HANDSCHRIFTLICHE NOTIZEN
ANALYSIS I LEHRAMT
IM WINTERSEMESTER 2021/2022

PROF. DR. IVAN VESELIĆ

Inhaltsverzeichnis

CAVEAT EMPTOR — ES IST, WIE ES IST.

Die Vorliegende Datei beinhaltet meine handschriftlichen Notizen, anhand deren ich die Vorlesung gehalten habe. Manchmal bin in der Vorlesung selbst von den Notizen abgewichen, im großen und ganzen hielt ich mich aber recht eng daran. An manchen Stellen habe ich die Notizen nach der Vorlesung nochmal nachbearbeitet.

Es gibt sicherlich eine Reihe von kleineren Fehlern (Schreibfehler, Vorzeichenfehler, etc.). Die Notizen können das eigene Denken und Nachvollziehen der Schritte und Argumente nicht ersetzen. Im Zweifelsfalle konsultieren Sie die angegebene Literatur.

QUELLEN UND BEZÜGE

In der Vorlesung bezog ich mich insbesondere auf die Skripte [Bru21, Kab18, Len17], die mir die Kollegen Rainer Brück, Winfried Kaballo und Daniel Lenz freundlicherweise zu Verfügung gestellt haben, sowie die Bücher [For16, Kab00, Koe04a, Tao16a].

Als weitere Literatur können zum Beispiel die anderen im Literaturverzeichnis aufgeführten Bücher nützlich sein.

Ich bedanke mich bei den Assistenten der Vorlesung, Herrn A. Iskandarov, Frau F. Lemming, Herrn A. Seelmann und insbesondere Herrn A. Dicke.

I.V., Dortmund den 4. Februar 2022

LITERATUR

[Bru21] Rainer Brück. Analysis I–III für Lehramt Gymnasium, 2021. TU Dortmund, unpublished manuscript.

[For16] Otto Forster. *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen.* Heidelberg: Springer Spektrum, 2016.

[For17a] Otto Forster. *Analysis 2. Differentialrechnung im* $\mathbb{R}^n$*, gewöhnliche Differentialgleichungen.* Wiesbaden: Springer Spektrum, 2017.

[For17b] Otto Forster. *Analysis 3. Maß- und Integrationstheorie, Integralsätze im* $\mathbb{R}^n$ *und Anwendungen.* Wiesbaden: Springer Spektrum, 2017.

[FS13] Otto Forster and Thomas Szymczak. *Übungsbuch zur Analysis 2. Aufgaben und Lösungen.* Heidelberg: Springer Spektrum, 2013.

[FW17] Otto Forster and Rüdiger Wessoly. *Übungsbuch zur Analysis 1. Aufgaben und Lösungen.* Heidelberg: Springer Spektrum, 2017.

[Heu08] Harro Heuser. *Lehrbuch der Analysis. Teil 2.* Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2008.

[Heu09] Harro Heuser. *Lehrbuch der Analysis. Teil 1.* Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2009.

[Kab97] Winfried Kaballo. *Einführung in die Analysis II.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 1997.

[Kab99] Winfried Kaballo. *Einführung in die Analysis III.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 1999.

[Kab00] Winfried Kaballo. *Einführung in die Analysis I.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 2000.

[Kab18] Winfried Kaballo. Vorlesung Analysis I / Lehramt, 2018. TU Dortmund, unpublished manuscript.

[Koe04a] Konrad Königsberger. *Analysis 1.* Berlin: Springer, 2004.

[Koe04b] Konrad Königsberger. *Analysis 2.* Berlin: Springer, 2004.

[Len17] Daniel Lenz. Analysis I–II Notizen, 2017. FSU Jena, unpublished notes.

[Tao16a] Terence Tao. *Analysis I*, volume 37. Singapore: Springer; New Delhi: Hindustan Book Agency, 2016.

[Tao16b] Terence Tao. *Analysis II*, volume 38. Singapore: Springer; New Delhi: Hindustan Book Agency, 2016.

11.10.2021

1 Reelle Zahlen

Intuitiv bekannt von geometrischen oder physikalischen oder ökonomischen Größen:

- Grundfläche eines Zimmers
- Temperatur eines Körpers
- Kontostand / Aktienkurs

Notwendigkeit, Struktur der reellen Zahlen genauer zu verstehen, z.B. um Grenzwert von Differenzenquotienten mit hilfe immer kleinerer $\varepsilon > 0$ zu berechnen, oder um zu verstehen, warum manche Polynome Nullstellen haben und manche nicht.

Führen nun die reellen Zahlen axiomatisc ein. Alle bekannten Rechenregeln ergeben sich daraus.

Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ erfüllt folgende

Def 1 (körperaxiome)

Eine nichtleere Menge K heißt körper falls sie folgende Eigenschaften besitzt:

(K 1) Additive Verknüpfung

Es gibt eine Abbildung $+ : K \times K \to K$

$$(a,b) \longmapsto a+b$$

genannt Addition, die dem Paar (a,b) die Summe a+b zuordnet.

(K 2) Assoziativität d. Addition

Für alle $a,b,c \in K$ gilt

$$(a+b)+c = a+(b+c) \quad = a+b+c$$

Dürfen also klammern weglassen und schreiben

(K 3) Neutrales Element der Addition

Es gibt ein $n \in K$, so dass für alle $a \in K$ gilt $n+a = a+n = a$

(K 4) Inverses Element bzgl. Addition

Zu jedem $a \in K$ gibt es ein $x \in K$, so dass $x+a = a+x = n$

(K,+) ist kommutative Gruppe

(K5) Kommutativgesetz d. Addition

Für bel. $a, b \in K$ gilt

$$a + b = b + a$$

(K6) Multiplikative Verknüpfung

Es existiert eine Abb. $\cdot : K \times K \to K$

$$(a, b) \longmapsto a \cdot b$$

die dem Paar (a, b) das Produkt $a \cdot b$ zuordnet

(K7) Assoziativg. d. Multiplikation

Für bel. $a, b, c \in K$ gilt

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$$

(K8) Neutrales El. der Multiplikation

Es gibt ein Element $e \in K \setminus \{n\}$, so dass für bel. $a \in K$ gilt: $a \cdot e = a$

$e \cdot a =$

(K9) Inverses bzgl. Multiplikation

zu jedem $a \in K \setminus \{n\}$ gibt es ein $y \in K$ mit $y \cdot a = a \cdot y = e$

(K10) kommutativ g. der Multiplikation

Für bel. $a, b \in K$ gilt $a \cdot b = b \cdot a$

$(K \setminus \{n\}, \cdot)$ ist kommutative Gruppe.

Bisher stehen Addition u. Mult·plikation (fast) zusammenhanglos nebeneinander und sind zum Verwechs. öhnlich.

(K11) Distributiv ges.

Für bel. $a, b, c \in K$ gilt

$$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$$

$$\textcircled{=} \quad a \cdot c + b \cdot c$$

Punkt vor Strich

$a \in K$ bedeutet: a ist ein Element der Menge K

Eine Menge „ist eine Gesamtheit von wohldefinierten, unterscheidbaren Elementen."

Die aus der Lin - A. bekannten Zahlenmengen $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$

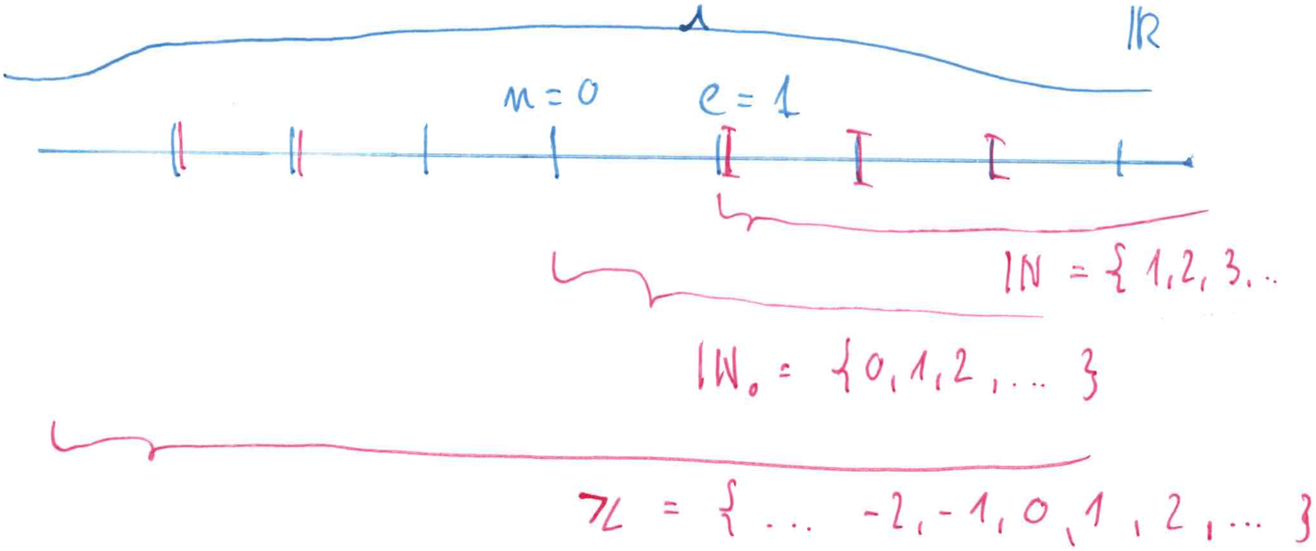
sind jeweils ein Körper mit

der üblichen Addition und Multiplikation, wobei dann

$$n = 0$$

$$e = 1$$ sind.

Auch $\mathbb{C}$ ist ein Körper, wobei man hier die Definition der Addition & Multiplikation anpassen muss.



Ist $\mathbb{N}$ ein Körper?

Nein: Additives neutrales El. fehlt

Ist dann $\mathbb{N}_0$ ein Körper?

Nein: Es fehlt add. Inverses zu 2.

Ist $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, ...\}$ ein kö.?

Nein: Es fehlt multipl. Inverses zu 2.

Eindeutigkeit in k3 k4 | K8 k9

Das neutrale El. $\overset{n}{e}$ der $\overset{\text{Addition}}{\text{Multiplikation}}$ ist eindeutig bestimmt.

Denn: Sei $\tilde{n}$ ein weiteres El. mit Eigensch. wie in k3. Dann kann man

$$n + \tilde{n}$$

auf 2 Arten darstellen:

$$n \underset{\substack{\uparrow \\ \tilde{n} \text{ ist neutrales El.}}}{=} n + \tilde{n} \underset{\substack{\uparrow \\ n \text{ ist neut. El}}}{=} \tilde{n}$$

Für $a \in k$ ist das El x aus (k4) mit

$$a + x = n$$

eindeutig bestimmt. Wir nennen es daher das additive Inverse von a (oder inverses El. von a bzgl. Addition) und bezeichnen es mit

$$x = -a.$$

Damit haben wir das „Minuszeichen definiert“.

(K 4) impliziert, dass für bel. $a, b \in K$ die Gl.

$$a + c = b$$

genau eine Lsg. c besitzt, nämlich

$$c = b + (-a)$$

wofür wir abkürzend

$$c = b - a$$

schreiben.

Analog ist zu $a \in K \setminus \{0\}$ das El. y aus K 9 eind. bestimmt und wird das multiplikative Inverse von a genannt und mit

$$y = a^{-1} = \frac{1}{a} \quad \text{bez.}$$

Wieder hat zu bel. $a, b \in K$ die Gl.

$$a \cdot c = b$$

genau eine Lsg. c, nämlich

$$c = b \cdot a^{-1} = b \cdot \frac{1}{a} = \frac{b}{a}$$

Kurzschreibweise

I. F. lassen wir den Multiplikationspunkt häufig weg und schreiben

$$ab \quad \text{für} \quad a\cdot b$$

Die bekannten Rechenregeln in $\mathbb{R}$ (oder auch $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{C}$) folgen nun.

Notation / Schreibweise

Für $m \in \mathbb{N}$ und $a \in K$ setze

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ mal}}$$

und $a^0 = e$

Falls $a \neq n$ setze auch

$$a^{-m} = \underbrace{\frac{1}{a}\,\frac{1}{a}\,\cdots\,\frac{1}{a}}_{m\text{-mal}} = \left(\frac{1}{a}\right)^m$$

wie eben definiert

Damit folgen die Potenzregeln: Für $a,b \in K\setminus\{n\}$ und $n,m \in \mathbb{Z}$ gelten:

$$(ab)^n = a^n b^n, \quad a^m a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{m\cdot n}$$

Notation Für zwei Mengen M und N bedeutet

$M \subset N$, dass M echte Teilmenge von N ist, oder $M = N$ gilt.

$M \cap N = \{ x \in M \mid x \in N \} = \{ x \mid x \in M \, \underline{\text{und}} \, x \in N \}$

den (Durch-)Schnitt von M und N

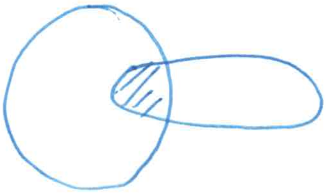
$M \cup N = \{ x \mid x \in M \, \underline{\text{oder}} \, x \in N \}$

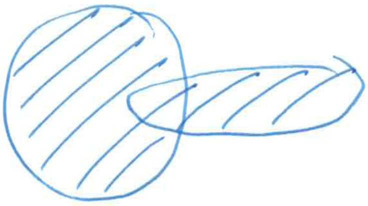
die Vereinigung von M und N

(Dieses „oder" ist nicht ausschließlich.)

Insbesondere ist

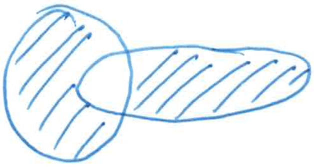
$$M \cap N \subset M \cup N$$





$M \setminus N = \{ x \in M \mid \underbrace{x \notin N}_{x \text{ ist nicht El. von } N} \}$ M ohne N

$M \Delta N = (M \cup N) \setminus (M \cap N)$ symmetrische Differenz



(Damit kann man ein ausschließliches „oder" simulieren.)

In der Mathematik benutzt man zur „stenographischen" Schreibweise Quantoren und Implikationspfeile.

$\forall$ bedeutet „für alle"

$\exists$ „es existiert"

$\Rightarrow$ impliziert, erzwingt

$\Leftarrow$ folgt aus

$\Leftrightarrow$ gleichbedeutend zu

$:$ „(so dass) gilt"

Bsp: ⊗ Kurzschreibweise für (K9)

$$\forall\ a \in K \setminus \{n\}\ \exists\ x \in K : a \cdot x = e$$

⊗ $M \subset N$ ist gleichbedeutend zu

$$x \in M \Rightarrow x \in N$$

Dies kann man auch schreiben als

$$x \in N \Leftarrow x \in M$$

ⓧ Gilt sogar $M = N$, kann man dies ausdrücken durch

$$x \in M \Leftrightarrow x \in N$$

Manche Zahlen sind größer als andere

Def 2 (Angeordneter Körper)

Ein Körper K heißt *angeordnet*, falls eine nicht leere Teilmenge P von K existiert, die Folgendes erfüllt

(O 1) Für $a \in K$ gilt genau eine der drei Aussagen

$$a \in P, \quad a = n, \quad -a \in P$$

(O 2) Für $a, b \in P$ gelten

$$a + b \in P, \quad ab \in P$$

Axiom (0)

Ein $a \in K$ heißt

positiv, falls $a \in P$

negativ, falls $-a \in P$

Analog zu Potenzgesetzen

Für $m \in \mathbb{N}$ setzen wir $m\,a = \overbrace{a + \dots + a}^{m\text{-mal}}$

$a \in K$ und $(-m)\,a = \underbrace{m(-a)}_{\text{schon defn}}$

Setze $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Nullelen im } \mathbb{Z}}}{0} \cdot a = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Nullelem. in } K}}{n}$

<u>Dann gelten:</u> für $m, l \in \mathbb{Z}$, $a, b \in K$

$$m(a+b) = ma + mb$$

$$ma + la = (m+l)\,a$$

$$l(ma) = (l \cdot m)\,a$$

Wdh:

$\forall\, a \in K$ gilt $a^0 = e$, insbes $n^0 = e$

$$\left(\prod_{j=m}^{\ell} a_j\right)\cdot\left(\prod_{j=m}^{\ell} b_j\right) = \prod_{j=m}^{\ell} (a_j \cdot b_j)$$

$$\prod_{j=m}^{\ell} a_j^N = \left(\prod_{j=m}^{\ell} a_j\right)^N \quad \text{für bel. } N \in \mathbb{N}_0$$

<u>Bsp</u>

$$\sum_{j=m}^{\ell} a = (\ell - m + 1)\, a \quad \text{falls } \ell \geq m$$

$$\sum_{j=m}^{m} a_j = a_m \quad , \quad \prod_{j=m}^{m} a_j = a_m$$

$$\prod_{j=m}^{\ell} a = a^{(\ell - m + 1)}$$

Summenzeichen & Produktzeichen

Für $m, l \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq l$ und

$a_m, a_{m+1}, \dots, a_l \in K$ Körper setze

$$\sum_{j=m}^{l} a_j = a_m + a_{m+1} + \dots + a_l$$

$$\prod_{j=m}^{l} a_j = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_l$$

j heißt Lauf- oder Summationsindex

Für $m > l$ setze

$$\sum_{j=m}^{l} a_j = n \qquad \text{„leere Summ"}$$

$$\prod_{j=m}^{l} a_j = e \qquad \text{„leeres Produkt"}$$

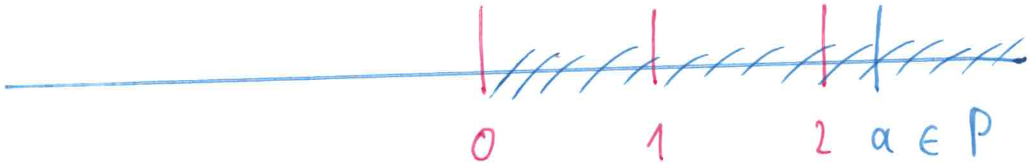
$$\prod_{j=m}^{l} a_j = a_m \cdot a_{m+1} \dots \cdot a_l$$

Sind auch $c, b_m, \dots, b_l \in K$ so gelten

$$\sum_{j=m}^{l} a_j + \sum_{j=m}^{l} b_j = \sum_{j=m}^{l} (a_j + b_j), \quad \sum_{j=m}^{l} c a_j = c \sum_{j=m}^{l} a_j$$

P heißt Menge der positiven Elemente.

$\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ sind angeordnete Körper



Def 3 (Ordnungsrelation)

Sei K ein angeordneter Körper und $a,b\in K$.

Gilt $b-a\in P$, heißt a kleiner als b

im Symbolen $a<b$

oder $b>a$

Gilt $b-a\in P\cup\{n\}$, heißt a kleinergleich b

symbolisch $a\leq b$

oder $b\geq a$

a heißt größer / größergleich als b, wenn $a>b$ / $a\geq b$

Insbes. sind für $a\in K$ die Auss. $a>0$ und $a\in P$ gleichbedeutend.

Insbes. gilt $a>0 \Leftrightarrow a\in P$

„$<$" nennt man Ordnungsrelation auf K

Im $\mathbb{R}$ bedeutet $a<b$, dass a links von b liegt.

Wie vertragen sich Addition und Multiplikation mit der Ordnungsrelation?

Satz 4 Sei K ein angeordneter Körper. Dann gelten:

(1) Für $a, b \in K$ gilt genau eines von:

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b$$

(2) Für $a, b, c \in K$ mit $a < b$ & $b < c$ folgt $a < c$.

(3) Sind $a, b, c \in K$ mit $a < b$, so gilt $a + c < b + c$

(4) Sind $a, b, c \in K$ mit $a < b$, so gilt

$$c > n \Rightarrow ac < bc$$

und $$c < n \Rightarrow ac > bc$$

(5) Ist $a \in K \setminus \{n\}$, so ist $a^2 > n$, insbes. ist $e > n$

(6) Für $a, b \in K$ mit $n < a < b$ gilt

$$n < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

(7) Sind $a, b \in K$ mit $a < b$, so existiert ein $c \in K$ mit $a < c < b$.

<u>Bw</u> (3) & (5) als Übg.

(1) Für die Differenz $b - a \in K$ gilt ja genau eine der 3 Aussagen

$$b - a \in P \,, \quad b - a = n \,, \quad \underbrace{a - b = -(b-a)}_{\text{Begründen Sie dies}} \in P$$

Setze nun Dfn. von „<" ein.

(2)
$$\left.\begin{array}{l} a < b \Rightarrow b - a \in P \\ b < c \Rightarrow c - b \in P \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c - a = \\ \underset{\substack{\cap \\ P}}{(c-b)} + \underset{\substack{\cap \\ P}}{(b-a)} \in P \end{array}$$

(4) Für $a < b$ und $c > n$ gelten
$$\left.\begin{array}{l} b - a \in P \\ c \in P \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} P \ni (b-a)c \\ = bc - ac \end{array}$$

Für $a < b$ und $c < n$ gelten
$$\left.\begin{array}{l} b - a \in P \\ -c \in P \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} ac - bc \\ = (a-b)c \\ = (b-a)(-c) \\ \in P \end{array}$$

$\Rightarrow bc < ac$

(6) Vorüberlegung: Beh: $a > n \Rightarrow \frac{1}{a} > n$

Bw: Aus (5) folgt $a \cdot \frac{1}{a} = e > n$

Aus (4) folgt:

Wäre $\frac{1}{a} < n$, so wäre $n = n\frac{1}{a} > a\frac{1}{a} = e$,

was Widerspruch zu ↗ ergäbe.

Wäre $\frac{1}{a} = n$, so auch $e = a \cdot \frac{1}{a} = a \cdot n = n$,

was wieder ein ↯ ist.

Demnach bleibt nur die 3. Möglichkeit in (O2).

Da $n < a < b$, gilt $a, b \in P$ und $b - a \in P$.

Nach (O2) auch $ab \in P$

nach Vorüb. auch $\frac{1}{ab} \in P$

Damit gilt für Prod. $\frac{1}{ab}(b - a) \in P$

$$= \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

also $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

(7) Vorüberlegung: Setze $f := (e+e)^{-1} = \frac{1}{2}$

Beh: $a = f(a+a)$

Bw: $a+a = ea + ea = (e+e)a$

$$\Rightarrow f(a+a) = \underbrace{f(e+e)}_{=e} a = ea = a$$

Zu $a < b$ setze nun $c := f(a+b)$

Mittelwert

Nach Vorauss. $a+a < a+b < b+b$ ⊗

$$a+b = f^{-1} c = (e+e)c = c+c$$

⊗
$$\Rightarrow f(a+a) < f(a+b) = f(c+c) < f(b+b)$$

$$\overset{NR}{\Rightarrow} a < c < b$$ kürzen ∎

Korollar / Folgerung 5

a) Ein angeordneter Körper hat unendlich viele Elemente

b) Sind $a, b \in K$ und gilt für alle $\varepsilon \in P \subset K$

$$a < b + \varepsilon$$

so folgt schon $a \leq b$

Bw a) K enthält (mind.) zwei Elem. $u < e$.

Wir zeigen sogar für alle $m \in \mathbb{N}$

Beh (m): Es ex $c_m, c_{m-1} \in K$ s.d.

$$u < c_m < c_{m-1}$$

wobei wir $c_0 = e$ setzen.

Bw mit vollst. Induktion über m

$\boxed{\text{Beh (1)}}$ ist die Auss.

$\exists\ c_1 \in K$ mit $u < c_1 < e$

Diese ist wahr wg. (7) in Satz 4

Induktionsanker

Wir nehmen nun an, die Induktionsannahme

$\boxed{\text{Beh (m)}}$ gilt

Induktionsschritt

Dann ex. wieder wg (7) ein $c = c_{m+1} \in K$,

s.d. $u < c_{m+1} < c_m$

Damit gilt auch $\boxed{\text{Beh (m+1)}}$.

Bei b) verwenden wir einen Widerspruchsbeweis: Ist $a \leq b$ falsch, so gilt $a > b$.

wg Trichotomie in (O1).

Def 6 (Intervalle)

Sei k ein angeordneter Körper, $a, b \in k$ mit $a < b$.

