Analysis II für Lehramt, SoSe 2022

Lösungsskizzen für Blatt 01

Aufgabe 1) Da die Funktion f nach Voraussetzung beschränkt ist, ist auch g wegen $g|_{[a,b)} = f$ beschränkt. Sei

$$M := \sup_{x\in[a,b]} |g(x)|.$$

Wir zeigen nun, dass g sogar Riemann-integrierbar ist. Dazu genügt es zu zeigen (vgl. Analysis I), dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z des Intervalls $[a,b]$ gibt derart, dass für die zugehörigen Ober- und Untersummen $O_Z(g)$ und $U_Z(g)$ die Ungleichung $O_Z(g) - U_Z(g) < \varepsilon$ gilt. Sei also $\varepsilon > 0$. Wir wählen $c \in (a,b)$ mit

$$2M \cdot (b-c) < \varepsilon/2.$$

Wegen $g|_{[a,c]} = f|_{[a,c]}$ ist g auf $[a,c]$ nach Voraussetzung Riemann-integrierbar, so dass es eine Zerlegung Z' von $[a,c]$ gibt mit $O_{Z'}(g) - U_{Z'}(g) < \varepsilon/2$. Mit der Zerlegung $Z := Z' \cup \{b\}$ von $[a,b]$ erhalten wir nun einerseits

$$O_Z(g) = O_{Z'}(g) + (b-c) \sup_{x\in[c,b]} g(x) \leq O_{Z'}(g) + M \cdot (b-c)$$

und andererseits

$$U_Z(g) = U_{Z'}(g) + (b-c) \inf_{x\in[c,b]} g(x) \geq U_{Z'}(g) - M \cdot (b-c).$$

Insgesamt ergibt sich

$$O_Z(g) - U_Z(g) \leq O_{Z'}(g) - U_{Z'}(g) + 2M \cdot (b-c) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also ist g tatsächlich Riemann-integrierbar.

Es bleibt zu zeigen, dass

$$\lim_{d\nearrow b} \int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dies folgt nun wegen

$$\int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^d g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_d^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

für $d \in (a,b)$ aber sofort aus

$$\left|\int_d^b g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_d^b |g(x)|\,\mathrm{d}x \leq M \cdot (b-d) \xrightarrow[d\nearrow b]{} 0.$$

Bemerkung. (1) Unter den gegebenen Voraussetzungen handelt es sich bei $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ also nur formal um ein uneigentliches Integral. Durch (beliebiges) Fortsetzen der Funktion f auf $[a,b]$ lässt sich dies sofort auf ein herkömmliches Riemann-Integral auf $[a,b]$ zurückführen.

(2) Ein einfaches, bereits aus Analysis I bekanntes, Beispiel für die hier diskutierte Situation ist die Funktion $f\colon [0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(1/(1-x))$.

Aufgabe 2) (a). Für das erste Integral (über $[1,\infty)$) verwenden wir Teil (c) (alt. Teil (a)) von Aufgabe 2) auf Blatt 0 mit $f(t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ und $g(t) = 1/t^2$. Tatsächlich existiert das uneigentliche Integral $\int_1^\infty 1/t^2\,\mathrm{d}t$ (leicht), und es gilt $\lim_{t\to\infty} f(t)/g(t) = \lim_{t\to\infty} t^{x+1}\mathrm{e}^{-t} = 0$.

Für das zweite Integral (über $(0,1]$) können wir direkt $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \le t^{x-1}$ für alle $t > 0$ abschätzen und das Majorantenkriterium verwenden, denn

$$\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}t^x\Big|_0^1 = \frac{1}{x}$$

existiert. Alternativ kann man hier aber natürlich auch analog mit Teil (c) von Aufgabe 2) auf Blatt 0 argumentieren.

(b). Eine partielle Integration liefert direkt

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -t^x\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^\infty + x\int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = x\Gamma(x).$$

Insbesondere gilt dann $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ferner gilt natürlich

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^\infty = 1.$$

Die Identität $\Gamma(n+1) = n!$ folgt dann sofort per Induktion.

(c). Mit der Substitution $s = t^{1/2} \in (0,\infty)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) &= \int_0^\infty t^{-1/2}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s + \int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Aufgabe 3) (i). Es gilt $\int_0^\infty x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \Gamma(3) = (3-1)! = 2! = 2$.

(ii). Die Substitution $y = 2x$ führt auf

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\Gamma(1) = \frac{1}{2}.$$

Damit haben wir auch $\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-2|x|}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = 1$.

(iii). Die Substitution $y = 2\sqrt{x}$ führt auf

$$\int_0^\infty \frac{\exp(-2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = \Gamma(1) = 1.$$

(iv). Wir schreiben $x^{7/8} = \exp(7/8 \cdot \ln x)$ und erhalten mit der Substitution $x = \mathrm{e}^{-8y}$ (d.h. $y = -\ln(x)/8$), dass

$$\int_0^1 \frac{\ln^2(x)}{x^{7/8}}\,\mathrm{d}x = 8\int_0^\infty \frac{64y^2}{\mathrm{e}^{-7y}}\,\mathrm{e}^{-8y}\,\mathrm{d}y = 512\int_0^\infty y^2\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = 512\cdot\Gamma(3) = 1024.$$

(v). Die Substitution $x = \mathrm{e}^{-2y}$ (d.h. $y = -\ln(x)/2$) führt auf

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = -2\int_0^\infty \frac{2y}{\mathrm{e}^{-y}}\,\mathrm{e}^{-2y}\,\mathrm{d}y = -4\int_0^\infty y\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = -4\cdot\Gamma(2) = -4.$$

Ferner erhalten wir mit der Substitution $x = \sqrt{y}$ dann auch

$$\int_0^1 \ln(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln(y)}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\cdot(-4) = -2.$$

Aufgabe 4) Sei $q > \limsup_{k\to\infty} a_{k+1}/a_k$. Nach Definition von lim sup sind dann alle bis auf endliche viele Glieder a_{k+1}/a_k kleiner als q, d.h. es gibt $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{k+1}/a_k \le q$ für alle $k \ge k_0$. Umstellen ergibt $a_{k+1} \le a_k \cdot q$ für alle $k \ge k_0$, und eine Induktion nach k (bzw. Iterieren) liefert schließlich

$$a_{k+1} \le a_{k_0}\cdot q^{k-k_0+1} = \frac{a_{k_0}}{q^{k_0}}\cdot q^{k+1} \qquad \forall k \ge k_0.$$

Nach Ziehen der $(k+1)$-ten Wurzel erhalten wir somit

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k+1]{a_{k+1}} \le \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k+1]{\frac{a_{k_0}}{q^{k_0}}}\cdot q = q.$$

Da $q > \limsup_{k\to\infty} a_{k+1}/a_k$ beliebig gewählt war, zeigt dies

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} \le \limsup_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}.$$

Die Ungleichung $\liminf_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \le \liminf_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}$ zeigt man im Falle von $\liminf_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 0$ völlig analog (mit $0 < q < \liminf_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$), und sie ist klar, falls $\liminf_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 0$. Schließlich ist die verbleibende Ungleichung $\liminf_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} \le \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}$ klar nach Definition.