

$$= \sigma(x) - 2 \cos \frac{1}{x^2}$$

oszilliert und hat keinen Limes für $x \rightarrow 0$.

$\Rightarrow D_1 f$ unstetig in $(0,0)$

Symmetrie
 $\Rightarrow$ auch $D_2 f$ -||-

Analog wie im Ana I gilt:

Summenregel

S. 15.12 Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $a \in \Omega$, $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$

diffbar in a . Dann ist auch $\lambda f + g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$

diffbar in a und

$$D(\lambda f + g)(a) = \lambda Df(a) + Dg(a)$$

Also gilt für die entsp. Jacobi-Matrizen

$$J_{\lambda f + g}(a) = \lambda J_f(a) + J_g(a)$$

Bw: Übung

S. 15.13 (kettenregel)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $\Sigma \subset \mathbb{R}^m$ offen, $a \in \Omega$

20-10 $f: \Omega \rightarrow \Sigma$, $g: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^l$, $b = f(a) \in \Sigma$,

f diffbar in a , g diffbar in b . Dann ist
 $g \circ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^l$ diffb. in a und

$$\begin{aligned} D(g \circ f)(a) &= Dg(b) \circ Df(a) \\ &= Dg(f(a)) \circ Df(a) \end{aligned}$$

Verkettenng von lin. Abb.

Für die Funktionalmatrizen gilt:

$$J_{g \circ f}(a) = J_g(b) J_f(a) = J_g(f(a)) J_f(a)$$

Matrixmultiplikation.

Bw: Laut Ann ex. lin Abb $L = Df(a)$

und $Q = Dg(b)$ und Fkt $g: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^m$,

$\tau: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, der art, dass $\|g(h)\| = o(\|h\|)$

und $\|\tau(k)\| = o(\|k\|)$ [d.h. es ex $\varepsilon: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$

mit $\lim_{k \rightarrow 0} \varepsilon(k) = 0$ und $\tau(k) = \|k\| \varepsilon(k)$

und

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + g(h)$$

$$g(b+k) = g(b) + Q(k) + r(k) \quad \underline{\text{29.6}}$$

Wähle speziell $k := f(a+h) - b$, d.h.

$$f(a+h) = b + k$$

Dann

$$(g \circ f)(a+h) = g(b+k)$$

$$= g(b) + Q(k) + r(k)$$

$$= g(b) + Q(\underbrace{f(a+h) - f(a)}_{= L(h) + g(h)}) + r(k)$$

$$= (g \circ f)(a) + Q(L(h) + g(h)) + r(k)$$

Bh: $QL = D_{g \circ f}$, d.h.

$$R(h) := Q(g(h))$$

$$+ r(f(a+h) - b)$$

muß $R(h) = o(h)$
sein.

Q ist Lipschitz-stetig:

$$\|Q(g(h))\| \leq \underbrace{\|Q\|}_{\text{Lipschitz-konstante}} \|g(h)\|$$

Also
$$\frac{\|Q(g(h))\|}{\|h\|} \leq \|Q\| \frac{\|g(h)\|}{\|h\|} \rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0$$

$$\frac{\tau(f(a+h)-b)}{\|h\|} = \frac{\overbrace{\|f(a+h)-f(a)\|}^{L(h)+g(h)}}{\|h\|} \varepsilon \left(\underbrace{f(a+h)-f(a)}_{\rightarrow 0} \right)$$

✓
→ 0
f stetig

$$\leq \frac{\|L\| \|h\|}{\|h\|} + \frac{\|g(h)\|}{\|h\|}$$

$$\leq \|L\| + \text{const.}$$

da: * L ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-konstante $\|L\|$

* Nullfolgen sind beschränkt.

Also:

$$\frac{\tau(f(a+h)-b)}{\|h\|} = \text{beschr. Fkt} \times \text{Nullfolge} \varepsilon$$

□