Dann setzen wir:

$[a,b] := \{x \in k \mid \underbrace{a \leq x \leq b}_{a \leq x \text{ und } x \leq b}\}$ Das ist ein abgeschlossenes Intervall

$(a,b) := \{x \in k \mid a < x < b\}$ offenes I.

$(a,b] := \{x \in k \mid a < x \leq b\}$ halboffenes I.

$[a,b)$ $a \leq x < b$ ||

$[a,\infty)$ $a \leq x$

$(-\infty,b]$ $x \leq b$

$(-\infty,b)$ $x < b$

(a,∞) $a < x$

$(-\infty,\infty) = k$

Def 7 Seien k angeordneter Körper, $A \subset k$, $m, M \in A$. Dann heißt

m kleinstes El. oder Minimum von A,

falls $m \leq a$ für alle $a \in A$

Dann setzen wir $\min A = m$.

M größtes El. oder Maximum von A,

falls $a \leq M$ für alle $a \in A$

Dann setzen wir $\max A = M$

Bsp 8 Für $A := [n, e) \subset K$ gilt

$\min A = n$, dagegen existiert $\max A$ nicht, denn: e kann nicht $\max A$ sein, da es nicht in A ist.

Wäre $a \in A$ das $\max A$, so gilt $a < e$, also gibt es nach (7) in S. 4 ein $c \in K$ mit

$$a < c < e$$

Damit ist $c \in A$ und a nicht das gr. El. in A.

Satz 9 Sei K angeordneter Körper und $A = \{x_1, \dots x_n\} \subset K$ endliche Teilm.

Dann besitz A ein kleinstes und ein größtes Element.

Bw: Duch Induktion nach der Mächtigkeit n von A.

Ind. Anf: $n=1$, d.h $A=\{x_1\}$

Dann $x_1 =$ max A, $=$ min A

Ind Schritt Die Aussage gelte für alle

n-elementigen Mengen $B \subset K$.

Sei $A \subset K$ $(n+1)$-elementig. Lässt sich also

schreiben als $A = \{x_1, \dots x_n, x_{n+1}\}$.

Setze $B := \{x_1, \dots, x_n\}$. Nach Ind. Ann.

existiert ein $m = x_j \in B$ mit

$$m \leq x_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

Vergleiche m mit x_{n+1}:

Ist $\boxed{m \leq x_{n+1}}$, dann ist $m = \min A$

Ist $\boxed{m \geq x_{n+1}}$, dann ist $x_{n+1} = \min A$

hier ist „=" jeweils ausgeschl., da Mengenel. von A unterschiedlich

S. 10 (Wohlordnungssatz)

Sei $A \subset \mathbb{N}$ nicht leer (in Symbolen: $A \neq \emptyset$)

Dann besitzt A ein Minimum.

Bw: Da $A \neq \emptyset$ ex. $a \in A$. Setze $B = A \cap \{1, \dots, a\}$

$\Rightarrow$ B endl. Menge

S. 10 $\Rightarrow$ $m = \min B$ existiert.

offensichtlich $\underline{m \leq a}$

Beh: $m = \min A$

Bw: $b \in A$ bel.

Ist $b \leq a$, so $b \in B$, daher $b \leq \min B = m$

Ist $b > a$, implizier Transitivität $b > m$ ■

D. 11 (Betrag)

Sei k angeord. K. und $x \in k$. Dann heißt

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq n \\ -x, & x < n \end{cases}$$

(Absolut-) Betrag von x und

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x > n \\ 0 & x = n \\ -1 & x < n \end{cases}$$

Vorzeichen oder Signum von x.

Bekannt: In $K = \mathbb{R}$ ist $|x|$ Abstand von x zu 0.
und $|x-y|$ zwischen Punkten x, y auf Zahlengerade.

S. 12 (Eigenschaften d. Betrages)

Sei K angeord. Kör. und $a, x, y, r \in K$ mit $r > n$.
Dann gelten:

(1) $|x| \geq 0$

$|x| = 0 \iff x = 0$

(2) $|-x| = |x|$

$-|x| \leq x \leq |x|$

(3) $|xy| = |x||y|$

$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ falls $y \neq n$

(4) $|x+y| \leq |x| + |y|$ Δ-Ungleichung

(5) $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$ 2. -||-

(6) $|x-a| \leq r \iff a-r \leq x \leq a+r$

Bw: $\uparrow$ Mit Fallunterscheidungen.

(7) $x \leq a \leq y \Rightarrow |a| \leq \max\{|x|, |y|\}$

Beweis der Dreiecksungl. (4)

(2) besagt : $-|x| \le x \le |x|$

$-|y| \le y \le |y|$

Fallunterscheidung

$\underline{x > 0 \ \& \ y < 0}$

$\Rightarrow \quad -|x| < x = |x| \quad \& \quad -|y| = y < |y|$

Addieren $\Rightarrow \quad -|x|-|y| < \underline{x+y < |x|+|y|}$

$\Rightarrow \quad \underline{|x|+|y| > -(x+y)}$

$\Rightarrow \quad |x+y| < |x|+|y|$ da beide Vorzeichen abgede.

$\underline{x < 0 \ \& \ y > 0}$

Analog nach Vertauschen von x und y.

$\underline{x \geqslant 0 \ \& \ y \geqslant 0}$

$\Rightarrow \quad x+y \geqslant 0 \Rightarrow \quad |x+y| = x+y = |x|+|y|$

$\underline{x \le 0 \ \& \ y \le 0}$

$\Rightarrow \quad x+y \le 0 \Rightarrow \quad |x+y| = -(x+y) = -x+(-y)$

$= |x| + |y|$

$\square$

2÷2

Bsp. 13 Beschreibe $M = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| < |x-3|\}$

1. Fall $\quad x < 2$

$\Rightarrow \quad x < 3 \quad \Rightarrow \quad |x-2| = 2-x$

$$|x-3| = 3-x$$

In diesem Fall ist Bed. $|x-2| < |x-3|$ immer erfüllt, also $\{x<2\} \subset M$.

2. Fall $\quad 2 \leq x < 3$

$\Rightarrow \quad |x-2| = x-2$

$$|x-3| = 3-x$$

$x-2 < 3-x$ gilt genau wenn $2x < 5$

$$\iff \quad x < \frac{5}{2}$$

Also ist $[2, 3) \cap (-\infty, \frac{5}{2}) \subset M$

3. Fall $\quad 3 \leq x$

$\Rightarrow \quad |x-2| = x-2$

$$|x-3| = x-3$$

Ford. $x-2 < x-3 \iff 3 < 2$ ist nie erfüllt

Also $[3, \infty) \cap M = \emptyset$

$\boxed{2-2a}$ Insges. $M = (-\infty, \frac{5}{2})$

2 Vollständige Induktion und Summenformeln

Lemma / Hilfssatz 1

Für $m \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_m$ aus einem angeordneten Körper K gilt

$$\left| \sum_{j=1}^{m} a_j \right| \leq \sum_{j=1}^{m} |a_j|$$

Direkter intuitiver Bw:

S. 1.12 $\Rightarrow \quad -|a_j| \leq a_j \leq |a_j|$

S. 1.4 $(m-1)$ mal anwenden

$\Rightarrow \quad -|a_1| - \dots - |a_m| \leq a_1 + \dots + a_m \leq |a_1| + \dots + |a_m|$

S. 1.12

$$\Rightarrow \quad |a_1 + \dots + a_m| \leq \max\{ -|a_1| - \dots - |a_m|, \; |a_1| + \dots + |a_m| \}$$

oder mit vollst. Ind.

Induktionsprinzip 2 mit Variante

Es sei $M \subset \mathbb{N}$ eine Menge mit den Eigenschaften.

(a) $1 \in M$

[(b) ~~$n \in M \Rightarrow$~~ $n+1 \in M$]

(b') $\{1, 2, \dots, n\} \subset M \Rightarrow n+1 \in M$

Dann folgt $M = \mathbb{N}$

Praktischere Umformulierung f. Induktionsbew

Induktionsprinzip 3

Sei $n_0 \in \mathbb{Z}$. Für $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$ sei eine Aussage $A(n)$ formuliert. Es gelte

(a) $A(n_0)$ ist wahr.

(b) $\forall\ n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$ gilt

$$A(n) \Rightarrow A(n+1)$$

2. Bw vom Lem 1

Ind. Anker: $\boxed{m = 1}$ $|a_1| \leq |a_1|$

Ind Schritt: $\boxed{m \to m+1}$

$$\left| \sum_{j=1}^{m+1} a_j \right| = \left| \left(\sum_{j=1}^{m} a_j \right) + a_{m+1} \right| \leq \left| \sum_{j=1}^{m} a_j \right| + |a_{m+1}|$$

normale Δ-Ungl

Ind. Annahme

$$\leq \sum_{j=1}^{m} |a_j| + |a_{m+1}| \qquad \square$$

In diesem Abschnitt wollen wir insbesondere einige Summen (mit vielen Termen) ausrechnen.

Bsp 4 Sei $n \in \mathbb{N}$. Gibt es eine geschlossene Formel für

$$\sum_{j=1}^{m} j = 1 + 2 + \ldots + m \quad ?$$

„Verkompliziere zunächst"

$$2\sum_{j=1}^{m} j = \overbrace{\begin{array}{cccc} 1+ & \underset{m+1}{\boxed{\begin{array}{c} 2+ \\ (m-1) \end{array}}} & \ldots + & \underset{m+1}{\boxed{\begin{array}{c} m \\ 1 \end{array}}} \\ +\,m+ & & + \ldots + & \end{array}}^{m \text{ Spalten}} \qquad \text{Trick}$$

$$= m(m+1)$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{m} j = \frac{1}{2} m (m+1)$$

[oder Bw. mit Induktion]

Analoge Frage für multiplikative Verknüpf.

Was ist

$$\prod_{j=1}^{m} j = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m = m!$$

Ähnlich zu Induktionsbeweisen gibt es rekursive Definitionen

Df 5 (Fakultät)

Wir setzen: $0! = 1$, $1! = 1$ und für $m \in \mathbb{N}$

$$(m+1)! = (m+1)\,m!$$

$m!$ heißt **Fakultät von m**.

Betrachte nun Summen mit multiplikativen Termen.

Lem 6 Für $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{j=1}^{m} j^2 = \frac{1}{6}\, m(m+1)(2m+1)$$

Bw Ind. Anf. $\boxed{m=1}$ $1^2 = \frac{1}{6}\, 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$ ✓

Ind. Schritt: In Voraus Aussage gelte für ein $m \in \mathbb{N}$.

Ind. Schluss:

$$\sum_{j=1}^{m+1} j^2 = \sum_{j=1}^{m} j^2 + (m+1)^2$$

$$\overset{\text{I.A}}{=} \frac{1}{6}\, m\,(m+1)\,(2m+1) + (m+1)^2$$

$$= \frac{1}{6}\,(m+1)\left[m\,(2m+1) + 6(m+1)\right]$$

$$= \frac{1}{6}(m+1)\left[2m^2 + 7m + 6\right]$$

$$= \frac{1}{6}(m+1)(m+2)(2m+3)$$ wie beh. □

Lem 7 Für q aus einem körper K und $m \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(e-q^{\dots})\sum_{j=0}^{m} q^j = (e + q + q^2 + \dots + q^j)(e - q)$$

$$= e - q^{m+1}$$

Bw

Distriputiv.

$$(e-q)\sum_{j=0}^{m} q^j = \sum_{j=0}^{m} \cancel{e} q^j - \sum_{j=0}^{m} \overbrace{q q^j}^{q^{j+1}}$$

Index versch.

$$= e + q + q^2 + \dots + q^m$$
$$- q - q^2 - \dots - q^m - q^{m+1}$$

$$= e - q^{m+1}$$ □

korollar 8 Für $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $m \in \mathbb{N}_0$ gelten

a) $$\sum_{j=0}^{m} q^j = \frac{1-q^{m+1}}{1-q}$$

b) Ist sogar $q \in [0,1) \subset \mathbb{R}$, so gelten

$1-q>0$, $1-q^{m+1}<1$, somit

$$\frac{1-q^{m+1}}{1-q} \leq \frac{1}{1-q}$$

c) Für $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$ gilt

$$\sum_{j=0}^{m} x^{m-j} y^{j} = \frac{x^{m+1}-y^{m+1}}{x-y}$$

$\Rightarrow y \neq 0$

<u>Bw von c)</u> Für $x=0$ ist die Beh.

$$\underbrace{x^{m-m}}_{= x^0 = 1} y^{m} = \frac{y^{m+1}}{y}$$ wahr aufgrund Potenz-G.

Für $x \neq 0$ setze $q = \frac{y}{x}$ in Lem 7 ein:

$$\left(1-\frac{y}{x}\right) \sum_{j=0}^{m} \left(\frac{y}{x}\right)^{j} = 1-\left(\frac{y}{x}\right)^{m+1}$$

Multipliziere beide S. mit $x \cdot x^{m}$

$$(x-y) \sum_{j=0}^{m} x^{m-j} y^{j} = x^{m+1}-y^{m+1}$$

Divid. nun durch $x-y$ □

Weiteres Bsp. für einen Induktionsbew.

Dfn 9: Sei A eine endliche Menge. Eine bijektive Abb. $\pi : A \to A$ heißt Permutation von A. $\# A$ bez. die Anzahl der El., d.h. Mächtigkeit, von A.

S. 10 Eine Menge mit N Elementen besitzt genau $N!$ mögliche Anordnungen (unterschiedliche Permutationen).

Bw: Ind Anf $N=1$: Ist $\# A = 1$ so gibt es nur eine Anordnung und $1! = 1$

Ind Schritt: Ist $\# A = N+1$ und $a \in A$, so ist $B := A \setminus \{a\}$ N-elementig.

Sei $a_1, a_2, \ldots, a_N$ eine der (nach Ind. Ann) genau $N!$ Anordnungen von B. Dann kann ich a an $N+1$ Stellen dazwischenschieben:

$a \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a_N$

$a_1 \quad a \quad a_2 \quad a_3 \qquad a_N$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a \quad a_N$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a_N \quad a$

$\Rightarrow$ A hat genau $(N+1)\,N! = (N+1)!$ Anordnungen

$\square$

Bsp 11 Seien $x, y \in \mathbb{R}$.

Alle wissen: $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

manche auch: $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

Wollen Analogon für allgemeine Potenz $m \in \mathbb{N}_0$

Dfn 12 Für $m, l \in \mathbb{N}_0$ mit $l \leq m$ ist der **Binomialkoeffizient** definiert als

$$\binom{m}{l} = \frac{m!}{l!\,(m-l)!}$$

falls $l \neq 0$

$$= \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-l+1)}{l!}$$

und wird mit „n über l" bezeichnet.

Ergänzend setzt man $\binom{n}{l} = 0$, falls $l > n$ ist oder l eine negative ganze Zahl.

Auch diese Größe hat eine kombinatorische Interpretation:

S. 13 Seien $1 \leq l \leq n \in \mathbb{N}$. Es gibt genau $\binom{n}{l}$ Möglichkeiten, aus n Objekten l Stück ohne Berücksichtigung der Reihenfolge auszuwählen.

⌈Wir zählen unterschiedliche Teilmengen. Die Reihenfolge der El. in der Teilmenge spielt keine Rolle.⌋

Bw In der Tat berücksichtigen wir beim Zählen zunächst doch die unterschiedl. Reihenfolgen.

Wir ziehen l Obj. aus einer Urne mit n Ob.

Beim 1. ziehen haven wir n zur Auswahl

2. ziehen $n-1$

$\vdots$ $\vdots$

l. ziehen 〃 $(n-l+1)$ 〃

Insges: $n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-l+1)$ Möglichkeiten

Bei unterschiedlichen Zieh-Reihenfolgen können wir trotzdem dieselben l Objekte erhalten.

Müssen also unterschiedlich Reihenfolgen miteinander identifizieren.

Nach S.10 gibt es genau $l!$ Reihenfolgen für die l gezog. Objekte

$$\Rightarrow \#\{l\text{-elementige Teilmengen}\} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-l+1)}{l!}$$

Bsp: # mögl. Ergebnisse bei 6 aus 49 Lotto:

$$= \binom{n}{l} \qquad \square$$

$$\binom{49}{6} = \frac{49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = 13\,983\,816$$

Es gelten: Spezialfälle $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$

$$\binom{n}{1} = n \quad , \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{\ell} = \binom{n}{n-\ell} \quad \text{für } \ell = 0, 1, \ldots, n$$

wg. Symmetrie in der Dfn 12 $(\ell \Longleftrightarrow m-\ell)$

<u>L 14</u> (Additionstheorem für $\binom{m}{\ell}$)

Für $1 \leq \ell \leq m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\binom{m+1}{\ell} = \binom{m}{\ell-1} + \binom{m}{\ell}$$

<u>Bw:</u> $\binom{m}{\ell-1} + \binom{m}{\ell} = \frac{m!}{(\ell-1)!\,(m-\ell+1)!} + \frac{m!}{\ell!\,(m-\ell)!}$

$$= m! \frac{\ell + m - \ell + 1}{\ell!\ (m-\ell+1)!}$$ gem. Nenner

$$= \frac{(m+1)!}{\ell!\ ((m+1)-\ell)!} \qquad \square$$

Mit dem Lemma lassen sich die Binomialkoeffizienten nur unter Verwendung von Addition sukzessiv berechnen und im **Pascalschen Dreieck** anordnen

$\binom{0}{\ell}$ 1

$\binom{1}{\ell}$ 1 1

$\binom{2}{\ell}$ 1 2 1

$\binom{3}{\ell}$ 1 3 3 1

$\binom{4}{\ell}$ 1 4 6 4 1

$\binom{5}{\ell}$ 1 5 10 10 5 1

Bin. koeff. tauchen in der Summendarst von $(x+y)^m$ auf

S. 15 (Binomischer Lehrsatz) Sei K Körper.

Für $x, y \in K$ und $m \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(x+y)^m = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} x^{m-j} y^j$$

Bw: Induktion über m

$m = 0$ $\qquad (x+y)^0 = e$

$$\sum_{j=0}^{0} \binom{0}{j} x^{0-j} y^j = \binom{0}{0} x^0 y^0 = 1 \cdot e \cdot e = e$$

$m \mapsto m+1$

$$(x+y)^{m+1} \underset{\text{Potenzg.}}{=} (x+y)(x+y)^m \underset{\text{Ann.}}{\overset{\text{Ind.}}{=}} (x+y) \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} x^{m-j} y^j$$

$$\underset{\text{Ges.}}{\overset{\text{Distrib.}}{=}} \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \underline{x^{m-j+1} y^j} + \underbrace{\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} x^{m-j} y^{j+1}}$$

$$\overset{\text{Index vers.}}{=} \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m}{j-1} \underline{x^{m-j+1} y^j}$$

$$= \underbrace{\binom{m}{0}}_{\binom{m+1}{0}} x^{m+1} y^0 + \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\left[\binom{m}{j} + \binom{m}{j-1} \right]}_{\binom{m+1}{j}} x^{m-j+1} y^j + \underbrace{\binom{m}{m}}_{\binom{m+1}{m+1}} x^0 y^{m+1}$$

$$\underset{\boxed{2-14}}{=} \sum_{j=0}^{m+1} \binom{m+1}{j} x^{m+1-j} y^j \qquad \square$$

Spezialfälle :

i) $$(x+e)^m = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} x^j$$

ii) $$\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} 1 \cdot 1 = (1+1)^m = 2^m$$

iii) Seien $K = \mathbb{R}$, $0 \leq y < x$ und $q := \frac{y}{x}$ klein. Dann gilt näherungsweise

$$(x+y)^m = x^m \left(1 + \frac{y}{x}\right)^m \sim x^m (1 + mq)$$

wobei wir alle Terme mit $q^2, q^3, q^4, \ldots, q^m$ weglassen, da diese „noch kleiner als q" sind.

Tatsächlich ist ein Teil dieser Aussage exakt.

<u>Lem 16</u> (Bernoulli-Ungl.) Sei K angeord. Kö. Für $x \in K$ mit $x \geqslant -e$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(e+x)^m \geqslant e + mx$$

Gilt zusätzlich $x \neq m$, so ist die Ungleichung strikt: $(e+x)^m > e + mx$

Bw Induktion über $n \in \mathbb{N}$

$n = 1$ $(e+x)^1 = e + 1x$ ✓

$n \mapsto n+1$ Ind. Ann $(e+x)^n \geqslant e + nx$ gilt.

Ind Schluß: $x \geqslant -e \Rightarrow e + x \geqslant n$

Multipliziere I.A. mit $e+x$:

$$(e+x)^{n+1} \geqslant (e+nx)(e+x)$$
$$= e + nx + ex + \overbrace{\underbrace{nx^2}_{>n}}^{\geqslant n}$$
$$\geqslant e + (n+1)x$$

Gilt zus. $x \neq n$, so $x^2 > n$ und ungl. ist strikt □

3 Vollständigkeit von Körpern

Weitere Begriffe zur Anordnung.

Dfn 1 Sei K angeord. Kö., $\emptyset \neq A \subset K$, $x, y \in K$.
Wir führen folgende Begriffe ein:

i) x ist obere Schranke von A $\underbrace{:\Leftrightarrow}$ $\forall a \in A$ gilt $a \leq x$

ist definiert als

ii) y ist untere —||— $:\Leftrightarrow \forall a \in A : y \leq a$

iii) A ist von oben beschränkt $:\Leftrightarrow$ Es ex obere
iv) unten untere
Schranke von A.

2-16

v) A ist beschränkt $:\Longleftrightarrow$ Es ex. obere und untere Schranke von A

Ist A von oben besch., so ist $O = \{x$ ist
unten U y
obere Schr. von $A\} \neq \emptyset$.
untere

vi) Besitzt O ein kleinstes Element
U größtes
$c = \min O \in K$, so heißt c Supremum
$d = \max U$ d Infimum

oder kleinste obere Schranke von A
größte untere

Man schreibt dann $c = \sup A$
$d = \inf A$.

Umformulierungen:

A beschränkt

$\Longleftrightarrow \exists\ x, y \in K\ \forall a \in A: \quad y \leq a \leq x$

$\Longrightarrow \exists\ x, y \in K\ \forall a \in A: \quad |a| \leq \max\{|y|, |x|\}$

$\Longleftrightarrow \exists\ s \in K\ \forall a \in A: \quad |a| \leq s$

$\Longrightarrow \exists\ s \in K\ \forall a \in K: \quad -|s| \leq -|a| \leq a \leq |a| \leq |s|$

$\Longrightarrow$ A beschränkt

Dfn 2 K angeord. Kö., $\emptyset \neq A \subset K$.

$\sup A = \infty$ $:\Leftrightarrow$ Es ex keine obere Schranke $x \in K$ von A
$\inf A = -\infty$ untere

S. 3 Seien K angeord. Kö., $\emptyset \neq A \subset K$, A von oben beschr., $M, S \in K$.

Es gelten:

(1) A besitzt Maximum $M = \max A \Rightarrow M \in A$ und $\sup A = M$

(2) S ist obere Schranke von A & $S \in A$
$\Rightarrow S = \sup A = \max A$

(3) Es sind äquivalent

(i) $S = \sup A$

(ii) S ist eine obere Schr. von A <u>&</u> für jede weitere obere Schr. S' von A gilt: $S \leq S'$

(iii) Für alle $a \in A$ gilt $a \leq S$ <u>&</u>
$\forall \varepsilon > m \ \exists \ a_\varepsilon \in A$ mit $a_\varepsilon > S - \varepsilon$

Aufgabe: * Bew (1) – (3)
* Formuliere und bew. Analoga für $\inf A$.

Bsp 4 Im $\mathbb{R}$ gilt

Menge A	$\sup A$	$\inf A$
$[a,b]$	$\max A = b \in A$	$\min A = a \in A$
(a,b)	$b \notin A$	$a \notin A$
$[a,b)$	$b \notin A$	$\min A = a \in A$

(Supremumsvollständigkeit)

Dfn 5 Ein angeord. kö K heißt vollständig, falls jede von oben beschr. Teilmenge $\emptyset \neq A \subset K$ ein Supremum (in K) besitzt

S 6 (Schnittaxiom) Sei K ein angeordnet. kö.

K ist vollständig $\Leftrightarrow$

Für $A, B \subset K$, $A \neq \emptyset \neq B$ mit $\forall a \in A \, \forall b \in B : a \leq b$ exist. $c \in K$ mit $\forall a \in A \, \forall b \in B : a \leq c \leq b$.

