \dots, f_m) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ mit $m < n$,

$M := \{x \in \Omega \mid f(x) = 0\}$, $x_0 \in M$, $\text{Rang } J_f(x_0)$

$= m$ und $\varphi|_M: M \rightarrow \mathbb{R}$ habe ein lokales
Extremum in x_0 .

Dann existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ mit

$$D\varphi(x_0) = \sum_{j=1}^m \lambda_j Df_j(x_0)$$

Die $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ heißen Lagrange-Multiplikatoren

Bw:

Wir beschränken uns auf den Fall einer Nebenbedingung, d.h. $m=1$. Dann

bedeutet $\text{Rang } Jf(x_0) = m=1$ schlicht-

weg $\text{grad } f(x_0) \neq (0, \dots, 0)$, d.h. es gibt

mind. einen Koeffiz $D_j f(x_0) \neq 0$. Nach-

Umnummerierung können wir annehmen,

dass $D_m f(x_0) \neq 0$, insbes ist

$$\lambda := \frac{D_m \varphi(x_0)}{D_m f(x_0)} \in \mathbb{R} \text{ wohldefm. (xx)}$$

Da $x_0 =: (\underbrace{a_1, \dots, a_{m-1}}_{= a \in \mathbb{R}^{m-1}}, b) \in M$, gilt

$f(a, b) = f(x_0) = 0$. Dann ist der S. über

25-5 implizite Fkt 18.2 anwendbar und

die Gl. $f(x_1, \dots, x_{m-1}, y) = 0$ lokal
nach y auflösen.

Es gibt also ein $r > 0$ und eine eindeut.

Fkt. $g: V := \underbrace{B_r(a)}_{\subset \mathbb{R}^{m-1}} \rightarrow I := (b-r, b+r)$
so dass folgendes gilt:

$$g(a) = b \quad \text{für alle } (x_1, \dots, x_{m-1}) \in V$$

$$f(x_1, \dots, x_{m-1}, g(x_1, \dots, x_{m-1})) = 0$$

für $j \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ gilt:

$$D_j f(a, b) + D_m f(a, b) D_j g(a) = 0 \quad (\text{xxx})$$

⌈ vgl. Formel (*) in S. 18.2 und speziell B. 18.3 (a)!

Achtung: Dort ist letzte Koordinate $n+1$
hier n $\perp$

Nun definieren wir

$$h: V \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x_1, \dots, x_{m-1}) = \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_{m-1}, \\ g(x_1, \dots, x_{m-1}) \end{pmatrix}$$

Da φ in $x_0 = (a, b)$ ein lokales Extremum besitzt
 (z.B. $\varphi(x_0) \geq \varphi(x)$ für $|x_0 - x|$ klein), hat
 h in $a \in V$ ein lokales Extremum
 (dann $h(a_1, \dots, a_{m-1}) = h(a) = \varphi(a, g(a)) \geq \varphi(x)$)
 $\geq \varphi(x_1, \dots, x_{m-1}, g(x_1, \dots, x_{m-1}))$
 $= h(\text{---})$

$\parallel$
 b
 $\underbrace{\hspace{1cm}}$
 $= x_0$

Also gilt für jedes $j \in \{1, \dots, m-1\}$
 für die part. Abl.

$$0 = D_j h(a) = D_j \varphi(\underbrace{a, g(a)}_{(a,b)=x_0}) + \underbrace{D_m \varphi(a, g(a))}_{\uparrow} D_j g(a)$$

$$= D_j \varphi(x_0) + D_m \varphi(x_0) (D_j g)(a)$$

$$\stackrel{(xx)}{=} D_j \varphi(x_0) + \lambda D_m f(x_0) D_j g(a)$$

$$\stackrel{(xxx)}{=} D_j \varphi(x_0) - \lambda D_j f(x_0)$$

Also $D_j \varphi(x_0) = \lambda D_j f(x_0)$ für $j = 1, \dots, m-1$

25
-7 Für $j=m$ folgt diese Gl. aus (xx). □

Bsp. 19.3 Wir greifen auf

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto xy$$

Suche Max & Min von

$$\varphi|_M : M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{wobei } M = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 - 2 = 0 \}$$

