Prof. Dr. Ivan Veselić   Dr. Albrecht Seelmann

0. Übungsblatt zur Vorlesung

Analysis II für Lehramt

im Sommersemester 2022

Hinweis: Die Aufgaben auf diesem Blatt stellen einen Rückgriff auf uneigentliche Integrale aus der Analysis I Vorlesung dar und bilden eine Brücke zu Reihen, die zu Beginn der Analysis II untersucht werden. Die Aufgaben sind nicht zur Abgabe vorgesehen und werden bereits in den Übungen in der ersten Woche der allgemeinen Vorlesungszeit besprochen.

Erinnerung: Seien $-\infty < a < b \leq \infty$, und sei $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion derart, dass für alle $c \in (a,b)$ die Einschränkung $f|_{[a,c]}$ Riemann-integrierbar ist. Wir sagen, dass das *uneigentliche (Riemann-)Integral* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert, wenn der Grenzwert $\lim_{c \nearrow b} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ in $\mathbb{R}$ existiert. In diesem Fall setzen wir

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{c \nearrow b} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 1) (Uneigentliche Integrale)

Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert:

(i) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1-x)\,\mathrm{d}x$ (ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ (iii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ (iv) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 2) (Integrationskriterien)

Seien $-\infty < a < b \leq \infty$, und seien $f, g\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ derart, dass $f|_{[a,c]}$ und $g|_{[a,c]}$ für alle $c \in (a,b)$ Riemann-integrierbar sind. Zeigen Sie:

(a) (Majorantenkriterium) Ist $|f(x)| \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b)$ und existiert das uneigentliche Integral $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, so existiert auch das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, und es gilt

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(b) (Minorantenkriterium) Ist $0 \leq g(x) \leq f(x)$ für alle $x \in [a,b)$ und divergiert $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ im Sinne von $\lim_{c \nearrow b} \int_a^c g(x)\,\mathrm{d}x = \infty$, so gilt auch $\lim_{c \nearrow b} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \infty$.

(c) Sind f und g beide positiv und existiert $M := \lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} > 0$, so existiert das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ genau dann, wenn auch $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ existiert.
Was ergibt sich im Fall $M = 0$?

(d) Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren:

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x$ (ii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^2+x^4}\,\mathrm{d}x$ (iii) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{1+x+x^2}\,\mathrm{d}x$