Bw. übg

L.7 Im vollst. angeord. kö K besitzt jedes von unten beschr. $\emptyset \neq A \subset K$ ein Infimum.

Bw $B := -A := \{x \in K \mid -x \in A\}$

$\Rightarrow$ $B \neq \emptyset$ und von oben beschr.

$\overset{D.5}{\Rightarrow}$ $\exists \quad s = \sup B \in K$

$\Rightarrow$ $-s = \inf A$ $\square$

Satz 8

(Bis auf Isomorphieäquivalenz) existiert genau ein vollständig angeordneter Körper.

Diesen nennen wir $\mathbb{R}$. (ohne Bw)

Bm 9 (Bezug zur intuitiven Vortstellung von $\mathbb{R}$)

Für jeden Körper K können wir Abb.

$$\phi : \mathbb{N} \to K \qquad \phi(m) = me$$

definieren. Ist K angeordnet, so ist ϕ inj.,

denn: Seien $m > l \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{l} e > n \\ e > n \\ \hline 2e > n \end{array} \qquad \begin{array}{l} \Rightarrow (m-l)e > n \\ \Leftrightarrow me > le \\ \Leftrightarrow \phi(m) \underset{\neq}{>} \phi(l) \end{array}$$

Fortsetzung $\phi : \mathbb{Q} \to K$

Für $m \in \mathbb{N}$ setze $f := (m e)^{-1}$

Beh: $m f = e$

Bw: $m f = m(e f) \overset{\text{Distributivg.}}{=} (m e) f = e$

Setze $\frac{1}{m} e := f$

Übg: $\forall\ p, q \in \mathbb{N}$ gilt $p\left(\frac{1}{q} e\right) = \frac{1}{q}(pe)$

!!

Setze $\phi\left(\frac{p}{q}\right) := \frac{p}{q} e$

und $\frac{p}{q} a = \left(\frac{p}{q} e\right) \cdot a$

Übg: Damit gelten auch die „Skalarmultipl. Regeln“

aus § 1

$\Rightarrow$ Jeder angeord. kö „enthält kopie" von $\mathbb{N}$ (sogar von $\mathbb{Z}$ und von $\mathbb{Q}$).

$\mathbb{Q}$ ist also der kleinste kö., der $\mathbb{N}$ enthält, und insbes. ein Teilkörper von $\mathbb{R}$.

Menge $\mathbb{Q}$ ist körper mit den von $\mathbb{R}$ geerbten Verknüpfungen $+, \cdot$

D. 10 (Archimedisches Axiom)

Ein angeordneter kö. k heißt archimedisch, wenn zu $a, b \in k$ mit $n < a < b$ immer ein $m \in \mathbb{N}$ ex. mit $b < ma$.

L. 11 In einem archimedischen kö. gibt es zu jedem $\varepsilon \in k$ mit $\varepsilon > n$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{m} e < \varepsilon$

Bw

Sei $n < \varepsilon < e$. Dann ex nach Dfn 10 ein $m \in \mathbb{N}$ mit $e < m\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{m} e < \frac{1}{m} m\varepsilon = \varepsilon$

Sei $e \leq \varepsilon$: Leicht ∎

S 12 Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen besitz keine obere schranke $\begin{cases} (1) & \text{im } \mathbb{Q} \\ (2) & \text{im } \mathbb{R} \end{cases}$

Bw:

(1) Seien $p, q \in \mathbb{N}$ mit $m \leq \frac{p}{q}$ für alle $m \in \mathbb{N}$

Wähle $m = p+1 \Rightarrow p+1 \leq \frac{p}{q} \Rightarrow \boxed{\lightning}$. Wider-spruch

(2) Ann: $\mathbb{N}$ besitzt obere Schr. $x \in \mathbb{R}$

Sup-Vollst. $\Rightarrow$ Es ex. $s = \sup \mathbb{N}$ im $\mathbb{R}$, d.h.

$\forall \; m \in \mathbb{N}: \quad m \leq s$ und

$\exists \; m_1 \in \mathbb{N}: \quad m_1 > s - 1$ (vgl. S.3 (3))

$\Rightarrow s < m_1 + 1 \in \mathbb{N} \Rightarrow \lightning$ □

S. 13 $\mathbb{R}$ ist archimedisch. ((da Sup-Vollständig))

$\mathbb{Q}$

Bw: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$

$\mathbb{Q}$

$\mathbb{N}$ unbeschr. von oben $\Rightarrow \exists \; m \in \mathbb{N}$ mit $m > \frac{b}{a}$

(gilt auch im $\mathbb{Q}$)

$\Rightarrow m \cdot a > b$ □

Übg

Bsp 14

Für $A = \left\{ \frac{m}{m+1} \;\middle|\; m \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$ zeige als Übg:

$\inf A = \frac{1}{2} = \min A, \quad \sup A = 1 \notin A$

Lem / Übg 15

Es gibt kein $q \in \mathbb{Q}$ mit $q^2 = 2$.

Dagegen existieren m-te Wurzeln in $\mathbb{R}$ aufgrund der Vollständigkeit

Satz 16 Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a>0$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann ex. genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit

$$x > 0 \quad \text{und} \quad x^m = a$$

Dieses x bez wir mit $\sqrt[m]{a}$ oder $a^{1/m}$.

Bw: ① Es ex höchstens eine Lsg., denn:

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $y < x$ und $x^m = a = y^m$.

volls Induktion $\Rightarrow y^m < x^m \Rightarrow$ ↯

② Es ex. min. eine Lsg. x

Dazu setze $$A := \{ b \in \mathbb{R} \mid b > 0,\ b^m < a \}$$

und $t = \frac{a}{1+a} < 1$. Dann $t > 0$ und

$t^m \underset{\boxed{t<1}}{<} t < a$, insbes $t \in A$.

Für $y \geq 1+a > 1$ ist

$$y^m > y > a > b^m \quad \text{für alle } b \in A$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \notin A \quad \text{und} \\ \forall\, b \in A : \; y \geq b, \quad \text{denn falls } y < b \text{ so auch} \\ \qquad\qquad y^m < b^m < a \;\; \lightning \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $1+a$ obere Schranke von A

$\Rightarrow$ $x := \sup A$ ist endlich

Bh: $x^m = a$

Bw mit Widerspruch.

Nehmen zuerst $x^m < a$ an, d.h. $a - x^m > 0$.

Also ex ein. $h \in \mathbb{R}$ mit

$$0 < h < \min\left\{ 1, \frac{a - x^m}{m(1+x)^{m-1}} \right\}$$

Für allg. $0 < s < t$ besagt Summenf. in Kor 2.8.:

$$(\times) \quad t^m - s^m = (t-s) \sum_{j=0}^{m} t^j s^{m-1-j} < (t-s)\, m\, t^{m-1}$$

Setze $s := x < x+h =: t$ ein:

$$(x+h)^m - \cancel{x^m} < h\,m\,(x+h)^{m-1}$$

$$< h\,m\,(x+1)^{m-1}$$

$$< a - \cancel{x^m}$$ nach Def h

$\Rightarrow \quad (x+h)^m < a \quad \Rightarrow \quad x+h \in A$

$\Rightarrow \quad x \neq \sup A \quad \Rightarrow$ ↯

Nehmen nun $x^m - a > 0$ an.

Setze $$h := \frac{x^m - a}{m\,x^{m-1}} > 0$$

und $$h < \frac{x^m}{m\,x^{m-1}} = \frac{x}{m} \le x$$

Da $x = \sup A$, ex. $\underline{b \in A}$ mit $b > x-h > 0$.

Setze $s := x-h < x =: t$ in (x) ein:

$$\cancel{x^m} - (x-h)^m < h\,m\,x^{m-1} = \cancel{x^m} - a$$

$\Rightarrow \quad a < (x-h)^m < b^m \quad \Rightarrow \quad b \notin A \Rightarrow$ ↯

□

Kor 17 $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig, d.h es ex $\emptyset \neq A \subset \mathbb{Q}$ von oben beschränkt, ohne $\sup A \in \mathbb{Q}$.

Bw: Übg

Potenzgesetze f. rationale Exponenten

Sei $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ teilerfremd.

Setze für $a \in \mathbb{R}, a > 0$

$$a^r = a^{m/n} := (a^m)^{1/n}$$

Ist $\frac{p}{q} = r = \frac{m}{n}$ mit $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ altern. Darstellung, so ex $k \in \mathbb{N}$ mit

$$p = km \quad , \quad q = kn$$

Bh: $b := (a^m)^{1/n} = (a^p)^{1/q} =: c$

d.h. Dfn ist konsistent.

Bw: Setze

$\Rightarrow b^n = a^m$ nach Dfn. Ebenso:

$$c^q = a^p = a^{km} = (a^m)^k = (b^n)^k = b^{nk} = b^q$$

q-te Wurzel ist eindeut. ⇒ $x = b$ ✓

Weitere Konsistenz bh: $(a^m)^{1/n} = (a^{1/n})^m$

Bw: $((a^m)^{1/n})^n = a^m$

$$((a^{1/n})^m)^n = (a^{1/n})^{m \cdot n} = (\overbrace{(a^{1/n})^n}^{a \text{ nach Def.}})^m$$

$$= a^m$$

Ziehe eindeutige n-te Wurzel ⇒ Bh ✓

Lem 18 Für $a, b \in \mathbb{R}$, $r, s \in \mathbb{Q}$, mit $a > 0, b > 0$ gelten:

(1) $a^r a^s = a^{r+s}$

(2) $a^r b^r = (ab)^r$

(3) $\left(\frac{1}{a}\right)^r = \frac{1}{a^r}$

(4) $(a^r)^s = a^{rs}$

Bw Schreibe $r = \frac{p}{q}$, $s = \frac{m}{q}$ für $p, m \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$.

Vorüberlegungen: Es gelten

α)
$$(a\,b)^{1/q} = \underset{\substack{\shortparallel\\ c}}{a^{1/q}} \;\; \underset{\substack{\shortparallel\\ d}}{b^{1/q}}$$

Bw

$$\Rightarrow \quad (c\,d)^q = c^q\, d^q = a\,b \quad \text{nach Def.}$$

$$\text{Eind.} \Rightarrow \quad (a\,b)^{1/q} = c\,d = a^{1/q}\, b^{1/q} \quad \checkmark$$

β) Speziell für $b = \frac{1}{a}$

$$\Rightarrow \quad e \overset{\text{Eind.}}{=} e^{1/q} = \left(a\,\frac{1}{a}\right)^{1/q} = a^{1/q}\left(\frac{1}{a}\right)^{1/q}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{a^{1/q}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{1/q}$$

Bw. v. (1)
$$a^r\, a^s \overset{\text{Def.}}{=} \left(a^{1/q}\right)^p \left(a^{1/q}\right)^m$$

$$\overset{\text{alte}}{\underset{\text{Potenzg.}}{=}} \left(a^{1/q}\right)^{p+m} = a^{\frac{p+m}{q}} = a^{r+s}$$

(2) – (4) : übg. □

Für $m \in \mathbb{N}$ setze $\sqrt[m]{0} = 0^{1/m} = 0$.

Dfn 19 (Mittelwerte)

Für $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ setze

$$A(\lambda x_1, \dots, \lambda x_m) = \lambda \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} x_j$$

genannt **arithmetisches Mittel** von $x_1, \dots, x_m$

gilt zusätzlich $x_1, \dots, x_m \geq 0$ so defn.

geometrisches Mittel als

$$G(\lambda x_1, \dots, \lambda x_m) = \sqrt[m]{\lambda x_1 \cdot \ \ldots \cdot \lambda x_m}$$

$$= \lambda \left(\prod_{j=1}^{m} x_j \right)^{1/m}$$

Es gelten

(i) $A(\cdot)$ und $G(\cdot)$ sind **1-homogen**: Für $\lambda \geq 0$

$$A(\lambda x_1, \dots, \lambda x_m) = \lambda A(x_1, \dots, x_m)$$

$$G \quad \text{-||-} \quad = \lambda G \quad \text{-||-}$$

(ii) $\min\{x_1, \dots, x_m\} \leq A(x_1, \dots, x_m) \leq \max\{x_1, \dots, x_m\}$

$\text{-||-} \quad \leq G(x_1, \dots, x_m) \leq \quad ||$

S.20 (Arithmetisches-Geometrische Mittel-Ungleichung)

Für $x_1, \dots, x_m \in [0, \infty) \subset \mathbb{R}$ gilt

$$G(x_1, \dots, x_m) \leq A(x_1, \dots, x_m) \qquad (*)$$

mit „=" genau dann, wenn $x_1 = x_2 = \dots = x_m$.

Bw. Zunächst nehmen wir einige Vereinfachungen vor:

(2) Wg. Homogenität können wir annehmen, dass $A(x_1, \dots, x_m) = 1$ ist. (Ansonsten gehe zu $\tilde{x}_j = x_j / A(x_1, .., x_m)$.) über

(1) Ist ein $x_j = 0$ so ist $G(\dots) = 0$ und damit $(*)$ erfüllt. Nehmen also $x_1, \dots x_m > 0$ an.

(3) Für $x_1 = \dots = x_m$ gilt

$$G(\dots) = x_1 = A(\dots)$$

Also nur noch z.z.:

Für $x_1, \dots, x_n > 0$, $x_1 + \dots + x_n = n$ und $x_j \neq 1$ für mind. ein $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_n < 1$$

Bw Ind. über $n \geq 2$

$\boxed{n = 2}$ Sei $x_1 = 1 + \varepsilon$, dann $x_2 = 2 - x_1 = 1 - \varepsilon$.

$\Rightarrow$ $x_1 x_2 = 1 - \varepsilon^2 < 1$ ✓

$\boxed{n \mapsto n+1}$ Seien $x_0, x_1, \dots, x_n > 0$ nicht alle gleich und $x_0 + \dots + x_n = n+1$.

Dann ist mind. eines > 1 und mind. eines < 1

OE Ohne Einschränkung (der Allgemeinheit)

sei $x_0 = 1 - \alpha < 1$, $x_1 = 1 + \beta > 1$ mit $\alpha, \beta > 0$.

Setze $y := x_0 + x_1 - 1 = 1 - \alpha + \beta$.

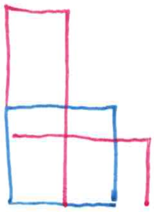
$\Rightarrow$ $y + x_2 + \dots + x_n = n$

I. Ann $\Rightarrow$ $y x_2 \cdot \ldots \cdot x_n < 1$

Da $x_0 \cdot x_1 = 1 - \alpha + \beta - \alpha\beta < y$

$$\Rightarrow \quad \prod_{j=0}^{m} x_j \quad < 1 \qquad \square$$

[Warum haben wir Ind. mit $m=1$ angefangen?]



Quadrat hat größte Fläche unter allen Rechtecken gleicher Seitenl.

Bsp. 21 Für $a>0$, $m \geq 2$, $j \in \{1,2,\dots,m-1\}$

gilt:
$$\sqrt[m]{a^j} \leq 1 + \frac{j}{m}(a-1)$$

Denn S.20 besagt

$$a^{m/j} = G(\underbrace{a,\dots a}_{j}, \underbrace{1,\dots,1}_{m-j}) \leq A(\underbrace{a,\dots a}_{j}, \underbrace{1,\dots,1}_{m-j})$$

$$= [ja + (m-j)]\frac{1}{m}$$

$$= 1 + [a-1]\,j\,\frac{1}{m}$$

Insbes für $j=1$:

$$\sqrt[m]{a} \leq 1 + \frac{a-1}{m}$$

und für $j=2$ und $x_1 = x_2 = \sqrt{m}$

$$\sqrt[m]{m} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{m}} - \frac{2}{m}$$

Wie liegt $\mathbb{Q}$ im $\mathbb{R}$?

<u>S. 22</u> Zu $x \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $m \in \mathbb{Z}$ mit: $m \leq x < m+1$

Dieses m bezeichnen wir mit der Gaußklammer

$$\lfloor x \rfloor = \max\{ k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x \}$$

<u>Bw: übg</u>

<u>Kor 23</u> Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

a) $(a,b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$

b) $(a,b) \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$ falls $b-a > 1$

c) $(a,b) \cap \mathbb{I} \neq \emptyset$, wobei $\mathbb{I} := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ die Menge der <u>irrationalen Zahlen</u>.

<u>Bw: übg</u>

Jedes offene Intervall enthält also min. ein (tatsächlich unendlich viele) Element sowohl vom $\mathbb{Q}$ als auch vom $\mathbb{I}$, man sagt:

$\mathbb{Q}$ (und $\mathbb{I}$) liegt <u>dicht</u> im $\mathbb{R}$.

Aber: $\exists\ \phi : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ surjektiv

$\nexists$ es existiert nicht $\Phi : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ surjektiv.

D.h. $\mathbb{R}$ größer als $\mathbb{Q}$.

4 Komplexe Zahlen

Das Lösen der Gl. $x^2 = 2$ führte auf die irrationalen Zahlen. Lösen der Gl. $x^2 = -1$ führt nun auf komplexe Zahlen.

Besser mit $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ rechnen

D. 1

Auf der Menge $\mathbb{R}^2 = \{ (x,y) \mid x,y \in \mathbb{R} \}$ definiere zwei Verknüpfungen: $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Addition: $(x,y) + (u,v) := (x+u, y+v)$

Multiplikation $(x,y) \cdot (u,v) := (xu - yv, xv + yu)$

Tatsächlich ist $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ein Körper und wird als Körper der **Komplexen Zahlen** bezeichnet und mit dem Symbol $\mathbb{C}$.

Die Abbildung $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $\phi(x) = (x,0)$ ist ein Körperhomomorphismus, insofern ist $\mathbb{R}$ ein Unterkörper von $\mathbb{C}$.

Achtung: $\mathbb{C}$ ist nicht geordnet.

3
14

28.10.2021

Wir schreiben „$\mathbb{C} \ni z = (x,y) \in \mathbb{R}^2$"

oder auch $z = x+iy \in \mathbb{R} \times i\mathbb{R}$ (*)

wobei dann i dem Vektor $(0,1)$ entspricht

Bem 3 Für $z = x+iy,\ w = u+iv \in \mathbb{C}$ gelten

$$z = w \iff x = u \ \&\ y = v$$

D.2 i wird imaginäre Einheit genannt

$\mathrm{Re}\, z := x$ wird Realteil von z "

$\mathrm{Im}\, z := y$ Imaginärteil von z "

$\bar{z} := x - iy = \mathrm{Re}\, z - i\, \mathrm{Im}\, z$ wird zu z

komplex konjugierte Zahl "

Verknüpfungsregeln in Darst (*) übers. lauten

$$z + w = (x+u) + i(y+v)$$

$$zw = (xu - yv) + i(xv + yu)$$

3 - 15

$$\Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2 \neq 0} \left(\text{falls } z \neq 0 \in \mathbb{C}\right)$$

wg →

Test: ...

ⓧ Insbesondere:

$$i^2 = 1 + i0 = 1$$

wegen $(0,1) \cdot (0,1) = (0-1, 0+0) = (1,0)$

und $\frac{1}{i} = -1$

Test: $z \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{x^2+y^2}\left[\left(x^2 - y(-y)\right) + i\left(x(-y) + yx\right)\right]$

$$= \frac{x^2+y^2+i(-xy+xy)}{x^2+y^2} = \underline{1}$$

ⓧ

Rechenregeln für Konjugation

$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$; $\overline{z-w} = \bar{z} - \bar{w}$

$\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$, $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ (für $w \neq 0$)

$\overline{\left(\bar{z}\right)} = z$

⌈ Insbes. ist $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$\phi : z \mapsto \bar{z}$ ein Körperautomorphismus ⌋

$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $i \operatorname{Im} z = \frac{1}{2}(z-\bar{z})$

$z = \bar{z} \iff \operatorname{Im} z = 0 \iff \underline{z = x \in \mathbb{R}}$

Lässt sich die Ordnungsstruktur von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ erweitern?

Da $i \neq 0$ (additives Neutrales) würde dann folgen $i^2 > 0$, wir haben aber $i^2 = -1 < 0$ gezeigt.

Es gibt aber eine Verallgemeinerung des Betrages!

Dfn 4 (Betrag in $\mathbb{C}$)

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ setze $|z| := \sqrt{\underbrace{x^2+y^2}_{\geq 0}}$ und nenne $|z|$ **Betrag** von z.

Geometrisch ist $|z|$ der Abstand von z zu 0, genauso wie im $\mathbb{R}^2$.

Bm 5 (Eigens. d. Betrags in $\mathbb{C}$)

Für $z = x+iy, w \in \mathbb{C}$ gelten:

$$|z|^2 = x^2+y^2 = (x+iy)(x-iy) = z\bar{z}$$

$$|\bar{z}| = |z|$$

$$|\mathrm{Re}\, z| = |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} = |z|$$

$$|\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$$

$$\frac{z\overline{w}}{|w|^2} = \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}} = \frac{z}{w}$$

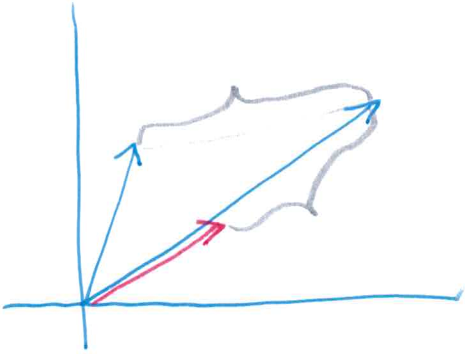
$$|z| \geqslant 0$$

$$|z| = 0 \iff z = x+iy = 0 \in \mathbb{C}$$

$$|zw| = |z|\,|w|$$

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \quad (\text{für } w \neq 0)$$

$$|z+w| \leq |z| + |w|$$



$$\big||z|-|w|\big| \leq |z-w|$$

<u>Bw</u>: Übg.

5 Folgen und ihre Konvergenz

Df 1 Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Folge in M ist eine Abb. $\underset{x}{\cancel{f}}: \mathbb{N} \to M,$

$$n \mapsto \underset{x}{\cancel{f}}(n).$$

Verwendete Schreibweisen:

$$(x_1, x_2, x_3, \dots \qquad)$$

$$(x_n)_{n=1}^{\infty}, \quad (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (x)_n$$

Die Elemente x_n heißen Folgenglieder

Ist $M = \mathbb{R}$ nennt man $(x_n)_n$ reelle Folge

$M = \mathbb{C}$ komplexe Folge

Manchmal wird auch für ein anderes $N \subset \mathbb{Z}$ $f: N \to M$ als Folge bez.

I. F. betrachten wir nur $M = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Um beide Fälle simultan zu erfassen steht $\mathbb{K}$ entweder für reellen oder komplexen Zahlenkörper.

Bsp. 2

1) Die konstante Folge: Für ein $c \in \mathbb{K}$ gilt

$\forall n \in \mathbb{N}: \quad x_n = c$

$(x_n) = (c, c, c \dots)$

2) Lineare Folge $\quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad x_n = n$

$(x_n) = (1, 2, 3, \dots)$

3) Arithmetische Folge Progression: Für ein $a, d \in \mathbb{K}, d \neq 0$

$\forall n \in \mathbb{N}: \quad x_n = a + nd$, insbes

$x_{n+1} = x_n + nd$

$(x_n) = (a, a+d, a+2d, \dots)$

4) Geometrische Folge Progression: $\quad \exists a, q \in \mathbb{K}, q \neq 0$

$\forall n \in \mathbb{N}: \quad x_n = a q^n$ insbes

$x_{n+1} = x_n \cdot q$

$(x_n) = (a, a \cdot q, a q^2, \dots)$

5) harmonische Folge:

$\forall n \in \mathbb{N}: \quad x_n = \frac{1}{n} \qquad (x_n) = (1, 1/2, 1/3, \dots)$

Der Phantasie sind keine Grenzen gesetzt

6) $\forall n_0 \in \mathbb{N} \quad x_n = (-1)^n \dfrac{4n^2+2n+1}{3n^3+6}$

$$(x_n) = \left(\frac{1}{6}, -\frac{7}{9}, \dots\right)$$

<u>D.3</u> (Umgebung)

Für $a \in \mathbb{K}$ und $\varepsilon > 0$ heißt

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{K} : |x-a| < \varepsilon\}$$

die <u>ε-Umgebung</u> oder der <u>offene ε-Ball</u>

um $a \in \mathbb{K}$ und

$$\dot{U}_\varepsilon(a) = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$$

<u>punktierte ε-Umgebung</u> bzw

<u>"</u> <u>offener ε-Ball</u> um a.