$$\text{d.h. mit NB } f(x, y) = x^2 + y^2 - 2 = 0 \quad \perp$$

Für $(x, y) \in M$ gilt

$$Df(x, y) = (2x, 2y) \neq (0, 0)$$

Also ist $\text{Rang } Df(x, y) = 1 = m$

Ist $(x, y) \in M$ eine Extremalstelle, besagt

Satz 19.2, dass ein $\lambda \in \mathbb{R}$ ex mit

$$\begin{aligned} D\varphi(x, y) &= \lambda Df(x, y) \quad \text{d.h.} \\ (y, x) &= \lambda (2x, 2y) \quad (*) \end{aligned}$$

Ist $x=0$ so auch $y=0$, was $x^2+y^2=2$,
d.h. $(x,y) \in M$ widerspricht.

$\Rightarrow x \neq 0$, ebenso $y \neq 0$

Division: in $(\square)$ $\frac{y}{x} = \frac{x}{y}$

$$\Leftrightarrow y^2 = x^2$$

$$\Leftrightarrow y = \pm x$$

$$\text{Also } 2 = x^2 + y^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 1$$

$\Rightarrow 4$ mögl. Extremalstellen:

$$(1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)$$

auswerten in φ

$\downarrow$

1

-1

-1

1

Also sind $(1,1)$ und $(-1,-1)$ globale
Maximalstellen von $\varphi|_M$ und $(1,-1)$
und $(-1,1)$ glob. Minimalstellen.

Mind map Ana II

Analogie zu
Integralen



(absolute) Konvergenz von Reihen



Kriterien

Wisches



Umformulierung
von Folgenkonvergenz.

viele bekannte Fkt
von dieser Form:

Polynom, Exp-Fkt
Geom. Reihe.

Sinus, Cosinus

asymptotisches

Verhalten Leichter
zu untersuchen als
z.B. mit L'Hospital.

Funktionenreihen. insb.

Potenzreihen

Taylorreihen

T-Formel, Rest-Darst.

Extremwerte.

Folgen von Fkt



Konvergenzbegriffe

Achtung:

Im $\mathbb{R}^M$ sind alle

Normen äquivalent

hier nicht

abstrakte

$$\frac{r(h)}{\|h\|} = \left\| \frac{f(a+h) - f(a)}{\|h\|} + L \left(\frac{h}{\|h\|} \right) \right\|$$

(schöne) Koordinaten transform.

parameter abh. Int.

part und totale

Abl in $\mathbb{R}^d$

→ (bei uns von A. zum Bev. / ist aber von

Konvergenz begriffe

Metrik, Norm,

geometrische Begr.

Konv. v. Folgen.

Wegzusammenhang

Wichtige Spezialfälle:

in $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$

... $\Leftrightarrow$ Konvergenz d.

Koeffizienten.

$$\frac{r(h)}{\|h\|} = \left\| \frac{f(a+h) - f(a) + L(h)}{\|h\|} \right\| \rightarrow 0 \text{ unabh. Interesse}$$

höhere Abl., z.B.
S.v. Schwanz, Hesse-M.

$df(a)(h)$

→ Dfm. der Stetigk.

auf metr. Räumen.

dieser Block schräg nach oben!

Analog zu Ana I untersuchen / b.w. wir mit diesen

Hilfsmitteln:

MWS, Taylorformel (2. Ord. quadr. Restterm)

(Lokale) Extrema

→ implizite Fkt $\Leftrightarrow$

mit Nebenbed.

Anwendung z.B.:

in der Realität habe ich

manchmal viele Infos überfht

aber keine Formel $\rightarrow$ Untersuchen!