technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Albrecht Seelmann

1. Übungsblatt zur Vorlesung

Analysis II für Lehramt

im Sommersemester 2022

Aufgabe 1) (Eigentliche und uneigentliche Integrale)

Seien $-\infty < a < b < \infty$, und sei $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ beschränkt derart, dass $f|_{[a,c]}$ für alle $c \in (a,b)$ Riemann-integierbar ist. Sei schließlich $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $g|_{[a,b)} = f$.

Zeigen Sie:

Die Funktion g ist Riemann-integrierbar, das uneigentliche Riemann-Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 2) (Die Gammafunktion)

(a) Zeigen Sie, dass die beiden (uneigentlichen) Integrale $\int_1^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ und $\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ für alle $x > 0$ existieren.

Wir definieren nun die *Gammafunktion* $\Gamma\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t + \int_1^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t, \quad x > 0.$$

Zeigen Sie:

(b) Für alle $x > 0$ gilt $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Speziell gilt $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Es gilt

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Bemerkungen:

- Wegen (b) kann man die Gammafunktion als Fortsetzung der Fakultät auffassen.
- Mit tiefer gehenden Techniken kann man mit Hilfe der Darstellung aus (c) zeigen, dass $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Aufgabe 3) (Einige uneigentliche Integrale)

Bestimmen Sie den Wert der folgenden uneigentlichen Integrale durch zurückführen auf bekannte Werte der Gammafunktion aus Aufgabe 2:

(i) $\int_0^\infty x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

(ii) $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$ und $\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-2|x|}\,\mathrm{d}x$

(iii) $\int_0^\infty \frac{\exp(-2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(iv) $\int_0^1 \frac{\ln^2(x)}{x^{7/8}}\,\mathrm{d}x$

(v) $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ und $\int_0^1 \ln(x^2)\,\mathrm{d}x$

bitte wenden

Erinnerung: Ist (a_k) eine nach oben (bzw. unten) beschränkte Folge reeller Zahlen, so existiert der größte (bzw. kleinste) Häufungspunkt $\limsup_{k\to\infty} a_k$ (bzw. $\liminf_{k\to\infty} a_k$) von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 4)

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_k > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ derart, dass die Folge $(\frac{a_{k+1}}{a_k})_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Zeigen Sie, dass dann auch die Folge $(\sqrt[k]{a_k})_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist und

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \liminf_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} \leq \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

gilt.

Hinweis: Man zeige zunächst, dass es zu $q > \limsup_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\sqrt[k+1]{a_{k+1}} \leq \sqrt[k+1]{\frac{a_{k_0}}{q^{k_0}}} \cdot q$$

für alle $k \geq k_0$.