Im $\mathbb{R}$: $U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

Warum brauchen wir einen Konvergenzbegr?

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135 \dots$$

ist durch eine unendliche, nicht-periodische Dezimaldarstellung festgelegt. Allerdings kann ein Computer nur endlich viele Dezimalstellen berechnen / speichern / darstellen. Je besser der Computer, desto mehr Stellen:

$$q_3 = 1{,}414$$

$$q_4 = 1{,}4142$$

$$q_5 = 1{,}41421$$

$$\vdots \qquad \downarrow \text{ in welchem Sinne?}$$

$$\sqrt{2}$$

Erhalten Folge $(q_n)_n$ rationaler Zahlen mit Eigs.

$$\varepsilon_n := |\sqrt{2} - q_n| \leq 10^{-n}$$

__D 4__ (konvergente Folge)

Sei $a \in \mathbb{K}$ und $(x_n)_n$ Folge in $\mathbb{K}$. Dann heißt $(x_n)_n$ __konvergent gegen a__ falls $\forall \varepsilon > 0$ ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ ex., so dass $\forall n \geq n_0$ gilt $|x_n - a| < \varepsilon$.

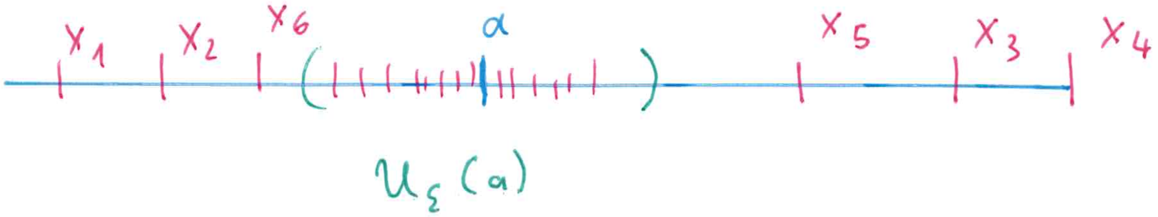
[Beachte, dass $n_0 = n_0(\varepsilon)$ von ε abhängt.]

Man schreibt dann

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \quad \text{oder} \quad x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a$$

Eine Folge, die gegen $a = 0 \in \mathbb{K}$ konvergiert heißt Nullfolge. Konvergiert eine Folge nicht, so heißt sie divergent.

Konvergiert (x_n) gegen a, so liegen für jedes $\varepsilon > 0$ nur endlich viele der x_n's außerhalb von $U_\varepsilon(a)$, wie viele hängt allerdings von ε ab.



L.5 Sei (x_n) eine gegen $a \in \mathbb{K}$ konvergente $\underbrace{\mathbb{K}\text{-Folge}}_{\text{Folge aus El. von } \mathbb{K}}$. Gilt auch $\lim_{x \to \infty} x_n = b$, so folgt $b = a$.

Bw: Wäre $a \neq b$, so $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2} > 0$. Zu diesem $\varepsilon > 0$ ex $n_a(\varepsilon), n_b(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\forall\, n \geq n_a(\varepsilon): \quad |x_n - a| < \varepsilon$$

$$\forall\, n \geq n_b(\varepsilon): \quad |x_n - b| < \varepsilon$$

Damit gilt $\forall\, n \geq \max\{n_a(\varepsilon), n_b(\varepsilon)\}$:

$$|a-b| = |a - x_n + x_n - b| \leq |a - x_n| + |x_n - b|$$

$$\textcircled{<}\ \varepsilon + \varepsilon = |a-b| \quad \Rightarrow \lightning \qquad \square$$

Fazit: Der Grenzwert einer Folge (falls sie konvergiert) ist eindeutig.

Bsp 6 Sei $\alpha \in \mathbb{Q}$ und $\alpha > 0$. Dann

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$$

Bw: Zu $\varepsilon > 0$ wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon^{1/\alpha}}$ (möglich, da $\mathbb{N}$ un beschr. in $\mathbb{R}$).

$$\Rightarrow \forall\, n \geq n_0(\varepsilon): \left| \frac{1}{n^\alpha} - 0 \right| = 1/n^\alpha \leq 1/n_0^\alpha < \varepsilon \qquad \square$$

Ähnlich zeigt man $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} = 0$

Sobald wir n^α für $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ definiert haben, werden wir sehen, dass dann die Aussage ebenfalls gilt.

<u>Bsp</u> 7 (Divergente F.)

a) Sei $x_n = (-1)^n$. <u>Beh</u>: Es gibt kein $a \in \mathbb{C}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

<u>Bw</u> Widersp Ann: $\exists\, a \in \mathbb{C}$ mit $\lim x_n = a$.

Dann ex. zu $\varepsilon = 1/2$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_0 : \quad |x_n - a| < 1/2$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0 : \quad \underbrace{|x_{n+1} - x_n|}_{=2} \leq |x_{n+1} - a| + |a - x_n| < 1$$

$\Rightarrow \lightning$

b) Sei $x_n = n^2$. Gäbe es ein $a \in \mathbb{C}$ mit $a = \lim x_n$, so existierte zu $\varepsilon = 1$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$

mit $\forall n \geq n_0 : \quad |n^2 - a| < 1$

Dagegen gilt $|(n_0 + |a|)^2 - a|$

$$= |\underbrace{n_0^2}_{\geq 1} + \underbrace{2 n_0 |a| - |a|}_{\geq 0} + \underbrace{|a|^2}_{\geq 0}| \geq 1 \quad \Rightarrow \lightning$$

Letztere Folge ist auf spezielle Art divergent.

4.11.2021

D.8 $(x_n)_n$

i) Eine $\mathbb{R}$-Folge heißt bestimmt divergent gegen $+\infty$ (bzw $-\infty$) $:\Leftrightarrow$ $\forall N \in \mathbb{N}$ ex. ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit: $\forall n \geq n_0$ gilt $x_n > N$ (bzw $x_n < -N$).

ii) Eine $\mathbb{R}$-Folge (x_n) heißt <u>von oben beschränkt</u> $:\Leftrightarrow$ Menge $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N} : x = x_n\} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist von oben beschränkt

Da $\mathbb{R}$ vollst. ex. dann $\sup_n (x_n) := \sup A$

iii) Eine $\mathbb{R}$-Folge $(x_n)_n$ heißt <u>von unten beschränkt</u> $:\Leftrightarrow$ Folge $(-x_n)_n$ ist von oben ״

iv) Eine $\mathbb{R}$ - Folge (x_n) heißt **beschränkt** $:\Longleftrightarrow$

$(x_n)_n$ ist **von unten & von oben beschr.**

$\overset{\text{übg}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists\, M \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \ |x_n| \le M$

L. 9 Sei $(x_n)_n$ eine $\mathbb{R}$ - Folge

a)

$$\lim_n x_n = a \quad \Longleftrightarrow \quad \left(|x_n - a|\right)_n \text{ ist Nullfolge}$$

b) $(x_n)_n$ konvergent $\Rightarrow$ (x_n) beschränkt.

Bw a) Def umformulieren

b) Sei $a := \lim\limits_{n \to \infty} x_n \in \mathbb{R}$. Dann ex

$n_0(\varepsilon = 1) \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq n_0 : \ \underline{|x_n - a| < 1}$

$$\Rightarrow |x_n| \le 1 + |a|$$

Setze $K := \max\{|x_1|, \dots, |x_{n_0}|, 1 + |a|\}$

dann:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad |x_n| \le K \qquad \square$$

Dagegen ist Flg $x_n = (-1)^n$ beschr, aber nicht konv.

S. 10

a) $\left.\begin{array}{l}(x_n)_n \text{ Nullfolge} \\ (y_n)_n \text{ beschränkte Flg}\end{array}\right\} \Rightarrow (x_n \cdot y_n)_n$ Nullfolge

b) $\left.\begin{array}{l}(y_n)_n \text{ Nullfolge} \\ \forall n \in \mathbb{N}: \ |x_n| \leq |y_n|\end{array}\right\} \Rightarrow (x_n)_n$ Nullfolge

Bw: a) (y_n) beschr $\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : \forall n : |y_n| < m$

$(x_n)_n$ NF $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \overset{n_0\left(\frac{\varepsilon}{m}\right)}{n_0} \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 :$

$$|x_n - 0| < \frac{\varepsilon}{m}$$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 : \quad |x_n \cdot y_n - 0| \leq |x_n||y_n| \leq m \cdot \frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon$

b) Zu geg $\varepsilon > 0$ gibt es $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, s.d. für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$\underbrace{\varepsilon > |y_n|}_{(y_n)_n \text{ NF}} \geq |x_n - 0| \quad \Rightarrow \quad (x_n)_n \text{ NF} \ \square$$

4-3

Bsp 11 Geometrische Folge

Sei $q \in \mathbb{C}$ und $x_n := q^n$ für $n \in \mathbb{N}$.

Fallunterscheidung

$q = 0$ ⇒ $x_n = 0$ ⇒ $\lim x_n = 0$

$0 < |q| < 1$ ⇒ $1 < \frac{1}{|q|} = 1 + h$ mit $h > 0$

Bernoulli Ungl ⇒ $\forall n \in \mathbb{N}: \frac{1}{|q|^n} = \left(\frac{1}{|q|}\right)^n \geq 1 + nh > nh$

⇒ $\forall n:$ $|q^n| = |q|^n < \frac{1}{nh}$ ⟺ $|n \cdot q^n| < \frac{1}{h}$ (*)

⇒ $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$

(*) Folge $(n q^n)_n$ ist beschr.

$|q| = 1$ vielfältig

$q = 1$ ⇒ $x_n = 1$ ⇒ $\lim x_n = 1$

$q = -1$ ⇒ $x_n = (-1)^n$ ⇒ $(x_n)_n$ diverg.

$|q| = 1,\ q \neq 1$ ⇒ ||

$|q| > 1$ ⇒ $|q| = 1 + h$ mit $h > 0$

Bernoulli ⇒ $|q^n| = |q|^n \geq 1 + nh$ für $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \quad (x_n)$ unbeschr $\underset{L.9}{\Rightarrow}$ (x_n) diverg.

$q \in (1, \infty) \subset \mathbb{R} \Rightarrow x_n = q^n$ best. diverg. gegen $+\infty$

Bsp 12 Seien $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$, $k \in \mathbb{N}$ und

$\forall n : \quad x_n = n^k q^n$

Bh: $\quad \lim\limits_n x_n = 0$

Bw: Induktion über $k \in \mathbb{N}$.

$k = 1$ wahr wg $(*)$ in Bsp 11

$k \to k+1$

Es ex. $t \in \mathbb{R}$ mit $|q| < t < 1$.

Setze $p = q/t \Rightarrow |p| < 1$ & $q = pt$

$(*) \Rightarrow$ Flg $(n t^n)_n$ beschr.

$\Rightarrow \exists M \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}$

$$|n^{k+1} q^n| = \underbrace{(n t^n)}_{\text{beschr.}} \underbrace{(n^k |p|^n)}_{\text{Nullf. nach Ind. Voraus}}$$

S.10 $\Rightarrow (n^{k+1} q^n)_n$ Nullf. $\square$

Übg: Beweise mit binomischen LS statt Induktion.

Bsp 13 Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{z^n}{n!} = 0$

Bw: Für alle $n > n_0 := |z|$ gilt:

$$\left|\frac{z^n}{n!}\right| = \underbrace{\frac{|z|\,|z| \;\ldots\; |z|}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot(n_0-1)}}_{=:k \text{ fix}} \; \underbrace{\frac{|z|}{n_0}}_{\leq 1} \cdot\ldots\cdot \underbrace{\frac{|z|}{(n-1)}}_{\leq 1} \cdot \frac{|z|}{n} \leq \frac{k|z|}{n}$$

Sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage $A(n)$ formuliert. Wir sagen:

$A(n)$ ist für fast alle n wahr

$:\Leftrightarrow$ Es gibt nur endl. viele $n \in \mathbb{N}$, für die $A(n)$ falsch ist

$\Leftrightarrow$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall\, n \geq n_0 :$ $A(n)$ ist wahr

Wir basteln uns nun aus gegebenen konv Folgen neue konv. Flg.

S. 14 (Grenzwertsätze)

Seien $(x_n)_n, (y_n)_n, (z_n)_n$ $\mathbb{C}$-Folgen und $a, b \in \mathbb{C}$ mit $\lim x_n = a$ und $\lim y_n = b$

Dann

a) $\lim (x_n + y_n) = a+b$

b) $\lim x_n \cdot y_n = a \cdot b$

c) Für $b \neq 0$: $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$

Was, falls $y_n = 0$ ⇒ siehe h)

d) Sind (x_n) & (y_n) sogar reell und $x_n \leq y_n$ für fast alle n, so $a \leq b$.

e) Sind $(x_n), (y_n), (z_n)$ reell und $x_n \leq z_n \leq y_n$ für fast alle n

sowia $a = b$, so $\lim z_n = a$

f) $\lim |x_n| = a$

4-7 g) Sind $(a_n), (b_n)$ reelle Flg, so gilt:

$\lim (a_n + ib_n) = a+ib \iff \lim a_n = a$ &

$\lim b_n = b$

h) Gilt für fast alle n: $x_n = z_n$

so folgt $\lim z_n = a$.

Ich darf also endlich viele FG ändern, ohne Limes zu beeinflussen.

Bw a)

Zu $\varepsilon > 0$ $\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq n_0$: $|x_n - a| < \varepsilon/2$

$|y_n - b| < \varepsilon/2$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0$:

$$|(x_n + y_n) - (a+b)| = |x_n - a + y_n - b|$$

$$\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |x_n - a| + |y_n - b|$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \checkmark$$

b) (x_n) konv $\Rightarrow$ (x_n) beschr.

$\Rightarrow \exists K \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}: |x_n| < K$

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ s. d.

$\forall n \geq n_0$: $|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2(|b|+1)}$ & $|y_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2K}$

4-8

$\Rightarrow \quad \forall n \geq n_0:$

$|x_n y_n - x_n b + x_n b - ab|$ $\quad\quad$ Δ-Ungl

$\leq |x_n(y_n - b)| + |(x_n - a)b|$

$= |x_n||y_n - b| + |x_n - a||b|$

$< k \underbrace{|y_n - b|}_{< \frac{\varepsilon}{2k}} + |b| \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ✓

i) Dürfen wir durch y_n dividieren?

Da $y_n \to b \neq 0$ ex. $n_0 \in \mathbb{N}$:

$\forall n \geq n_0$: $\quad \underbrace{|y_n - b| < \frac{|b|}{2}}_{\Rightarrow |y_n| > \frac{|b|}{2}}$

$\Rightarrow$ Fast alle y_n sind $\neq 0$

ii) diese endl. vielen darf ich ändern, ohne den Grenzw zu beeinflussen.

Bh: $\quad \lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$

4-9

Bw: geg $\varepsilon > 0$ wähle $n_1 = n_1(\varepsilon) \geq n_0$

mit $\forall\, n \geq n_1$: $\underbrace{|y_n - b| < \frac{|b|^2 \varepsilon}{2}}$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - y_n}{y_n \cdot b} \right| = \frac{|y_n - b|}{\boxed{|y_n|}\, |b|}$$

$$\underset{n \geq n_0}{\boxed{\leq}} 2 \frac{|y_n - b|}{|b|^2} \boxed{<} \varepsilon \quad \checkmark$$

Wende nun b) auf (x_n) und $(1/y_n)$ an.

d) Ist $a = b$ ist nichts z.z.

Ist $a \neq b$, setze $\varepsilon = \frac{1}{2}|a-b|$.

Dann ex. $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall\, n \geq n_0: \quad \begin{array}{l} |x_n - a| < \varepsilon \\ |y_n - b| < \varepsilon \end{array}$$

$$\Rightarrow \forall\, n \geq n_0: \quad a < x_n + \varepsilon \leq y_n + \varepsilon < b + 2\varepsilon$$

$$= b + |a-b|$$

$$\Rightarrow \quad a - b < |a - b|$$

$\boxed{4-10}$ $\Rightarrow$ $b > a$.

übg e) bis h)

Bsp 15

1)
$$\lim \frac{2-n+3\boxed{n^2}}{4+7\boxed{n^2}} = \lim \frac{\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n}+3}{\frac{4}{n^2}+7}$$

höhste Potenz

$$\overset{\text{Satz}}{=} \frac{\lim \frac{2}{n^2} - \lim \frac{1}{n} + \lim 3}{\lim \frac{4}{n^2} + \lim 7} = \frac{0-0+3}{0+7} = \frac{3}{7}$$

2)
$$\lim \frac{n^5 2^n - 4n^9 + 8}{2n - \boxed{3^n}} = \lim \frac{n^5\left(\frac{2}{3}\right)^n - 4\frac{n^9}{3^n} + 8/3^n}{2\frac{n}{3^n} - 1}$$

wächst am schn.

$$\overset{\text{Bsp 12}}{=} \frac{0-0+0}{0-1} = 0$$

Bis hier am 4.11.2021

3) zu c) im Satz:

Gilt $a = \lim x_n \neq 0$, $b = \lim y_n = 0$ aber $y_n \neq 0$ für fast alle n, so

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_n}{y_n}\right| = \infty, \text{ d.h } \left(\left|\frac{x_n}{y_n}\right|\right)_n$$

best. diverg. gegen ∞.

Dagegen ist im Fall $a = b = 0$ (und $x_n \neq 0, y_n \neq 0$ f. fast alle n) keine allgemeine Aussage möglich; wie folgende Fälle zeigen

$$\left.\begin{aligned} &y_n = \frac{1}{n^2}, \quad x_n = \frac{1}{n^3} \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n} \to 0 \\ &\quad '' \qquad x_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} = n \to +\infty \\ &\quad '' \qquad x_n = \frac{c}{n^2} \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} = c \to c \end{aligned}\right\} \text{für } n \to \infty$$

4) Zu (a)

D.h. striktes $<$

Sei $x_n = 0 < \frac{1}{n} = y_n$ für $n \in \mathbb{N}$.

Dann $\lim x_n = 0 = \lim y_n$

impliziert nicht $a < b$

5) Bh: $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Bw: A-G-Ungl. $\Rightarrow$ $1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}}$

$1 \leq n \Rightarrow \sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{n}$ übg.

Satz (e): $1 \leq \lim \sqrt[n]{n} \leq \lim \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)$

Für $k \in \mathbb{N}$ folgt:

$$\sqrt[n]{n^k} = n^{k/n} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^k \xrightarrow[n \to \infty]{} 1^k = 1$$

6) <u>Bh</u>: $\forall\, a > 0 : \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$

<u>Bw</u>:

<u>$1 \leq a$</u> $\Rightarrow 1 = \sqrt[n]{1} < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}$

für fast alle n

Satz (e) $\Rightarrow$ Bh.

<u>$0 < a \leq 1$</u> : Setze $c = \frac{1}{a} > 1$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{a} = \left(\sqrt[n]{\frac{1}{c}}\right)^{-1} \xrightarrow[\text{s.o \& Satz 14 (c)}]{n \to \infty} 1^{-1} = 1$$

7) <u>Bh</u> $\sqrt[n]{n!} \longrightarrow \infty$

<u>Bw</u>: $(n!) = \prod\limits_{k=1}^{n} k \prod\limits_{k=1}^{n} k = \prod\limits_{k=1}^{n} k \prod\limits_{k=1}^{n} (n-k+1)$

$$= \prod_{k=1}^{n} \underbrace{k(n-k+1)}_{= [\underbrace{(k-1)(n-k)}_{\geq 0} + n]} \geq \prod_{k=1}^{n} n = n^n$$

$$\Rightarrow \quad n! \geq n^{n/2} \quad \Rightarrow \sqrt[n]{n!} \geq n^{\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{n}} = \sqrt[2]{n} \longrightarrow \infty$$

8)

Sei $(x_n)_n$ $\mathbb{C}$-Folge mit $\lim x_n = 1$ und $p, q \in \mathbb{N}$.

Bh
$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_n^p - 1}{x_n^q - 1} = \frac{p}{q}$$

Beachte: $x_n^p - 1 \to 0$

$x_n^q - 1 \to 0$

Bw: geom Summen-F:

$$\frac{x_n^p - 1}{x_n - 1} = x_n^{p-1} + x_n^{p-2} + \dots + x_n + 1$$

$$\frac{x_n^q - 1}{x_n - 1} = x_n^{q-1} + x_n^{q-2} + \dots + x_n + 1$$

5 - 3

$$\Rightarrow \lim \frac{x_n^p - 1}{x_n^q - 1} = \lim \frac{x_n^{p-1} + \dots + 1}{\underbrace{x_n^q + \dots + 1}_{q \text{ Terme}}} = \frac{\overbrace{1 + \dots + 1}^{p \text{ Terme}}}{1 + \dots + 1} = \frac{p}{q}$$

g) geom. Σ-Formel aus Lem. 2.7 besagt

für $q \in \mathbb{C}$, $\underline{|q| < 1}$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - \overset{\longrightarrow 0}{\boxed{q^{n+1}}}}{1 - q}$$

$$= \frac{1}{1 - q}$$

Speziell für $q = 1/2$:

$$\lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1 - 1/2} = 2$$

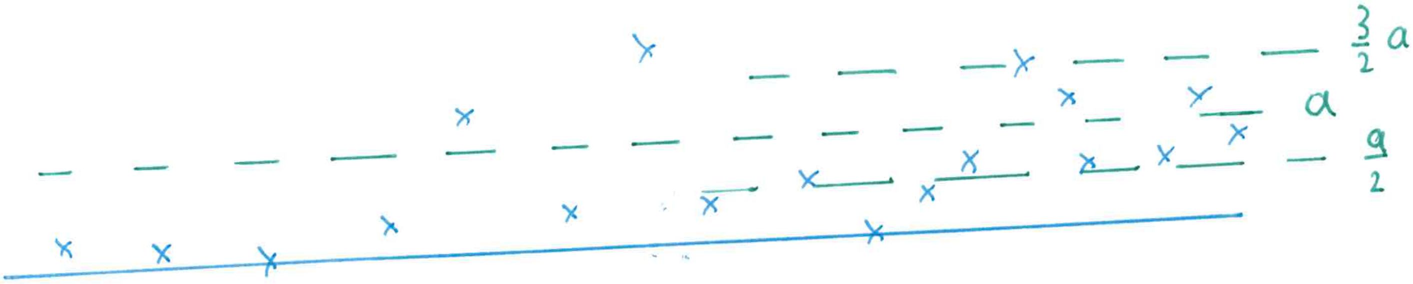
<u>S. 16</u>

Sei $a > 0$, $x_n \in [0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$ mit $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ und $r \in \mathbb{Q}$. Dann

$$\lim_{n \to \infty} x_n^r = a^r \qquad (*)$$

Ist $r > 0$ gilt auch $[0, \infty)$, $(x_n)_n$ Nullf. $\Rightarrow$ $(x_n^r)_n$ Nullf.

$\boxed{-4}$


$\frac{3}{2}a$
a
$\frac{a}{2}$

$$|x_n - a| = \left|\left(x_n^{1/N} - a^{1/N}\right)\right| \left|\sum_{k=0}^{N-1} x_n^{k/N} a^{\frac{N-1-k}{N}}\right|$$

$$= \left|\left(x_n^{1/N} - a^{1/N}\right)\right| \underbrace{a^{\frac{N-1}{N}}}_{=:A>0} \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{x_n}{a}\right)^{k/N}}_{=1+\dots>1} \qquad (**)$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ bel. Wähle $n_0 = n_0(A \cdot \varepsilon) \in \mathbb{N}$

s.d. $\forall n \geq n_0 : \quad |x_n - a| < A \cdot \varepsilon$

(**) umstellen $\Rightarrow \quad |x_n^{1/N} - a^{1/N}| \leq |x_n - a| \frac{1}{A} < \varepsilon$

Also $\sqrt[N]{x_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \sqrt[N]{a}$

Teil 3
Ist allgemein $r = \frac{p}{N}$ mit $N \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}$, so

$$x_n^r = \left(\sqrt[N]{x_n}\right)^p \underset{\text{Teil 1}}{\longrightarrow} \left(\lim \sqrt[N]{x_n}\right)^p$$

$$\underset{\text{Teil 2.}}{=} \left(\sqrt[N]{a}\right)^p = a^{p/N} = a^r$$

Teil 4 Sei nun $a = 0$, $r > 0$, $x_n \geq 0$.

Dann ex. zu bel. $\varepsilon > 0$ ein

$n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\quad \forall n \geq n_0: \quad \underbrace{|x_n - 0| < \varepsilon^{1/r}}$

$$\Rightarrow \quad |x_n^r| = |x_n|^r < \left(\varepsilon^r\right)^{1/r} = \varepsilon$$

Also $x_n^r \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. $\square$

Bsp 17 1)

Satz 16

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\left(\frac{4n^2-1}{n^2+7}\right)^3} = \boxed{\lim} \left(\underbrace{\frac{4n^2-1}{n^2+7}}\right)^{3/2}$$

$$= \frac{4-1/n^2}{1+7/n^2} \longrightarrow 4$$

$$= 4^{3/2} = 2^3 = 8$$

2) $\lim \left(\underbrace{\sqrt{n^2+3n} - n}\right)$

$$= \frac{\cancel{n^2}+3n - \cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+3n}+n} = \frac{3}{\sqrt{1+3/n}+1} \longrightarrow \frac{3}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{3}{2}$$

6 Monotone Folgen

Gewisse „abstrakte" Eigenschaften garantieren, dass eine Folge konvergiert, auch wenn man deren Grenzwert (= Limes) nicht gleich angeben kann. Ein solches Szenario untersuchen wir nun.

D. 1 Sei $(x_n)_n$ eine $\mathbb{R}$-Folge.

(x_n) heißt streng isoton $:\Leftrightarrow \forall n: x_{n+1} > x_n$

... isoton ... $x_{n+1} \geq x_n$

... streng antiton ... $x_{n+1} < x_n$

... antiton ... $x_{n+1} \leq x_n$

---

monoton wachsend ist gleichbedeutend zu isoton

... fallend ... antiton

(streng) monoton ... (streng) isoton oder (streng) antiton

Bsp. 2

$x_n = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ ist streng antiton

$x_n = \frac{1}{2}$ $(n \in \mathbb{N})$ ist antiton und isoton

5 - 8

$x_n = q^n$ $(n \in \mathbb{N})$ ist streng isoton für $q > 1$
streng antit. für $q \in (0,1)$
isoton & antit. für $q = 1$
gar nix für $q < 0$

S.3 (Monoton & beschränkt $\Rightarrow$ konvergent)

Jede isotone, von oben beschränkte $\mathbb{R}$-Folge
antitone unten
konvergiert

Bw $(x_n)_n$ von oben beschr $\Rightarrow$ $\sup_n x_n =: a$
existiert

Bh: $a = \lim x_n$

Bw: Sei $\varepsilon > 0$ bel. Nach Eigensch. d. Supr.
ex. ein x_{n_0} mit $x_{n_0} > a - \varepsilon$.

$(x_n)_n$ isoton $\Rightarrow \forall n \geq n_0 : x_n \geq x_{n_0} > a - \varepsilon$

a obere Schranke: $\forall n : x_n \leq a < a + \varepsilon$

$\Rightarrow$ insges: $\forall n \geq n_0 : |x_n - a| < \varepsilon$ $\square$

Teil 0)

Bw: OE nehme $x_n \in (0, \infty)$ an.

Ansonsten betrachte Folge $y_n = \max\{x_n, a/2\}$

Dann $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq n_0 := n_0(a/2)$

$$\boxed{\frac{a}{2} > |x_n - a|} \Rightarrow x_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$$

$\Rightarrow$ ab n_0 gilt $y_n = x_n$

Satz 14 (h) $\Rightarrow$ $\lim y_n = \lim x_n = a$

Teil 1

Ist $r \in \mathbb{N}$ so folgt aus S. 14 (b) induktiv:

$$\lim x_n^r = \lim (\underbrace{x_n \cdot \ldots \cdot x_n}_{r\text{-mal}})$$

$$= \lim x_n \cdot \ldots \cdot \lim x_n = a^r$$

Teil 2

Jetzt betrachten wir den Fall $r = 1/N$ für $N \in \mathbb{N}, N > 1$.

geom Σ-Formel: $x^N - y^N = (x-y) \sum_{k=0}^{N-1} x^k y^{N-1-k}$

setze $x = x_n^{1/N}$, $y = a^{1/N}$

$\Rightarrow$

Anwendung der Monotonie: Babylonischen oder Heron-Algorithmus zum Wurzelziehen

Bsp 4 Heron-Verf.

Sei $b, a > 1$ und Flg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ rekursiv definiert

$$x_0 = b \quad \text{und} \quad x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0 \qquad (*)$$

Bh $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist antiton, beschränkt und $\lim x_n = \sqrt{a}$

Bw. ① $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \quad x_n > 0$ ⇒ dividieren erlaubt

$\boxed{n = 0}$ $\quad x_0 = b > 1$

$\boxed{n \to n+1}$

$$x_{n+1} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{>0}\left(\underbrace{x_n}_{>0} + \underbrace{\frac{a}{x_n}}_{>0}\right)$$

② $\forall n \in \mathbb{N} : \quad x_n \geq \sqrt{a}$

5-10

$\forall n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left[x_n + \frac{a}{x_n}\right] - \sqrt{a}$$

$$= \frac{1}{2}\left[x_n - 2\sqrt{a} + \frac{a}{x_n}\right]$$

$$= \frac{x_n^2 - 2x_n\sqrt{a} + a}{2x_n} = \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n} \geq 0. \checkmark$$

③ $\forall n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{a}{\underline{\underline{x_n^2}}}\right] \overset{②}{\leq} \frac{1}{2}\left[1 + \frac{a}{\underline{\underline{a}}}\right] = 1$$

$\Rightarrow \quad x_{n+1} \leq x_n \quad \Rightarrow$ antiton

Zusammen mit ② $\overset{S.3}{\Rightarrow}$ (x_n) konvergent

④ Identifikation des Limes

Nenne $x := \lim x_n$.

Wir nehmen auf beiden Seiten der Rekursionsgl. $(*)$ den Limes $n \to \infty$

$$x = \lim x_{n+1} = \lim \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{a}{x}\right] \qquad (xx)$$

und sehen, dass x ein Fixpunkt ist,

d. h. $\quad x_n = x \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} = x$.

(xx) auflösen: $2x = x + \frac{a}{x} \Leftrightarrow x^2 = a$

$\Leftrightarrow \quad x \in \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$

Da $x_n > 0$ für alle n, so auch $x \geq 0$,

also $\quad x = \sqrt{a}$

⑤ Fehlerabschätzung: Aus ② folgt

$\forall n \in \mathbb{N}: \quad |x_{n+1} - \sqrt{a}| = x_{n+1} - \sqrt{a}$

$$= \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n} \leq \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}} \underset{a>1}{\leq} \frac{1}{2}(x_n - \sqrt{a})^2$$

Ist z. B. $\quad |x_n - \sqrt{a}| = 10^{-k}$, so

$$|x_{n+1} - \sqrt{a}| = \frac{1}{2} 10^{-2k}$$

Im der Tat verdoppelt sich im jedem Iterationsschritt die Anzahl der „korrekten Stellen" von x_n, z. B. für $a=2$, $b=1$

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{2\cdot 2}{3}\right) = \frac{17}{12} = 1{,}416\ldots$$

$$x_3 = \frac{577}{408} = 1{,}414215\ldots$$

vgl. mit $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$

Beob: Startwert $x_0 = b$ beeinflußt Limes und Konvergenzrate nicht.

Sind $a, b \in \mathbb{Q}$ so auch alle x_n auch wenn Limes $\sqrt{a}$ irrational ist.

Erweiterung dieses Verfahrens zum Ziehen der k-ten Wurzel

Sei $a \in (0, \infty)$, $k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$, $b^k \geq a$ und

$$x_0 := b, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 : x_{n+1} := \frac{1}{p}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right)$$

5 - 13 $\Rightarrow \lim x_n = \sqrt[k]{a}$

Heron interessiert eigentlich

geom. Mittel von x_n und $\frac{a}{x_n}$ nämlich $\sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}$

aber Heron konnte ja noch nicht Wurzelziehen, bildet statt desse

arithmetisches M. -||- -||- $\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) =: x_{n+1}$

und ~~hofft~~, dass $(x_n)_n$ gegen x mit $x^2 = a$ konv.

wir bewiesen

In der Tat verdoppelt sich in jedem Iterationsschritt die Anzahl der „korrekten

8.11.2021 ——— 11.11.2021

Stellen" von x_n, z. B. für $a=2$, $b=1$

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2\cdot 2}{3}\right) = \frac{17}{12} = 1,416\ldots$$

$$x_3 = \frac{577}{408} = 1,414215\ldots$$

vgl. mit $\sqrt{2} = 1,41421356\ldots$

Beob: Startwert $x_0 = b$ beeinflußt Limes und Konvergenzrate nicht.

Sind $a, b \in \mathbb{Q}$ so auch alle x_n auch wenn Limes $\sqrt{a}$ irrational ist.

Erweiterung dieses Verfahrens zum Ziehen der k-ten Wurzel

Sei $a \in (0, \infty)$, $k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$, $b^k \geq a$ und

$$x_0 := b, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 : x_{n+1} := \frac{1}{p}\left((k-1)\,x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right)$$

5-13

$$\Rightarrow \lim x_n = \sqrt[k]{a}$$

$$\Rightarrow \quad \lim x_n = \sqrt[k]{a}$$

Bsp 5 Exponentielles Wachstum

Anlage von Kapital K mit Zinssatz p pro Jahr ergibt nach einem Jahr

$$K(1+\alpha) \qquad \alpha = \frac{p}{100}$$

nach t Jahren ohne Zinseszins

$$K(1+t\alpha)$$

Haben wir eine Zinsauszahlung in $\frac{t}{2}$ und t

$$\left(K\left(1+\frac{t}{2}\alpha\right)\right)\left(1+\frac{t}{2}\alpha\right) = K\left(1+\frac{t\alpha}{2}\right)^2$$

Bei n Zinsterminen

$$\frac{t}{n}, 2\frac{t}{n}, \ldots, (n-1)\frac{t}{n}, n\frac{t}{n} = t$$

$$K\left(1+\frac{t\alpha}{n}\right)^n$$

Einer „stetigen Verzinsung" entspricht also der Limes $n \to \infty$. Dies motiviert die Untersuchung der Folge:

$(e_n(x))_n$ für $x \in \mathbb{R}$ mit

$$e_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Kapital wächst mit Zinseszins schneller als ohne „⇒"

für $x > 0$ ist Flg $(e_n(x))$ isoton bzgl n.

Betrachte auch modifizierte Flg

$$e_n^*(x) := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} = e_n(x)\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

$$> e_n(x) \text{ für } x > 0$$

$\underline{x = 0} \Rightarrow e_n(x) = 1$ für alle n

$\underline{x > 0} \Rightarrow$ Flg $n \longmapsto e_n(x)$ streng isoton $\underline{n \in \mathbb{N}}$

Ergänze $n_x = 2$

$x < 0 \Rightarrow$ Flg — || ——— $\underline{\text{ab } n = n_x}$

wobei n_x kleinste natürliche Zahl mit $n_x \geq -x + 1$.

Bw: Sei $x \neq 0$ und $n \geq n_x$

$$\frac{e_{n+1}(x)}{e_n(x)} = \frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}} \frac{n^n \; (n+1)^{n+1}}{n^n \; (n+1)^{n+1}}$$

$$= \frac{(n+1+x)^{n+1}}{(n+x)^{n+1}} \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \frac{n+x}{n}$$

$$= \left[\frac{\boxed{n^2+n+nx}}{(n+x)\,(n+1)}\right]^{n+1} \left(1+\frac{x}{n}\right) \quad \Bigg| \; (n+x)(n+1)-x$$

$$= \left[1 - \frac{x}{(n+x)(n+1)}\right]^{n+1} \left(1+\frac{x}{n}\right)$$

strk. Bernoulli-Ungl. anwendbar wg. $n \geq n_x$

$$> \left[1 - \frac{x}{n+x}\right] \left(1+\frac{x}{n}\right) = \frac{n+x-x}{n+x} \; \frac{n+x}{n} = 1$$

$\Rightarrow \forall n \geq n_x: \; e_{n+1}(x) > e_n(x) \Rightarrow$ streng isot.

Ähnlich zeigt man, dass Folge

$n_x \leq n \longmapsto e_n^*(x)$ streng antiton

Insgs für $\underline{x \neq 0}$

$$e_{n_x}(x) < e_{n_x+1}(x) < e_{n_x+2}(x) < \dots$$

$$< e^*_{n_x+2}(x) < e^*_{n_x+1} < e^*_{n_x}(x)$$

$\Rightarrow$ $(e_n(x))$ monoton & beschr $\Rightarrow$ konv gegen $e(x)$

$(e^*_n(x))$ —— || —————— $e^*(x)$

Da $1 + \frac{x}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ gilt

$$\lim e_n^*(x) = \lim e_n(x) \lim \left(1+\frac{x}{n}\right) = \lim e_n(x)$$

Bez. Limes mit

$$\exp(x) := \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \ x \in \mathbb{R}$$

Damit ist die <u>Exponentialfunktion</u>

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$ definiert

Speziell heißt

$$e := \exp(1)$$ Eulersche Zahl.

$e \in (2,3)$ da $2 = e_1(1) < e < e_5^*(1) = 3$

Die ersten Dezimalst. lauten $2{,}718281828\ldots$

Im Gegensatz zum Heron-Verfahren konv die Flg $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ nur langsam gegen e

genauer

$$0 < e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sim \frac{e}{2n} \sim \frac{1}{n}$$

$n = 10$ Fehler $\sim \frac{1}{10}$

$n = 100$ $\frac{1}{100}$

$\Rightarrow$ brauchen also 90 weitere Flg-Glieder um eine weitere Dezimalstelle zu berechnen.

Wesentlich schneller wird e und allg. $\exp(x)$ durch Flg.

$$n \longmapsto E_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

approximiert. Für $x > 0$ sind alle Summanden positiv, also $(E_n(x))_n$ streng isoton.

5-18

Setze $$E(x) = \lim_{n\to\infty} E_n(x)$$

wobei $E(x) = +\infty$ noch nicht ausgeschl. ist.

B.h. $\forall x>0: \lim_{n\to\infty} E_n(x) = \exp(x) \quad < \infty$

Bw: $$e_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \underset{LS}{\overset{\text{binom}}{=}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \underset{\longleftrightarrow}{\frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \quad \frac{x^k}{n^k}}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{n}{n}}_{\le 1} \frac{(n-1)}{n} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{(n-k+1)}{n}}_{\le 1} \quad \frac{x^k}{k!}$$

$$\le \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = E_n(x)$$

Nun zur komplementären Ungl.

Fixiere $m \in \mathbb{N}$, wähle $n \geq m$

$$e_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k}$$

$$\geq 1 + \sum_{k=1}^{\boxed{m}} \underbrace{\frac{m}{m} \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \ldots \cdot \frac{m-k+1}{m}} \frac{x^k}{k!}$$

$$\lim_{m \to \infty} \quad -\|- \quad = 1$$

für jedes feste $k \in \{1, .., m\}$

$$\Rightarrow \quad \exp(x) \geq E_m(x)$$

Sandwich argument S. 14 e) $\Rightarrow$ $\exp(x) = E(x)$

Bem 6

a) Für Approximationsfehler gilt (Übg.)

$$0 < \varepsilon_m = e - E_m(1) < \frac{1}{m!\, m}$$

b) e ist irrational

Ann: $\exists\ p, q \in \mathbb{N}$ mit $\frac{p}{q} = e = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} + \varepsilon_m$

Wähle $m \geq \max\{2, q\}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{p}{q}\, m!} \overset{\in \mathbb{N}}{=} \boxed{\sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!}} + \overset{\in (0,1)}{\boxed{m!\, \varepsilon_m}} \qquad \Rightarrow \lightning$$

5-20

a) $\Rightarrow$ $0 < m!\, \varepsilon_m < \frac{1}{m} \leq \frac{1}{2} < 1$

c) $\forall n \in \mathbb{N}: \quad e\left(\frac{n}{e}\right)^n \le n! \le en\left(\frac{n}{e}\right)^n$

Bw: $\underline{n=1}$ $\quad \frac{e}{e} \le 1 \le 1\frac{e}{e}$

Setze $e_n = e_n(1)$.

$\underline{n \geq 2}$ Multipliziere die Ungl.

$$e_1 < e < e_1^*$$

$$\vdots$$

$$e_{n-1} < e < e^*_{n-1}$$

$$\Rightarrow \overbrace{\prod_{j=1}^{n-1} e_j^*}^{= \frac{n^n}{(n-1)!}} > e^{n-1} > \prod_{j=1}^{n-1} e_j$$

$$= \left(\frac{2}{1}\right)^1 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdots \left(\frac{n-1}{n-2}\right)^{n-2} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$$

Teleskopprodukt

$$= \frac{1}{1}\,\frac{1}{2} \cdots \frac{1}{n-2}\,\frac{n^{n-1}}{n-1}$$

$$= \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}$$

Analog folgt

5-21

$$\Rightarrow \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{n!}{e^{n-1}} < \cancel{e^{n-1}}\, n! < \frac{n^n}{(n-1)!}\,\frac{n!}{e^{n-1}} \Rightarrow \text{Bh.}$$

d) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$$

Kurzschreibweise dafür $n! \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

<u>Bw</u>

c) ⇒ $$\frac{1}{n}\left(e\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^{1/n} \le \frac{1}{n}\, n^{1/n} \le \frac{1}{n}\left(en\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^{1/n}$$

$$1 \leftarrow \frac{\boxed{e^{1/n}}}{\cancel{n}} \overset{\shortparallel}{} \frac{\cancel{n}}{e} \qquad\qquad \underset{\underset{1}{\downarrow}}{e^{1/n}}\ \underset{\underset{1}{\downarrow}}{n^{1/n}}\ \frac{1}{\cancel{n}}\ \frac{\cancel{n}}{e}$$

<u>D.7</u> (Intervallschachtelung)

Sei $(a_n)_n$ isotone und $(b_n)_n$ antitone Flg mit $\forall n \in \mathbb{N}: \quad a_n < b_n$. Offensichtlich gilt.

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$$

Man nennt die Folge $([a_n, b_n])_n$ eine

<u>Intervallschachtelung.</u>

<u>S.8</u> Es sei $([a_n, b_n])_n$ eine Intervallschachtelung. Dann existieren $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass

$\boxed{a \leq b}$ und

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = [a, b] \neq 0$$

Gilt zusätzlich $\lim\limits_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$, dann

$a = b$ und $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{a\}$

Bw: übg

Bsp. 9 a) Sei $\overset{\text{isoton}}{a_n} := e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$$\underset{\text{antiton}}{b_n} := e_n^* = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$\Rightarrow \left([a_n, b_n]\right)_n$ ist Intervallschachtelung

$\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{e\}$, da $b_n - a_n = \frac{e_n}{n} < \frac{4}{n} \to 0$

b) Die Folge $\left([E_n, E_n + \varepsilon_n]\right)_n$ mit $\varepsilon_n = \frac{1}{n!\,n}$ ist auch Interv.-Schacht. mit

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [E_n, E_n + \varepsilon_n] = \{e\}$$

c) $\mathbb{Q}$ liegt dicht im $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ zu jedem reellen, insb. irrationalem x gibt es Intervallsch. $([r_n, q_n])_n$ mit $r_n, q_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\bigcap_n [r_n, q_n] = \{x\}$$

insbs. $\lim r_n = x$ isot.

$\lim q_n = x$ antit.

d) Da $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, 1/n) = \emptyset$ übg.

kann man im S. 8 die abschl. Interv. nicht durch offene ersetzen.

Bsp. 10 Konst. einer Interv. Sch. zu $x = \sqrt{2}$

$$a_1 := 1 < x := \sqrt{2} < b_1 := 2$$

$$c_1 = \frac{1}{2}(a+b) = 3/2 \Rightarrow c_1^2 = \frac{9}{4} > 2$$

$$\Rightarrow a_2 := a_1 = 1 < x < b_2 := c_1 = 3/2$$

$$c_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{5}{4} \Rightarrow c_2^2 = \frac{25}{16} < 2$$

$$\Rightarrow \quad a_3 := c_2 = \frac{5}{4} < x < b_3 := b_2 = \frac{3}{2}$$

$$c_3 := \frac{a_3 + b_3}{2} = \frac{11}{8} \Rightarrow c_3^2 = \frac{121}{64} < 2$$

$$\Rightarrow \quad a_4 := c_3 = \frac{11}{8} < x < b_4 := b_3 = \frac{3}{2}$$

$\vdots$

$\Rightarrow$ alle $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$

$$[1,2] \supset [1, 3/2] \supset [5/4, 3/2] \supset [\tfrac{11}{8}, \tfrac{3}{2}] \supset \dots$$

Länge 1 $\quad 1/2$ $\quad 1/4$ $\quad 1/8$

$$\Rightarrow \quad b_n - a_n = (1/2)^{n-1} \rightarrow 0$$

Bisektionsverfahren zur konstruktion einer Intervallschachtelung

insbes $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{\sqrt{2}\}$

Lässt sich verallgemeinern: Seien $n \in \mathbb{N}$, $a > 0$

Intervallschachtelung zu $\sqrt[n]{a}$

$\boxed{5\text{-}25}$ Trial and error

$$c_2 = \frac{a_2+b_2}{2} = \frac{5}{4} \Rightarrow c_2^2 = \frac{25}{16} < 2$$

$$\Rightarrow \quad a_3 := c_2 = \frac{5}{4} < x < b_3 := b_2 = \frac{3}{2}$$

$$c_3 := \frac{a_3+b_3}{2} = \frac{11}{8} \Rightarrow c_3^2 = \frac{121}{64} < 2$$

$$\Rightarrow \quad a_4 := c_3 = \frac{11}{8} < x < b_4 := b_3 = \frac{3}{2}$$

$\vdots$

$\Rightarrow$ alle $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$

$$[1,2] \supset [1, 3/2] \supset [5/4, 3/2] \supset [\tfrac{11}{8}, \tfrac{3}{2}] \supset \dots$$

Länge 1 $\quad 1/2 \quad 1/4 \quad 1/8$

$$\Rightarrow \quad b_n - a_n = (1/2)^{n-1} \rightarrow 0$$

Bisektionsverfahren zur Konstruktion einer Intervallschachtelung

insbes $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{\sqrt{2}\}$

11.11

15.11.2021

Lässt sich verallgemeinern: Seien $n \in \mathbb{N}$, $a > 0$ Intervallschachtelung zu $\sqrt[n]{a}$

$\boxed{5-25}$ Trial and error

S. 11 Sei $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ von oben beschr. und $s \in \mathbb{R}$.

Äquivalent sind:

(α) $s = \sup A$

(β) s ist obere Schranke von A &

$\exists$ Folge $x_n \in A, n \in \mathbb{N}$, mit $\lim x_n = s$

(γ) (β) gilt & (x_n) ist isoton.

Bw Übg. Beachte: x_n darf mehrmals Wert $a \in A$ annehmen.

7 Häufungspunkte & Cauchyfolgen

D. 1 Seien $(x_n)_n, (y_k)_k$ $\mathbb{C}$-Flg und $a \in \mathbb{C}$.

ⓐ a ist Häufungspunkt (HP) von (x_n)

$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \# \{ n \in \mathbb{N} \mid x_n \in U_\varepsilon(a) \} = \infty$$

„Jede noch so kleine Umgb. von a enth. ∞ viele Flg-Glieder."

$\Lambda(x_n)$ bezeichnet die Limesmenge von $(x_n)_n$, d.h. die Menge aller HP von (x_n)

ⓑ (y_k) heißt <u>Teilfolge</u> (TF) von (x_n)

:⟺ $\exists$ streng isotones $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

mit $y_k = x_{\varphi(k)}$

Man schreibt: $\varphi(k) = n_k$, $y_k = x_{n_k}$

⌈ Ist φ sogar bijektiv, dann $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ⌋

<u>Bsp</u> $(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(x_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$, $(x_{2^k})_{k\in\mathbb{N}}$

sind TF von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

<u>S. 2</u>

① $a = \lim\limits_{n} x_n \iff \Lambda(x_n) = \{a\}$

(⟺ Jede TF von (x_n) konv. gegen a.)

② $b \in \Lambda(x_n) \iff \exists$ TF $(x_{n_k})_k$ von (x_n)

mit $b = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$

<u>Bw</u> ① übg

6 - 2

② „⇐"

insbes unendl. viele

$b = \lim x_{n_k} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ liegen fast alle x_{n_k} im $\mathcal{U}_\varepsilon(b)$

„⇒"

b HP von $(x_n) \Rightarrow \varepsilon = 1: \# \{ n \mid x_n \in \mathcal{U}_1(b) \} = \infty$

$\Rightarrow \exists \; x_{n_1} \in \mathcal{U}_1(b)$

$\varepsilon = 1/2 \Rightarrow \# \{ n \mid x_n \in \mathcal{U}_{1/2}(b) \} = \infty \Rightarrow \exists \; x_{n_2} \in \mathcal{U}_{1/2}(b)$

$n > n_1$ mit $n_2 > n_1$

$\varepsilon = 1/3 \Rightarrow \quad \dots \quad \Rightarrow \exists \; x_{n_3} \in \mathcal{U}_{1/3}(b)$ mit $n_3 > n_2$

usw.

$\Rightarrow \forall \; k \in \mathbb{N} \;\; \exists \; n_k$ mit $|x_{n_k} - b| < 1/k$ &

$n_k > n_{k-1}$ □

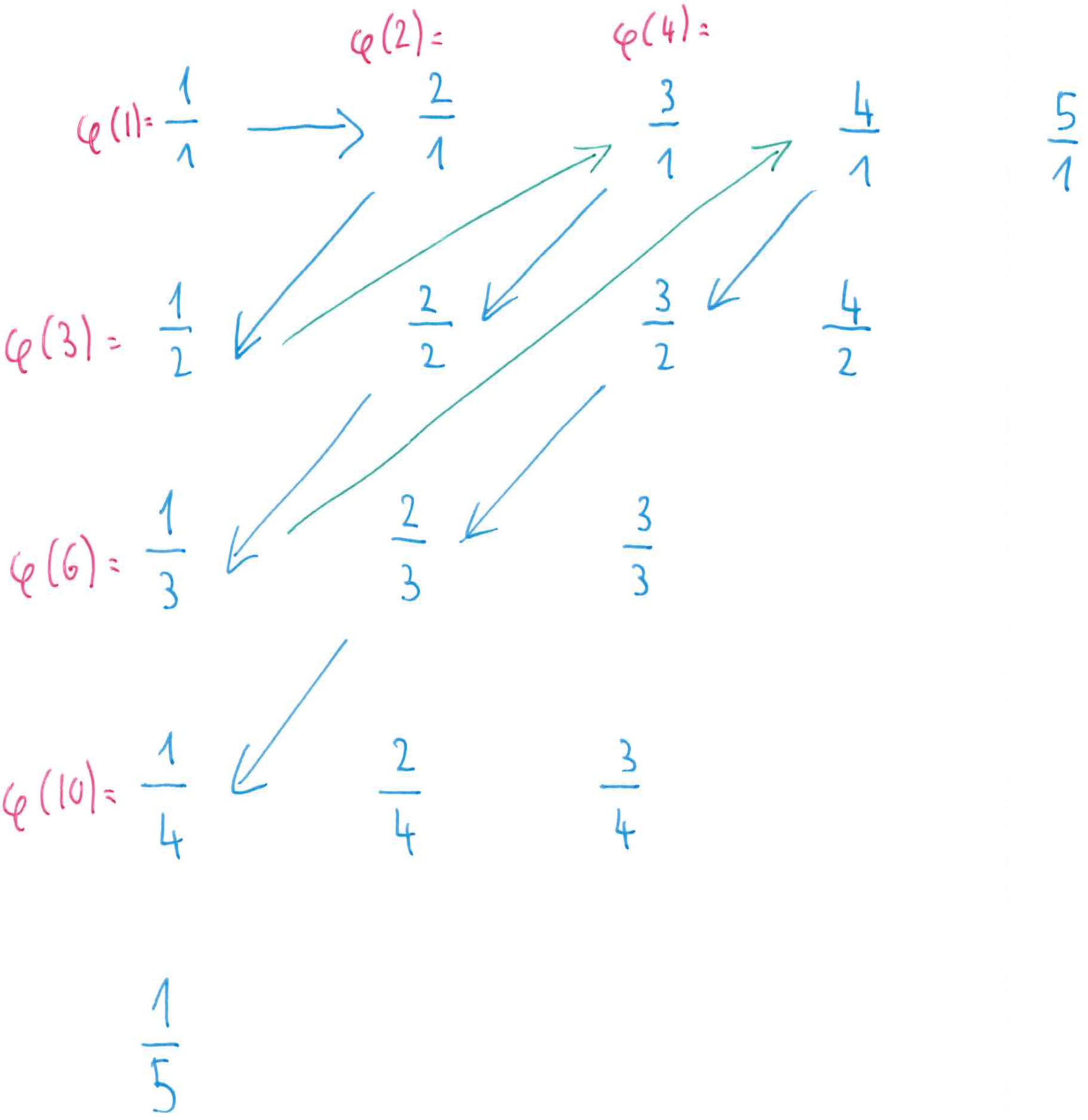
Bsp 3

(x_n) best diverg. gegen $+\infty \Rightarrow \Lambda(x_n) = \emptyset$

$$x_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \begin{array}{l} \nearrow 1 \quad n \text{ ger.} \\ \searrow -1 \quad n \text{ unger} \end{array}$$

$\Rightarrow \Lambda(x_n) = \{-1, 1\}$

konstruiere $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q} \cap (0,\infty)$ surj.



übg: * Für $x_n = \varphi(n)$ gilt $\Lambda(x_n) = [0,\infty)$

* konstr. Flg. mit $\Lambda(x_n) = \mathbb{R}$

S4 Jede $\mathbb{R}$- Folge $(x_n)_n$ enth monotone TF $(x_{n_k})_k$.

Bw

Nenne $k \in \mathbb{N}$ Gipfelstelle (GS) von $(x_n)_n$

$:\Leftrightarrow \quad \forall n > k : \quad x_j < x_k$

„Wert x_k wird nie mehr erreicht".

Fallunterscheidung:

① $\exists$ unendl. viele GS

$n_1 < n_2 < n_3 \quad \dots$

$\Rightarrow \quad (x_{n_k})_k$ streng antiton

② $\exists$ nur endl. viele GS

Sei $n_1 \in \mathbb{N}$ s.d. $n_1, n_1 + 1, n_1 + 2, \dots$ enth. keine GS

n_1 keine GS $\Rightarrow \exists \; n_2 > n_1$ mit $x_{n_2} \geq x_{n_1}$

n_2 —— ‖ —— $\Rightarrow \exists \; n_3 > n_2$ mit $x_{n_3} \geq x_{n_2}$

....

$\Rightarrow \quad (x_{n_k})_k$ isoton

6-5

Satz 5 vom Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte $\mathbb{R}$-Folge (x_n) enthält konv. TF.

BW

(x_n) beschr $\overset{S.4}{\Longrightarrow}$ enth monotone TF, ebenfalls beschr $\Rightarrow$ konv. □

Übg: Beweise S. 5 mit Bisektionsverf. statt mit Monotonie-S. 4.

D.6 Sei $(x_n)_n$ $\mathbb{R}$-Flg und $A = \Lambda(x_n)$

Für (x_n) von oben
unten
beschr. bezeichnen wir

$\sup A \in \mathbb{R}$ mit $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ oder $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$

$\inf A \in \mathbb{R}$ mit $\liminf x_n$ oder $\underline{\lim}\, x_n$

bzw Limes Superior von $(x_n)_n$.

bzw Limes Inferior von $(x_n)_n$.

Ist (x_n) nicht von oben beschr., setze $\limsup x_n = \overline{\lim\limits_n}\, x_n = +\infty$

unten $\liminf x_n = \underline{\lim\limits_n}\, x_n = -\infty$

Bm 7 / Übg.

a) Sei $(x_n)^{\subset \mathbb{R}}$ von oben beschr, $\Lambda(x_n) \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ $\overline{\lim}\, x_n$ ist ein HP von x_n

genauer: der größte HP

b) $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ beschr

$$\Rightarrow \inf_n x_n \leq \underline{\lim}_n\, x_n \leq \overline{\lim}_n\, x_n \leq \sup_n x_n$$

c) $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ konv $\Leftrightarrow$ $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$

S.8 Sei $(x_n) \subset \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann:
von oben beschr.

$\lambda = \overline{\lim}\, x_n \Leftrightarrow$
(i) $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : x_n < \lambda + \varepsilon$
(ii) $\quad$ " $\quad \exists$ TF $x_{n_k} : \forall k : x_{n_k} > \lambda - \varepsilon$

Bw

„$\Rightarrow$" $\lambda \in \Lambda(x_n) \Rightarrow \#\{n \mid x_n > \lambda - \varepsilon\} = \infty \Rightarrow$ (ii)

„$\Leftarrow$"

Ist $\lambda = \sup_n x_n =: s$, so $\forall n : x_n \leq \lambda < \lambda + \varepsilon$

Ist $\lambda < s$, so ex $\varepsilon > 0$ mit $\lambda < \lambda + \varepsilon < s$

$\Rightarrow$ nur endl viele x_n im $[\lambda + \varepsilon, s]$

Ansonsten: Bo-We $\Rightarrow$ ex. HP im $[\lambda + \varepsilon, s]$

$\Rightarrow$ dieser ist gr. als λ $\Rightarrow$ $\lightning$.

„$\Leftarrow$"

Dann ex $\forall \varepsilon > 0$ unendl. viele n mit $|x_n - \lambda| < \varepsilon$

also $\lambda \in \Lambda(x_n)$.

(1) $\Rightarrow$ $\lambda + \varepsilon \notin \Lambda(x_n)$ für alle $\varepsilon > 0$

also $\lambda = \sup \Lambda(x_n)$. □

S. 9 Sei $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$. Setze für $n \in \mathbb{N}$

$$\lambda_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\}. \text{ Dan}$$

Dann

a) (λ_n) antiton

b) (λ_n) beschr. v.o $\Leftrightarrow$ (x_n) −||−

c) $\overline{\lim}\, x_n = \lim \lambda_n$

Bw:

$$\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} \supset \{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$$

$\lambda_n = \sup$ −||− $\geq \sup$ ||

$\Rightarrow$ antiton

zu b): $\exists\ s \in \mathbb{R}$ mit $\forall n:\ x_n \leq s$

$\Leftrightarrow$ ... $\lambda_n \leq s$

zu c)

Insbes: $\overline{\lim}\, x_n = +\infty \Leftrightarrow (x_n)$ unbeschr.

$\Leftrightarrow \lim \lambda_n = +\infty$

6-8

Ist $\lambda = \overline{\lim}\, x_n \in \mathbb{R}$ so gelten

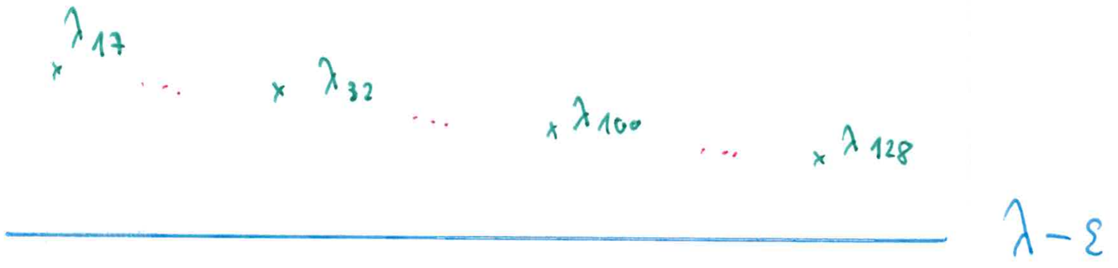
(i), (ii).

(i) $\Rightarrow \quad \forall n \geq n_0 : \quad \lambda_n \leq \lambda + \varepsilon/2 < \lambda + \varepsilon$

(ii) $\Rightarrow$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$:

$$\lambda - \varepsilon < x_n < \lambda_n$$

ja sogar $\forall n$, da λ_n antiton



Also $\forall n \geq n_0 : |\lambda_n - \lambda| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \lim \lambda_n = \lambda$ □

D.10 Sei $(x_n)_n$ $\mathbb{C}$-Flg.

a) $(x_n)_n$ Cauchy-Folge $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N}$

$\forall n, m \geq n_0 : \; |x_n - x_m| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} : \quad |x_{n_0} - x_{n_0+k}| < \varepsilon$

b) $(x_n)_n$ beschr $\Leftrightarrow$ $(|x_n|) \subset \mathbb{R}$ beschr.

L.11

(x_n) Cauchy-F $\Rightarrow$ $(x_n)_n$ beschr.

6-9

Bw. $\exists\ n_0$ mit $|x_{n_0} - x_{n_0+k}| < 1 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$.

sei $K := \max\{|x_1|, \ldots, |x_{n_0-1}|, |x_{n_0}| + 1\}$

$\bigcirc \Rightarrow \quad |x_{n_0+k}| < |x_{n_0}| + 1$

$\Rightarrow \forall n : \quad |x_n| \leq K$ $\square$

S.12 Sei $(x_n)_n$ $\mathbb{C}$-Folge. Dann

(x_n) konvergent $\Longleftrightarrow$ (x_n) Cauchy F.

Bw „$\Rightarrow$" Sei $a = \lim x_n$ und $\varepsilon > 0$.

$\Rightarrow \exists\ n_0\ \forall\, n \geq n_0 : \ |x_n - a| < \varepsilon/2$

$\Rightarrow \forall\, n, m \geq n_0 : \ |x_n - x_m| \leq |x_n - a| + |a - x_m|$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2$$

„$\Leftarrow$" (x_n) Cauchy $\overset{L.10}{\Rightarrow}$ besch.

Bo-We $\Rightarrow$ es ex TF $(x_{n_k})_k$ und $a \in \mathbb{C}$ mit

$$\lim_k x_{n_k} = a \qquad (x)$$

~~$\Rightarrow$ Zu $\varepsilon > 0$ $\exists\ k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall\, k \geq k_0 : |x_{n_k} - a| < \varepsilon/2$~~

Zu $\varepsilon > 0$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall\, n, m \geq n_0$: $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$

und $\exists\, k_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall\, k \geq k_0$ $|x_{n_k} - a| < \varepsilon/2$

(x) ⇗ und $n_{k_0} \geq n_0$

$\Rightarrow$ $\forall\, n \geq n_0$:

$$|x_n - a| \leq \underbrace{|x_n - x_{n_{k_0}}|}_{< \varepsilon/2} + \underbrace{|x_{n_{k_0}} - a|}_{< \varepsilon/2} \qquad \square$$

Vorsicht 13

a) In $\mathbb{Q}$ gelten folgende Sätze nicht:

S 6.3 monot & beschr F konv

S. 7.5 Bolzano - Weierstraß

S. 7.12 Cauchyf. konvergierte

Bei diesen 3 Sätzen wird nämlich (indirekt) die Vollst. verwendet

b) Sei $x_n = \sqrt{n} \Rightarrow x_{n+1} - x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$$= \frac{\cancel{n}+1 - \cancel{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$ aber (x_n) best. diverg gegen $+\infty$.

Insbesondere gewährleistet

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : |x_n - x_{n+1}| < \varepsilon$$

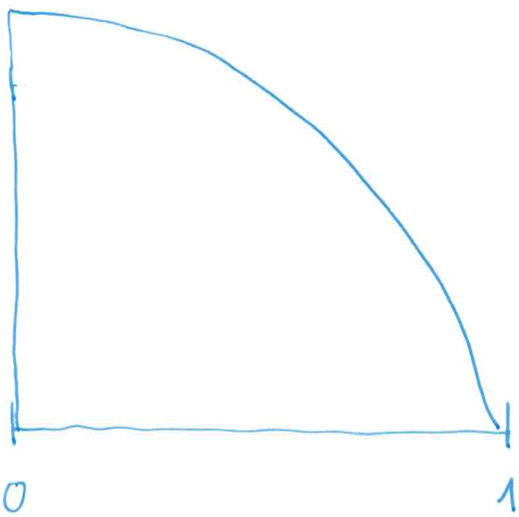
<u>nicht</u> die Cauchyeigenschaft.

8 Funktionen

D. Seien A, B zwei nichtleere Mengen. Eine Funktion $f: A \to B$ ist eine Zuordnung, die jedem Element $a \in A$ ein Element $b = f(a) \in B$ zuordnet.

Insbesondere ergibt sich der <u>Funktionengraph</u>

$$G = G(f) = \{(a, b) \in A \times B \mid b = f(a)\}$$



z.B. $A = [0,1]$

$B = \mathbb{R}$

$f(x) = -x^2 + 1$

Nachtrag: Sei $z_n = x_n + i y_n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Dann

$(z_n)_n$ ist Cauchy-F in $\mathbb{C}$

$\iff$ $(x_n)_n$ und $(y_n)_n$ sind Cauchy-F in $\mathbb{R}$

$\iff$ $(x_n)_n$ und $(y_n)_n$ konvergieren in $\mathbb{R}$

S.7.12 in $\mathbb{R}$ komplett bewiesen

$\iff$ $(z_n)_n$ konvergiert in $\mathbb{C}$

S 5.12

zu $\iff$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall \overset{m}{n} \geq n_0(\varepsilon)$

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon^2 > |z_n - z_m|^2 &= |x_n + i y_n - x_m - i y_m|^2 \\ &= (x_n - x_m)^2 + (y_n - x_m)^2 \\ \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon &, \ |y_n - y_m| < \varepsilon \\ \Rightarrow |z_n - z_m|^2 &< 2\varepsilon^2 \end{aligned}}$$

Problem: Was ist Zuordnung?

Jetzt richtig: D.

Eine Funktion von A nach B ist eine Teilmenge $G \subset A \times B$ mit der Eigenschaft:

Für jedes $a \in A$ gibt es genau ein $b \in B$ mit $(a,b) \in G$.

Setze dann $f(a) = b$ eindeutig! und

15.11

18.11 identifiziere die nun wohldef Zuordnung

$$f : a \longmapsto b$$

mit dem Graphen G.

Abbildung ist gleichbedeutend zu Funktion.

A heißt Definitions-, B Wertebereich von f.

Bsp 2 Seien $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, a_1, \dots a_n \in \mathbb{C}$ $a_n \neq 0$. Definiere

$$p_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ durch } p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

$$= a_0 + a_1 z + \dots + a_k z^k$$

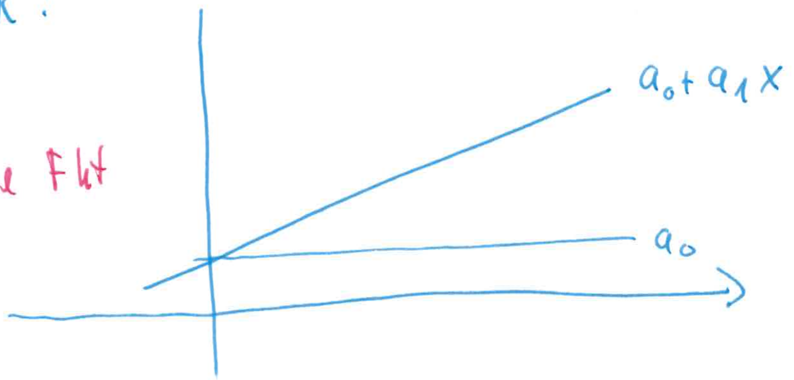
Dann heißt p_n (komplexe) Polynom(funktion). Jedes polynom kann ich mit komplexen oder reellen Argumenten betrachten.

Spezialfälle:

n = 0 $\quad p_0(x) = a_0 \in \mathbb{C}$ $\quad$ konstante Fkt

n = 1 $\quad p_1(x) = a_0 + a_1 x$ $\quad$ (affin) lineare Fkt

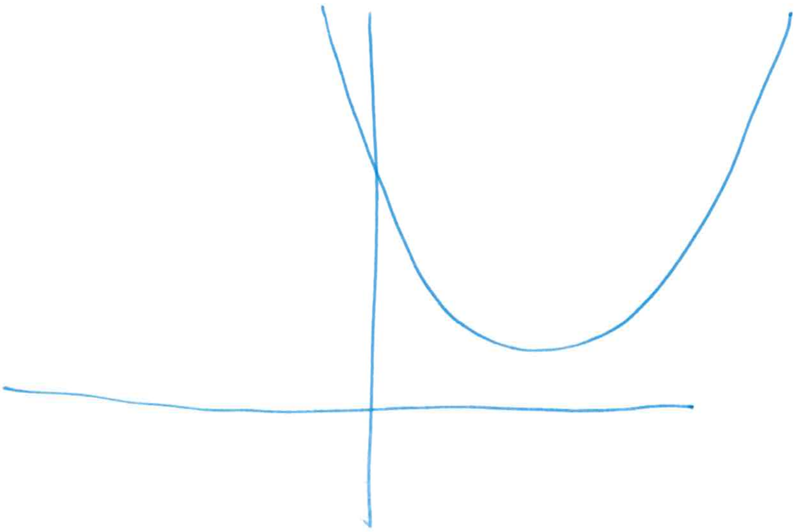
$a_0, a_1 \in \mathbb{R}$:



$a_1 \neq 0 \Rightarrow$ bijektive Fkt

$a_0 = 0, a_1 = 1 \Rightarrow p_1(x) = x$ $\quad$ Identität $\quad \mathrm{id}(x) = x$

n = 2 $\quad p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ $\quad$ quadratische Fkt.



Bsp 3 Seien

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad , \quad q_m(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

Polynome der Ordnung n bzw $m \in \mathbb{N}$.

$$f(x) := \frac{p_n(x)}{q_m(x)}$$ heißt dann <u>rationale Funktion</u>

Was ist ein legitimer Definitionsbereich vom f? Betrachte reelle Argumente.

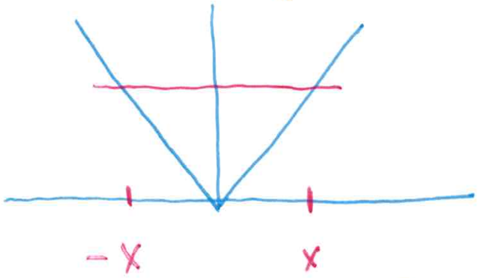
Dann ist

$$A = D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid q_m(x) \neq 0\}$$

der größt mögliche Defn.-Ber. vom f.

Bsp 4 a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f: x \longmapsto |x|$

heißt Betragsfunktion.



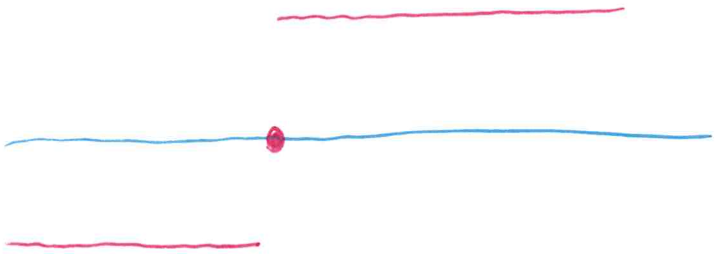
nicht injektiv

$$f(\mathbb{R}) := \{ f(x) \mid x \in \mathbb{R} \} = [0, \infty)$$

$\Rightarrow$ nicht surjektiv.

b) Signum funktion

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



c) Heaviside fkt

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

<u>Bsp 5</u> a) Dirichlet fkt: $D: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

b) Stammbruch fkt $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1/q & \text{für } x \in \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \ p, q \text{ teilerfremd} \\ 1 & x = 0 \\ 0 & x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

Komplex- und
Reellwertige Fkt können kombiniert werden:

Dfn 6

Sei $M \neq \emptyset$ Menge und $f, g : M \to \mathbb{C}$ sowie $\lambda \in \mathbb{C}$. Setze dann

$$f + g : M \to \mathbb{C} \quad , \quad (f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$\lambda f : M \to \mathbb{C} \quad , \quad (\lambda f)(x) := \lambda (f(x))$$

$$f \cdot g : M \to \mathbb{C} \quad : \quad (f \cdot g)(x) := f(x)\, g(x)$$

$$\frac{f}{g} : M \setminus \{x \in M \mid g = 0\} \to \mathbb{C}, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$|f| : M \to \mathbb{C} \quad , \quad |f|(x) := |f(x)|$$

Insbesondere ist $\{ f : M \to \underset{\mathbb{R}}{\mathbb{C}} \}$ ein $\underset{\mathbb{R}}{\mathbb{C}}$- Vektor-R

Für $f, g : M \to \mathbb{R}$ können wir auch dfn.

$$\max\{f, g\} : M \to \mathbb{R} \quad , \quad \max\{f,g\}(x) := \max\{f(x), g(x)\}$$

$$\min\{f, g\} : M \to \mathbb{R} , \quad \min\{f,g\}(x) := \min\{f(x), g(x)\}$$

Es gilt: $f \leq g \; :\Leftrightarrow \; \forall x \in M : f(x) \leq g(x)$

D.h. alle Kombinationen und Relationen sind über diese punktweise Auswertung definiert.

Bsp 6

$f = \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

Sobald $n \geq |x|+1$ gilt $1+\frac{x}{n} > 0$, also

ist $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exp(x) \geq 0$.

Für $x=0 \Rightarrow \exp(0) = 1 > 0$

$x \neq 0 \Rightarrow \left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)_{n>|x|+1}$ streng isoton Bsp. 6.5

$\Rightarrow \exp(x) > 0$

$x > 0 \Rightarrow \exp(x) > \exp(0) > 1$

Man kann also auch $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ defin.

S. 7 (Funktionalgl. der Exponential fkt.)

Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$

Unter einer minimalen Zusatzbed. ist exp. die einzige Fkt, die diese Gl. erfüllt

Insbes: $\forall x \in \mathbb{R}$: $\exp(-x) = (\underbrace{\exp(x)}_{>0})^{-1}$

Für den Beweis nutzen wir folgendes:

L.8 (i) Sei $(x_n)_n$ Flg. mit $x_n > 0$ für n $\mathbb{N}$ und $x = \lim x_n > 0$.

Dann $\lim_n \sqrt[n]{x_n} = 1$

(ii) Ist (x_n) eine beschränkte $\mathbb{R}$-Flg., so $\lim_n \left(1 + \frac{x_n}{n^2}\right)^n = 1$

Bw (i) Zu $\varepsilon := \frac{x}{2} > 0$ ex. n_0 mit

$$\forall n \geq n_0 : \underbrace{0 < x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt[n]{x-\varepsilon}}_{\to 1} < \sqrt[n]{x_n} < \underbrace{\sqrt[n]{x+\varepsilon}}_{\to 1}$$

Sandwich-krit $\Rightarrow$ Bh.

zu (ii) beschränkt $\Rightarrow \exists\, a, b \in \mathbb{R}$: $a \leq x_n \leq b$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \left(1 + \frac{a}{n^2}\right)^n \leq \left(1 + \frac{x_n}{n^2}\right)^n \leq \left(1 + \frac{b}{n^2}\right)^n$$

$$\lim \left(1 + \frac{a}{n^2}\right)^{n^2} = \exp(a) > 0$$

6-19

$$\lim \left(1+\frac{b}{n^2}\right)^{n^2} = \exp(b) > 0$$

da entlang TF $(n_k = k^2)$ dieselbe Konv. gilt.

$$\Rightarrow \quad \sqrt[n]{\underbrace{\left(1+\frac{a}{n^2}\right)^{n^2}}_{\substack{>0 \\ \text{konverg.}}}} \xrightarrow{\text{Teil (i)}} 1$$

$$\Rightarrow \quad \left(1+\frac{x_n}{n^2}\right)^n = \sqrt[n]{\left(1+\frac{x_n}{n^2}\right)^{n^2}} \longrightarrow 1$$

Sandwich-A. □

Bw S. 7

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{y}{n}\right) = \left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right)^n$$

$$= \left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n \left(1+\frac{xy}{n^2+n(x+y)}\right)^n$$

$$= \left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n \overbrace{\left(1+\frac{x_n}{n^2}\right)^n}^{\to 1} \quad \text{L. 8 Teil (ii)}$$

$$x_n = \frac{xy}{1+\frac{x+y}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} xy \Rightarrow \text{beschr. Flg.}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \exp(x+y)$$

□

Kor 9 $\quad \forall r \in \mathbb{Q} : \quad \exp(r) = e^r$

BW:

Funkt-Gl. $\underset{\text{Ind}}{\overset{\text{vollst}}{\Longrightarrow}} \exp(n) = \exp(1 + \ldots + 1) =$

$$= \exp(1) \cdot \ldots \cdot \exp(1) = (\exp(1))^n$$

$r \in \mathbb{N}$ ✓

Nun $q \in \mathbb{N}$

$$1 = \frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{q} \Rightarrow e = \exp(1) \overset{\text{s.o.}}{=} \left(\exp\left(\frac{1}{q}\right)\right)^q$$

$$\Rightarrow \quad \exp(1/q) = \sqrt[q]{e}$$

Nun $r = p/q, \; p, q \in \mathbb{N}$

$$\exp\left(\frac{p}{q}\right) = \exp\Big(\underbrace{\frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{q}}_{p \text{ mal}}\Big) = \left(e^{1/q}\right)^p = e^{p/q}$$

$$\Rightarrow \forall r \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty) : \quad \exp(r) = e^r$$

Für $-r \in \mathbb{Q} \cap (-\infty, 0)$:

$$\exp(-r) = (\exp(r))^{-1} = (e^r)^{-1} = e^{-r} \qquad \square$$

Dies motiviert:

D.10 6-21 Für $x \in \mathbb{I}$ setze $e^x = \exp(x)$. Damit gilt $\forall x \in \mathbb{R} : \exp x = e^x$

Begriff „Exponentialfkt." berechtigt.

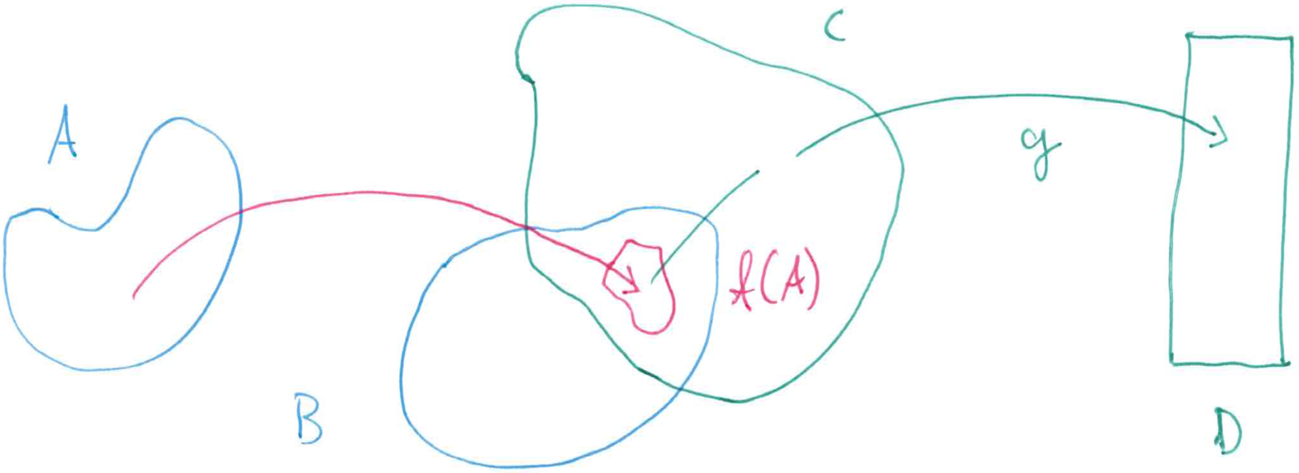
Def 11 a) Seien A, B, C, D nicht leere Mengen $f: A \to B$, $g: C \to D$ mit

$$f(A) = \{ f(a) \in B \mid a \in A \} \subset C$$

Definiere Komposition / Verkettung / Hintereinanderausführung von g nach f durch

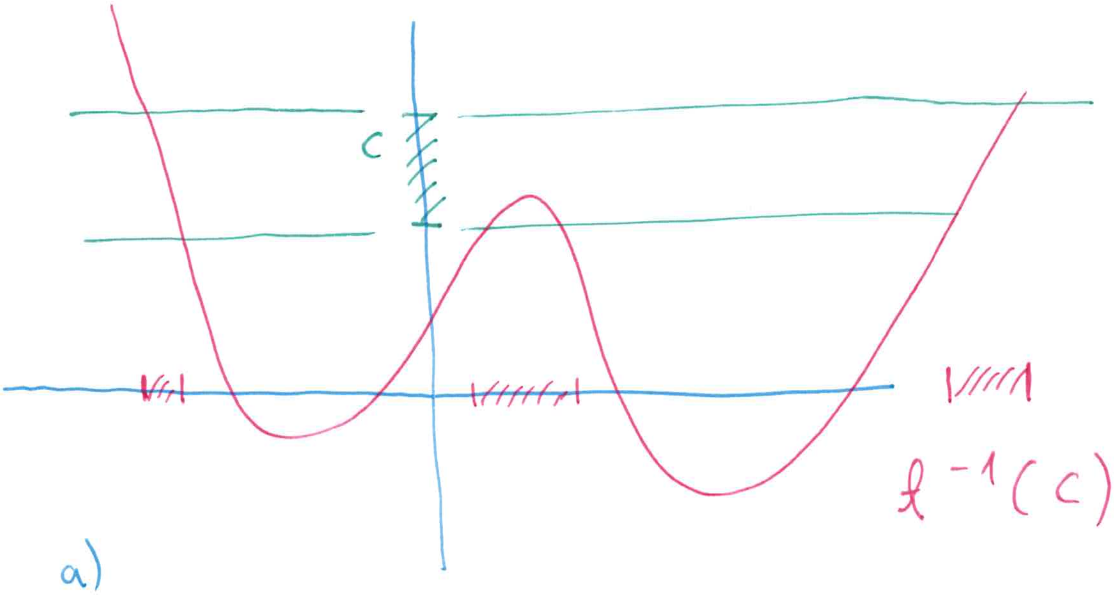
$$g \circ f : A \to D$$

$$(g \circ f)(x) = g(\underbrace{f(x)}_{\in f(A) \subset C})$$

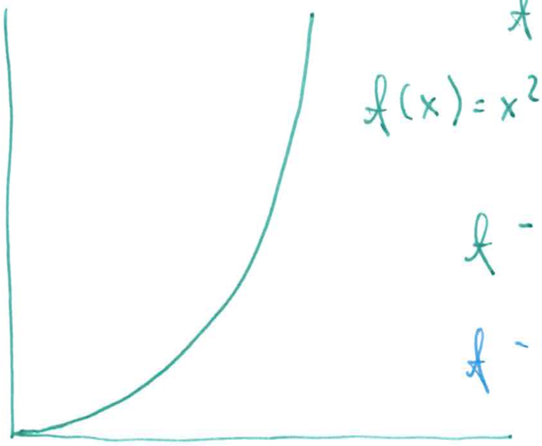


b) Ist $f: A \to B$ bijektiv, so ex. zu jedem $b \in B$ genau ein $a_b \in A$ mit $f(a) = b$. Somit ist eine Fkt $\underset{\substack{\cap \\ B}}{b} \longmapsto \underset{\substack{\cap \\ A}}{a_b}$ definiert. Diese bezeichnen wir mit $f^{-1}: B \to A$ und nennen sie Umkehrfunktion oder Inverse von f. Bild

c) Für jedes $f: A \to B$ und $C \subset B$ ist die Urbildmenge $f^{-1}(C) := \{a \in A \mid f(a) \in C\}$ definiert. Im Fall $B = \mathbb{R}$ und C Intervall heißt $f^{-1}(C)$ auch Niveaumenge von C



Bsp 12 a)



$f: [0, \infty) \to [0, \infty)$

$f(x) = x^2$

$f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

$f^{-1}: [0, \infty) \to [0, \infty)$

__Bsp 12__: b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f: x \mapsto x^3$ ist bijektiv

$$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x} & , x < 0 \end{cases}$$

Test für $x < 0$: $\left(-\sqrt[3]{-x}\right)^3 = (-1)^3 \left(\sqrt[3]{|x|}\right)^3$

$= -|x| = -(-x) = x$

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x^4$

$f(2) = 16 = f(-2)$

$f^{-1}([1, 16]) = [-2, -1] \cup [1, 2]$

__D. 13__ Seien $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ und $f: A \to \mathbb{R}$ Fkt.

f heißt

isoton auf A $:\Leftrightarrow \forall x, y \in A$ mit $x < y$: $f(x) \leq f(y)$

antiton .... $f(x) \geq f(y)$

streng antiton $f(x) > f(y)$

streng isoton ... $f(x) < f(y)$

Ist $B \subset A$, so bez. $f|_B: B \to \mathbb{R}$ die __Einschr__ von f auf B, $f|_B(x) = f(x)$

__Bsp 14__ a) Folgende $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind streng isoton

$f(x) = ax$, $f(x) = x^3$, $f(x) = ax^{2k+1}$ $k \in \mathbb{N}$ für $a > 0$

Entsp. ist $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -f(x)$ streng antiton

b) $\text{sign}(x) = \text{sgn}(x)$ $\quad$ $\text{sgn}: \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$

ist isoton, aber nicht streng

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ $f(x) = x^2$ ist nicht monoton

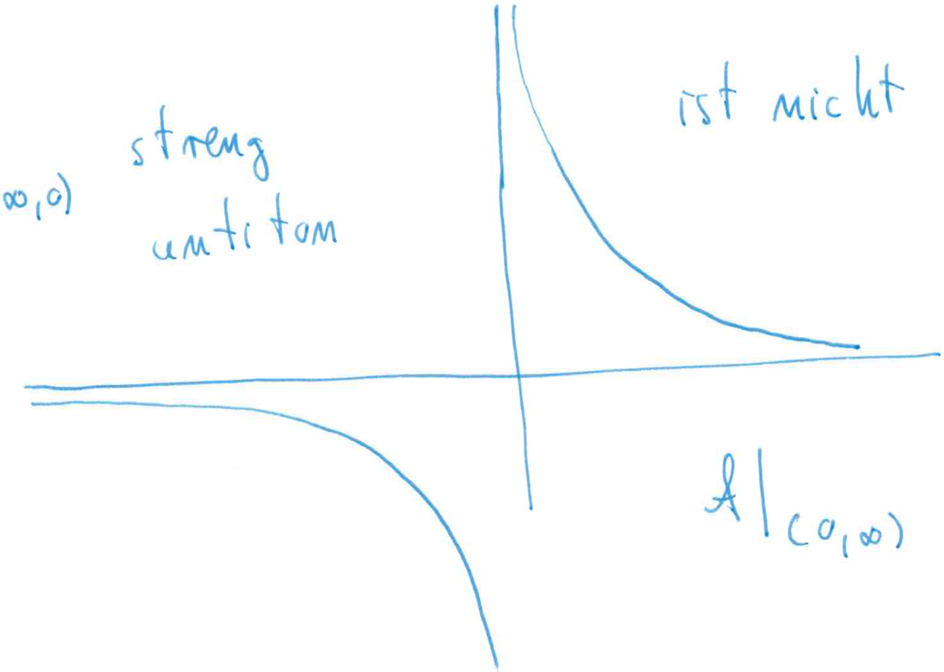
$f|_{[0,\infty)}$ ist streng isoton

$f|_{(-\infty,0]}$ ... antiton

d) $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad$ $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$

ist nicht monoton auf $\mathbb{R}^*$

$f|_{(-\infty,0)}$ streng antiton



$f|_{(0,\infty)}$ ist streng antiton

L 14 $\quad$ Sei $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ und $f: A \to \mathbb{R}$ streng isoton, dann ist f injektiv und

$g: A \to f(A)$, $g(x) = f(x)$ bijektiv.

Bw Sei $x \neq y \in A$ $\Rightarrow$ $x < y$ oder $x > y$ $\Rightarrow$ $f(x) < f(y)$ bzw. $f(x) > f(y)$ $\Rightarrow$ $f(x) \neq f(y)$

$$\begin{array}{lllll} \text{Sei } x \neq y & \Rightarrow & x < y & \Rightarrow & f(x)<f(y) \\ \in A & & \text{oder} & & \qquad\Rightarrow f(x) \neq f(y) \\ & & x > y & & f(x) > f(y) \end{array}$$

Ist $z \in f(A)$ so ex. $x \in A$ mit $f(x) = a$

also ist g surjektiv. □

9 Grenzwerte und Stetigkeit von Fkt

Bei Flg $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ haben wir das Verhalten $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi(n) = \lim\limits_{n} x_n$ untersucht. Bei Fkt ist auch der Limes $\lim\limits_{n \to \infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ interessant. Muß er mit $\lim\limits_{n} f\left(\frac{1}{n + 1/2}\right)$ übereinstimmen?

D. 1 Sei $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $a \in \mathbb{R}$ oder $a = -\infty$ und $b \in \mathbb{R}$ oder $b = +\infty$. Sei $x_0 \in I$ oder $x_0 = a$ oder $x_0 = b$ und $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{C}$ eine Fkt.

Definieren:

f besitzt im x_0 den rechtsseitigen Limes/Grenz-
linksseitigen
wert $c_+ \in \mathbb{C}$:⇔ Für jede Folge $(x_n)_n$ mit
c_-
$\forall n: x_n \in I$, $x_n > x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c_+$
$x_n < x_0$ c_-

Wir schreiben dafür dann

$$c_+ = \lim_{x \searrow x_0} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0+)$$

$$c_- = \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0-)$$

f besitzt im x_0 den Limes/Grenzwert $c \in \mathbb{C}$:⇔

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = c = \lim_{x \searrow x_0} f(x)$$

D.h. [..] ist erfüllt und $c_- = c_+ = c$.

Dann schreiben wir $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c$

Erläuterung zu Randpkt.

Ist $x_0 = a$ so kann nur der rechtss. Limes ex.

$x_0 = b$ linkss.

Ist $x_0 = a = -\infty$ schreiben wir $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = c$

$x_0 = b = +\infty$

für $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = c$ für $\lim\limits_{x \to b} f(x) = c$

Ist $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ so kann auch

$\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = +\infty$ vorkommen $:\Leftrightarrow$ für

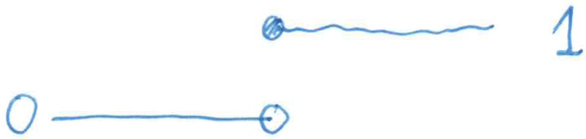
jede Flg $(x_n)_n$ mit $\forall n: x_n \in I, x_n < x_0, x_n \to x_0$

ist Flg $(f(x_n))_n$ bestimmt divergent gegen $+\infty$

Analog: $\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

Bsp 2   Heaviside Fkt $H: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I = \mathbb{R}$

$$H(x) = \begin{cases} 1 & , x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



Dann: Für $x_0 \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ ist

$$\lim_{x \nearrow x_0} H(x) = H(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} H(x) = \lim_{x \to x_0} H(x)$$

Dagegen

$$\lim_{x \nearrow 0} H(x) = 0, \quad \lim_{x \searrow 0} H(x) = 1 = H(0)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to 0} H(x) \text{ existiert nicht!}$$

Analog: $\operatorname{sgn}: \mathbb{R} \to \{-1, 0, +1\}$

$$x_0 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(x_0)$$

$$\lim_{x \nearrow 0} \operatorname{sgn}(x) = -1 \neq \operatorname{sgn}(0) = 0 \neq 1 = \lim_{x \searrow 0} \operatorname{sgn}(x)$$

$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = 1/x$

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \nearrow 0} f(x) = -\infty$$

$\mathbb{R} \ni y \neq 0$: $\lim\limits_{x \nearrow y} f(x) = f(y)$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 = \lim_{x \to \infty} f(x)$$

$g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $g : x \longmapsto \underbrace{\frac{x^2-1}{x-1}}$ für $x \neq 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} g(x) = 2$ denn $\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$

Für $p, q \in \mathbb{N}$ sei $h : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$

$$h : x \longmapsto \frac{x^p - 1}{x^q - 1}$$

Bsp 5.15 $\Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} h(x) = \dfrac{p}{q}$

5.3 (Rechenregeln für Limiten)

Seien $a, b \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $a < b$, $I := (a, b)$, $x_0 \in \{a\} \cup I \cup \{b\}$ sowie $f, g, h : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{C}$.

Wir nehmen an, dass

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c \in \mathbb{C}$ und $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = d \in \mathbb{C}$ existieren.

Dann gelten:

(a) $\lim_{x \to x_0} (\underbrace{f(x) + g(x)}_{(f+g)(x)}) = c + d$

(b) $\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = c \cdot d$

(c) Falls $d \neq 0 \in \mathbb{C}$: $\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{c}{d}$

Falls f, g, h $\mathbb{R}$-wertig gelten auch

(d) Ist $\forall x \in I \setminus \{x_0\}: f(x) \leq g(x)$ so auch $c \leq d$

(e) —— || —— $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ und $c = d$ so auch $\lim_{x \to x_0} h(x) = c$

Bw: Folgt aus entsp. Auss. für Flg □

Entsprechende Auss. gelten auch für einseitige Grenzwerte $\lim_{x \nearrow x_0} \ldots$ $\lim_{x \searrow x_0} \ldots$

Dagegen nicht (direkt) anwendbar, falls $c, d \in \{-\infty, +\infty\}$

Bsp 4

ⓐ
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\sqrt{x+1}+1}$$

beide einzeln gegen 0

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cancel{x}} \frac{\cancel{x}\overset{=0}{\boxed{+1-1}}}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}$$

ⓑ $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sum_{j=0}^{n} a_j x^j}{\sum_{k=0}^{m} b_k x^k}$

$n, m \in \mathbb{N}$, $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $a_n b_m \neq 0$

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ x \mid \sum_{k=0}^{m} b_k x^k = 0 \right\} = \mathbb{R} \setminus S$$

Dann

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} \boxed{\pm}\,\infty & \text{für } n > m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & n = m \\ 0 & n < m \end{cases}$$

$\operatorname{sgn} \dfrac{a_n}{b_m}$

ⓒ $f = \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \longrightarrow \exp(x)$

Diese konvergenz ist strikt isoton für $x > 0$ insbesondere

$$\exp(x) > E_n(x) > E_1(x) = 1 + x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \infty$$

also $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \boxed{f(-x)} \qquad \exp(-x) = \frac{1}{e^x}$$

$$= \frac{1}{\lim_{x\to\infty} f(x)} = 0$$

ⓓ Sei $M \in \mathbb{Z}$ und $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^M e^x$

$$M \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq \exp(x) \text{ für } x \geq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$$

$$-m = M < 0: \quad f(x) = \boxed{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k-m}}{k!}$$

isoton, da alle Summanden > 0

$$\Rightarrow f(x) > E_{m+1}(x)\, x^{-m} > \frac{x^{m+1-m}}{(m+1)!} = \frac{x}{(m+1)!}$$

$$\xrightarrow[x\to\infty]{} +\infty$$

„Explosion von $\exp(x)$ schneller als Schrumpfung von x^{-m}"

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} x^M \underbrace{\lim_{x\to0} \exp(x)}_{=1} = \begin{cases} +\infty & \text{für } M<0 \\ 1 & M=0 \\ 0 & M>0 \end{cases}$$

7-9

D.5 Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $x_0 \in I$, $f: I \to \mathbb{C}$

Dann sagt man

f stetig in x_0 $:\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Limes ex und = Fkt wert.

f ist unstetig in x_0 $:\Longleftrightarrow$ x_0 ist Unstetigkeit- oder Sprungstelle von f

$:\Longleftrightarrow$ f ist nicht stetig in x_0

f rechtsseitig stetig in x_0 $:\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0)$

links $x \nearrow x_0$

f stetig auf I $:\Longleftrightarrow$ f stetig in jedem $x_0 \in I$

f rechtsstetig auf I $:\Longleftrightarrow$ f rechtsstetig in jedem $x_0 \in I$

Ist $x_0 = \min I$ so gilt

f stetig in x_0 $\Longleftrightarrow$ f rechtsstetig in x_0

denn es gibt keine isotone Folge x_n mit

$x_n \in I$ $x_n \longrightarrow x_0$

7-10

Bsp 6 $id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $id(x) = x$ stetig in jedem $x_0 \in \mathbb{R}$

$H : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ Heaviside f.

$x_0 \neq 0 \Rightarrow$ H stetig in x_0

H unstetig, aber $\overbrace{\text{rechtsseitig stetig}}^{\text{rechtsstetig}}$ in $x=0$

$\Rightarrow$ H ist rechtsstetig auf $\mathbb{R}$, aber nicht stetig auf $\mathbb{R}$

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^m}{x^k} = x^{m-k} \qquad m,k \in \mathbb{N}$$

Falls $m \geq k \Rightarrow x^{m-k}$ ist Polynom

und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x) = x^{m-k}$

ist stetige Fortsetzung von f, d.h.

$$\underset{\mathbb{R}}{\underset{\shortparallel}{D(g)}} \supset \underset{\mathbb{R}\setminus\{0\}}{\underset{\shortparallel}{D(f)}} \quad \text{und} \quad g(x) = f(x) \text{ auf } \underset{\mathbb{R}\setminus\{0\}}{\underset{\shortparallel}{D(f)}}$$

Für $m < k$ ist dagegen $x^{m-k} = \frac{1}{x^{|m-k|}}$

nicht auf $\mathbb{R}$ fortsetzbar. stetig.

Natürlich kann ich z.B.

7-11

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(0) = 0$, $\forall x \neq 0 : g(x) = f(x)$

definieren, aber dieses g ist in $x=0$ nicht stetig.

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x^{|n-k|}} = +\infty$$

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} f(-x) = \lim_{x \searrow 0} (-1)^{n-k} \frac{1}{x^{|n-k|}}$$

$$= \pm \infty \qquad \begin{matrix} + & |n-k| \text{ gerade} \\ - & \text{ungerade} \end{matrix}$$

z. B. $f(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \lim_{x \nearrow 0} f(x) = +\infty$

$f(x) = \frac{1}{x^3} \Rightarrow \lim_{x \nearrow 0} f(x) = -\infty$

D 7 (Fortsetzung)

Seien $\emptyset \neq A \subset C$ und $B \neq \emptyset$ Mengen, $f: A \to B$

$g: C \to B$ Fkt.

g Fortsetzung von $f :\Longleftrightarrow \forall x \in A: g(x) = f(x)$

$\Longleftrightarrow g|_A = f$

Zuletzt Stetigkeit von Funktionen

Problem: Für Bestimmung von

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

müssen alle konver. Folgen $(x_n)_n$ mit $x_n \to x$ betr. werden

Daher: Zum Rechnen oft hilfreich eine alternative Umfor. zu nutzen.

Satz 8 (ε-δ-Kriterium)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f: I \to \mathbb{C}$ eine Fkt. Für $x_0 \in I$ ist äquivalent:

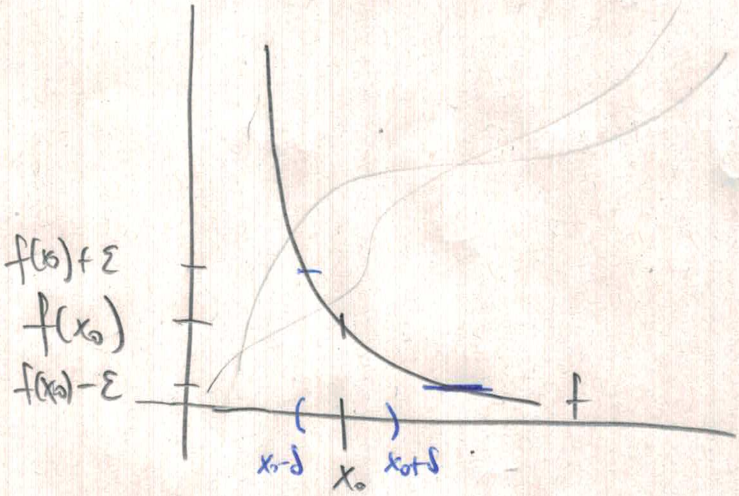
(i) f stetig in x_0

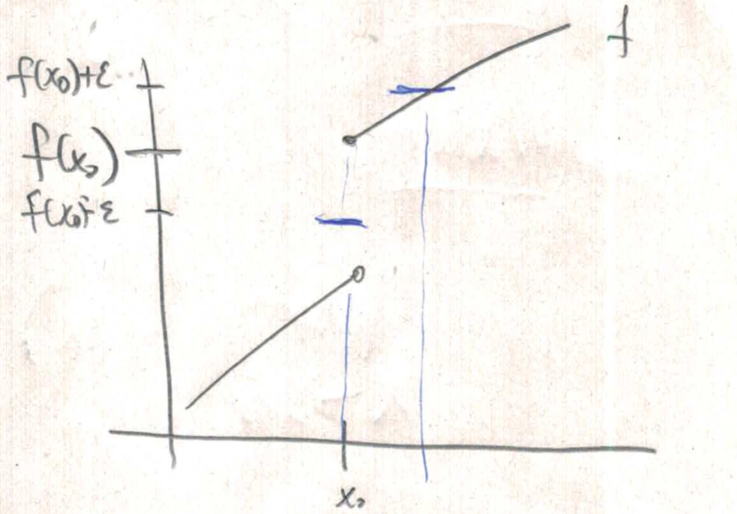
(ii) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ so, dass für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$ stets

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

gilt.

Skizze:





$\forall x < x_0 : \ f(x) < f(x_0) - \varepsilon$

Beweis: Wir zeigen (ii) $\Rightarrow$ (i)

und $\underbrace{\neg(ii) \Rightarrow \neg(i)}_{(i) \Rightarrow (ii)}$

„(ii) $\Rightarrow$ (i)": Sei $(x_n)_n$ Folge mit $\lim x_n = x_0$

Sei $\varepsilon > 0$ und δ nach (ii) gewählt.

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : |x_n - x_0| < \delta$

$\overset{(ii)}{\Rightarrow} |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0) \underset{(x_n)_n \text{ bel.}}{\Rightarrow} f$ stetig in x_0.

„$\neg$(ii) $\Rightarrow$ $\neg$(i)": Da (ii) nicht gilt, gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, dass für alle $\delta > 0$ ein $x'_\delta \in I$ exist. mit $|x'_\delta - x_0| < \delta$ und

$$|f(x'_\delta) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Wähle nun für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\delta_n = \frac{1}{n} > 0$$

$\Rightarrow$ $x_n := x'_{\delta_n}$; dann gilt für $(x_n)_n$ wegen $|x_n - x_0| < 1/n$, dass $\lim x_n = x_0$, aber wegen $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon > 0$ konvergiert $(f(x_n))_n$ <u>nicht</u> gegen $f(x_0)$.

$\Rightarrow$ f unstetig. $\square$

Beispiel 9. (1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ stetig in jedem $x_0 \in \mathbb{R}$

Sei nämlich $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$|f(x) - f(x_0)| = \big||x| - |x_0|\big|$$

$$= |x - x_0| < \varepsilon$$

falls

$$|x - x_0| < \varepsilon =: \delta .$$

(2) Sei $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Dann ist D in jedem $x_0 \in \mathbb{R}$ unstetig.

Sei dazu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $\forall \delta > 0$ ein

(a) $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ falls $x_0 \in \mathbb{Q}$

(b) $x \in \mathbb{Q}$ falls $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

mit $|x - x_0| < \delta$. Also

$$|D(x) - D(x_0)| = 1 > \varepsilon > 0$$

$\Rightarrow$ D unstetig.

(3) $f(x) = x D(x)$ ist stetig in $x_0 = 0$,

denn $|f(x) - f(0)| = |x D(x)| \leq |x| < \varepsilon$

falls $\delta = \varepsilon$ und $|x - x_0| = |x| < \delta$.

(4) Sei $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ die Stammbruchfkt.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q},\ x \neq 0 \text{ und } p,q \in \mathbb{N} \text{ teilerfr.} \\ 1, & x = 0 \\ 0, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Wir zeigen: f ist stetig in allen $x_0 \in [0,1]\setminus\mathbb{Q}$. Sei dazu $\varepsilon > 0$ und $q_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{1}{q} < \varepsilon$ $\forall q \geq q_0$. Dann ist aber

$$M = \left\{ \frac{p}{q} : \frac{1}{q} \geq \varepsilon \text{ und } p \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\cap$$

$$\mathbb{Q} \cap [0,1]$$

$$\subset \left\{ \frac{p}{q} : q < q_0 \text{ und } 0 \leq p \leq q_0 \right\}$$

endliche Menge.

$\Rightarrow \exists \delta > 0 : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap M = \emptyset$,

da $x_0 \notin M$.

Ist jetzt $x \in [0,1]$ mit $|x_0 - x| < \delta$, so gilt

(a) falls $x \notin \mathbb{Q}$: $|f(x) - f(x_0)|$

$$= |0 - 0| = 0 < \varepsilon$$

(b) falls $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, so ist $x \notin M$,

also muss $\frac{1}{q} < \varepsilon$ gelten. Folglich

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{1}{q} - 0 \right| = \frac{1}{q} < \varepsilon .$$

$\Rightarrow$ f stetig in x_0.

Üb: Untersuche Stetigkeit von f in $x_0 \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$

Satz 10: Sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in I$. Ist $f(x_0) \overset{<}{>} 0$, so gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass

$$f(x) \overset{<}{>} 0 \quad \forall\, x \in U_\delta(x_0) \cap I$$

Beweis: Sei $f(x_0) > 0$ und wähle $\varepsilon = \frac{1}{2} f(x_0) > 0$. Dann $\exists\, \delta > 0$ sd.

$$\forall\, x \in U_\delta(x_0) \cap I : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall x : f(x) = f(x) - f(x_0) + f(x_0)$$

$$\geq f(x_0) - \underbrace{|f(x) - f(x_0)|}_{\leq \varepsilon}$$

$$\geq f(x_0) - \varepsilon$$

$$= \frac{1}{2} f(x_0) > 0 \quad \square$$

__Bem.__ f stetig in x_0 und $(x_n)_n$ Folge mit $\lim x_n = x_0$. Dann

$$\lim f(x_n) = f(\lim x_n).$$

Satz 11 Seien I, J Intervalle.

Sei $g: I \to J$ stetig in $x_0 \in I$ und

$f: J \to \mathbb{C}$ stetig in $g(x_0) \in J$.

Dann ist $f \circ g: I \to \mathbb{R}$ stetig in x_0.

Beweis Sei $(x_n)_n$ Folge mit $\lim x_n = x_0$

Bemerkung: $\lim g(x_n) = g(\lim x_n)$

und $\lim (f \circ g)(x_n) = \lim f(g(x_n))$

$= f(\lim g(x_n)) = f(g(\lim x_n)) = f(g(x_0))$

Satz 12 Seien $f, g: I \to \mathbb{C}$ stetig in $x_0 \in I$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann sind $f+g$, $f \cdot g$, $|f|$, λf, $\frac{f}{g}$ (falls $g(x_0) \neq 0$) stetig in x_0

(Anmerkung: $|g(x_0)| > 0$
$\Rightarrow$ $\exists$ Umg. von x_0 wo $g \neq 0$)

Sind $f, g: I \to \mathbb{R}$, so ist auch $\min\{f,g\}$, $\max\{f,g\}$ stetig in x_0.

Beweis Übung, folgt aus Satz 3 (Rechenregeln für Limiten)

Bsp. 13. (1) $f: I \to \mathbb{R}$ stetig in x_0 $\to$ $if: I \to \mathbb{C}$ stetig in x_0.

(2) ~~d~~ $id: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig, also ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$ stetig auf $\mathbb{R}$. Insb. sind Polynome stetig auf $\mathbb{R}$.

Definition 14. (1) Sei $I \subset \mathbb{R}$. $f: I \to \mathbb{R}$ heißt

- nach oben beschr., falls $\exists M > 0$:

$$f(x) \leq M \quad \forall x \in I$$

- unten beschr., falls $\exists m > 0$:

$$f(x) \geq m \quad \forall x \in I$$

- beschränkt, falls f nach oben und nach unten beschränkt. Also $\exists k > 0$: $|f(x)| < k$.

~~Hierbei~~ Ist f nach oben/unten beschränkt, so kann man

$$M = \sup_{x \in I} f(x) := \sup f(I)$$

und

$$m = \inf_{x\in I} f(x) := \inf f(I)$$

setzen.

(2) $f : I \to \mathbb{C}$ heißt beschränkt, falls $|f| : I \to \mathbb{R}$ beschränkt.

Satz 15 (von Minimum und Maximum).

Sei $I = [a,b]$ ein Intervall, $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f auf I ein Minimum/Maximum an, d.h. es gibt $x_1, x_2 \in [a,b]$ mit $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ $\forall x \in I$.

Man schreibt dann auch

$$f(x_1) = \min_{x\in I} f(x), \quad f(x_2) = \max_{x\in I} f(x).$$

Insb. ist f beschränkt auf I.

Beweis Zeige: f ist beschränkt (nach oben). Ang. f wäre nicht nach oben beschränkt. Dann $\exists x_n \in [a,b]$

mit $f(x_n) > n$. Da $(x_n)_n$ beschränkte Folge, $\exists$ nach Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$. ~~Da f~~ ~~stetig~~ ~~das~~ ~~gegen~~ mit Grenzwert in I.

Da f stetig ist, gilt

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(\underbrace{\lim_{k \to \infty} x_{n_k}}_{\in I}) \in \mathbb{R}$$

↯ f unbeschr.

Da f nach oben beschränkt ist, ist auch

$$A = f(I)$$ nach oben beschr.

und

$$s = \sup A = \sup f(I) = \sup_{x \in [a,b]} f(I)$$

exist.. Nach Aufgabe A4, Blatt 7, exist. also eine Folge $(x_n) \subset I$ mit $f(x_n) \to s$. Da nach Bolzano-Weierstraß wieder eine konv. TF $(x_{n_k})_k$ exist. mit $\lim x_{n_k} = x_2 \in I$ folgt mit der Stetigkeit von f

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_2)$$

$$\Big\| \longleftarrow \text{Satz!}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = S$$

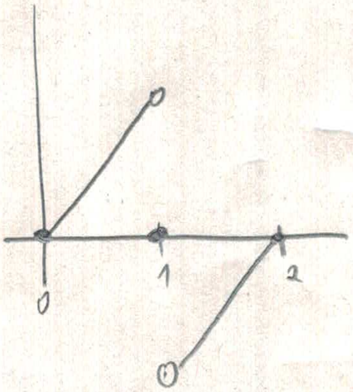
$$\Rightarrow \quad S = f(x_2).$$

Analog für min. □

~~Beispiel~~

Bemerkungen (1) Die Stetigkeit von f ist notwendig. Ist z.B. $a=0$, $b=2$ und

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ x-2, & 1 < x \le 2 \end{cases}$$



So nimmt f kein Min/Max an.

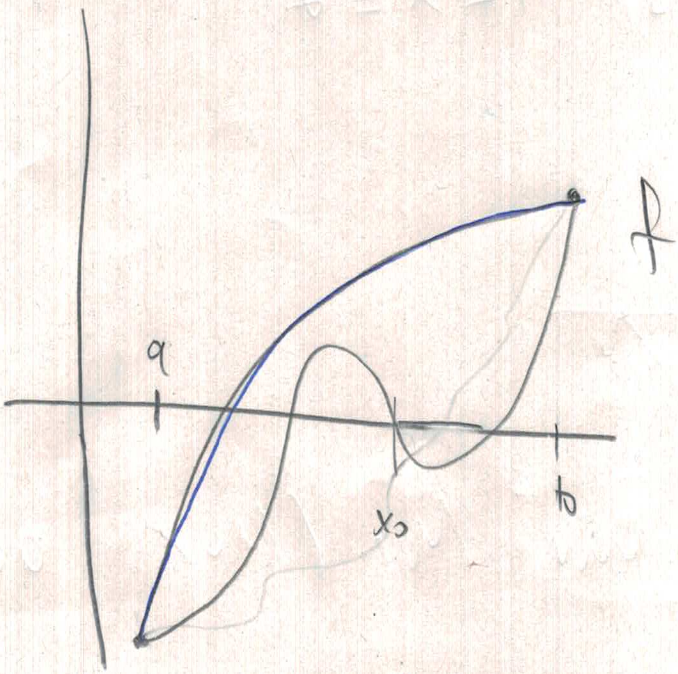
(2) Ist das Intervall offen, also, z.B. $I = (0,1)$, dann gilt der Satz nicht! Betr. $f(x) = 1/x$ auf I

(3) Ist das Intervall unbeschränkt, so gilt der Satz nicht!

$I = [1, \infty)$, $f(x) = 1/x$.

Satz 16 (Nullstellensatz) Seien $a<b$, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) < 0 < f(b)$ oder $f(a) > 0 > f(b)$.

Dann besitzt f eine Nullstelle, d.h. $\exists\, x_0 \in$ ~~$[a,b]$~~ (a,b) mit $f(x_0) = 0$.



Beweis mit Bisektionsverfahren, o. E.

Sei $f(a) < 0 < f(b)$ (sonst mult. mit -1.)

Sei $I_0 = I = [a,b]$

Induktiv zeigt man, dass es Intervalle I_k mit $I_{k+1} \subset I_k$, $|I_k| = 2^{-k}$ gibt so, dass für $I_k = [a_k, b_k]$ stets

$$(*) \qquad f(a_k) \leq 0 \leq f(b_k).$$

gilt. (Ist „=" erfüllt => fertig).

Nach Konstruktion erfüllen die Folgen $(a_k)_k$, $(b_k)_k$ die Bed. von Blatt 5, A4

$\Rightarrow \exists \; x_0 = \lim b_n = \lim a_n$ und da f stetig (insb. in x_0), gilt

$$f(x_0) = f(\lim b_n) = \lim f(b_n)$$
$$= f(\lim a_n) = \lim f(a_n)$$

$\Rightarrow$ Da $(*)$ impl., dass $f(a_k) f(b_k) \leq 0$, ergibt sich also

$$\left(f(x_0)\right)^2 \leq 0 \Rightarrow f(x_0) = 0. \quad \square$$

Wiederholung: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$ Intervall mit mehr als einem Punkt.

$V = \{ f : I \to \mathbb{K} \mid f \text{ ist stetig} \}$

ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum (vgl. Satz 12) unendlicher Dimension.

So ein Intervall nennen wir echtes Intervall.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$P_n = \{ f : I \to \mathbb{K} \mid \exists\, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K} \text{ mit } f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \}$$

ein $(n+1)$ dimensionaler UVR von V.

Bisektionsverf. im Bw. des Nullstellens. ist konstruktiv $\Rightarrow$ erlaubt es die Nullstelle langsam approximativ zu berechnen. Nun eine Verallgemeinerung

S. 17 (Zwischenwertsatz)

Seien $a < b \in \mathbb{R}$, $I = [a, b]$, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig,

$G = \max_{x \in I} f(x)$, $k = \min_{x \in I} f(x)$.

Dann nimmt f jeden Wert in $[k, G]$ an,

d.h. $f(I) = [k, G]$

d.h. $\forall\, y \in [k, G] \ \exists\, x \in I$ mit $f(x) = y$.

Bw

S. 15 vom Min & Max:

$\exists\, x_+, x_- \in I$ mit $f(x_+) = G,\ f(x_-) = k$

① $G = k$ ✓

② $G > k$. Sei also $k < y < G$ und $g: I \to \mathbb{R}$
$g(x) = f(x) - y$

$\Rightarrow g$ stetig

$$g(x_+) = f(x_+) - y = G - y > 0,\ g(x_-) < 0$$

Nullstellens. 16 $\Rightarrow \exists\, x_0 \in I$ mit $0 = g(x_0)$
$= f(x_0) - y$

$\Rightarrow f(x_0) = y$ ✓ □

Bsp $I = [0, 1]$, $f: I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 + x - 1$

$\Rightarrow f(0) = -1$, $f(1) = 1 \Rightarrow \exists$ Nullstelle
↑

-2

f streng isoton eindeutige

Bm Seien $f, g, h = g \circ f$ Fkt.

S. 11 impliziert f, g stetig $\Rightarrow$ h stetig

Frage : f, h stetig $\overset{?}{\Rightarrow}$ g stetig

S. 18 Sei $\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$ Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig.

(a) f injektiv $\Rightarrow$ f streng monoton

(b) f streng $\overset{\text{isoton}}{\underset{\text{antiton}}{}}$ $\Rightarrow$ $g : I \to J := f(I)$
$x \mapsto f(x)$
ist bijektiv, J ist ein Intervall und

$g^{-1} : J \to I$ ist stetig & streng $\overset{\text{isoton}}{\underset{\text{antiton}}{}}$

Bw (a) Wid-Ann: f nicht streng monoton

$\Rightarrow$ $\exists$ $x_1 < x_2 < x_3$ in I mit

$f(x_2) < f(x_3) < f(x_1)$ oder

$f(x_2) < f(x_1) < f(x_3)$ "

$f(x_3) < f(x_1) < f(x_2)$ "

$f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$

Bei Monotonie muß $f(x_2)$ in der Mitte stehen

$< f(x_2) <$

Letzter Fall: Zwischenwerts. $\Rightarrow x \in (x_1, x_2)$

mit $f(x) = f(x_3) \in (f(x_1), f(x_2)) \Rightarrow \underset{\text{inj.}}{\overset{\lightning}{\Downarrow}}$

andere Fälle analog

(b) L. 8. $14\frac{1}{2}$ $g: I \to J$ bijektiv

Zwischenwertsatz $\Rightarrow$ J ist Intervall

Zeigen: f $\overset{\text{streng}}{\text{isoton}}$ $\Rightarrow g^{-1}$ streng isoton

Seien $y_1 < y_2$ in J aber $g^{-1}(y_1) \geq g^{-1}(y_2)$

f isot. $\Rightarrow g$ isot. $\Rightarrow y_1 = g(g^{-1}(y_1)) \geq g(g^{-1}(y_2)) = y_2$

$\Rightarrow \lightning$

Sei $y_0 \in J$. z.z. g^{-1} stetig in y_0.

Dazu sei $(y_n) \subset J$ mit $\lim y_n = y_0$

$\Rightarrow$ $\exists!$ Folge $(x_n) \subset I$ mit $y_n = f(x_n)$

und $x_0 \in I$ mit $y_0 = f(x_0)$.

<u>Bh:</u> $x_n \to x_0$ Wid-Ann: $\exists\, \varepsilon > 0$ und

TF $(x_{n_k})_k$ mit $\forall k \in \mathbb{N}$: $x_{n_k} \geq x_0 + \varepsilon$ ①

<u>oder</u> $x_{n_k} \leq x_0 - \varepsilon$ ②

① f s. isoton $f(x_0) = \lim_k f(x_{n_k}) \geq \lim f(x_0+\varepsilon) > f(x_0)$

f stetig ↯.

analog bei ②. $\square$

S. 19 (exp stetig)

Sei $f = \exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$.

(a) f ist streng isoton

(b) Für $x \in [-1, 1]$ gilt $|f(x) - 1| \leq e\,|x|$

(c) f ist stetig

Bw (a) übg

zu (b) $f(x) = \exp(x) = \lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ isoton

$\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$\left| E_n(x) - 1 \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{|x|^k}{k!} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} |x|$$

$$\leq e\,|x|$$

zu (c) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$:

$$|e^{x+y} - e^x| = |e^x e^y - e^x| = |e^x(e^y - 1)|$$

$$\overset{(b)}{\leq} |e^x|\,|e^y - 1| \leq e^x\, e\, y$$

Zu bel $\varepsilon \in (0,1)$, $x \in \mathbb{R}$ wähle $\delta = \dfrac{\varepsilon}{e^{x+1}}$

und $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ mit $|x - \tilde{x}| < \delta$

$$\Rightarrow \quad |f(\tilde{x}) - f(x)| \leq e^{x+1} \, |x - \tilde{x}|$$

$$< e^{x+1} \frac{\varepsilon}{e^{x+1}} = \varepsilon$$

✓

□

<u>Bm 20</u> (Eigensch. der exp Fkt.)

1) $\exp(0) = e^0 = 1$, $\quad e := \exp(1)$

2) $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $\quad e^x e^y = e^{x+y}$

$$e^{-x} = 1/e^x$$

3) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, streng isoton

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

Zwischenwertsatz $\Rightarrow$ $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$

$$\exp(x) \geq 1 + x$$

4) $e^x = \lim\limits_{n} e_n(x) = \lim\limits_{n} E_n(x)$

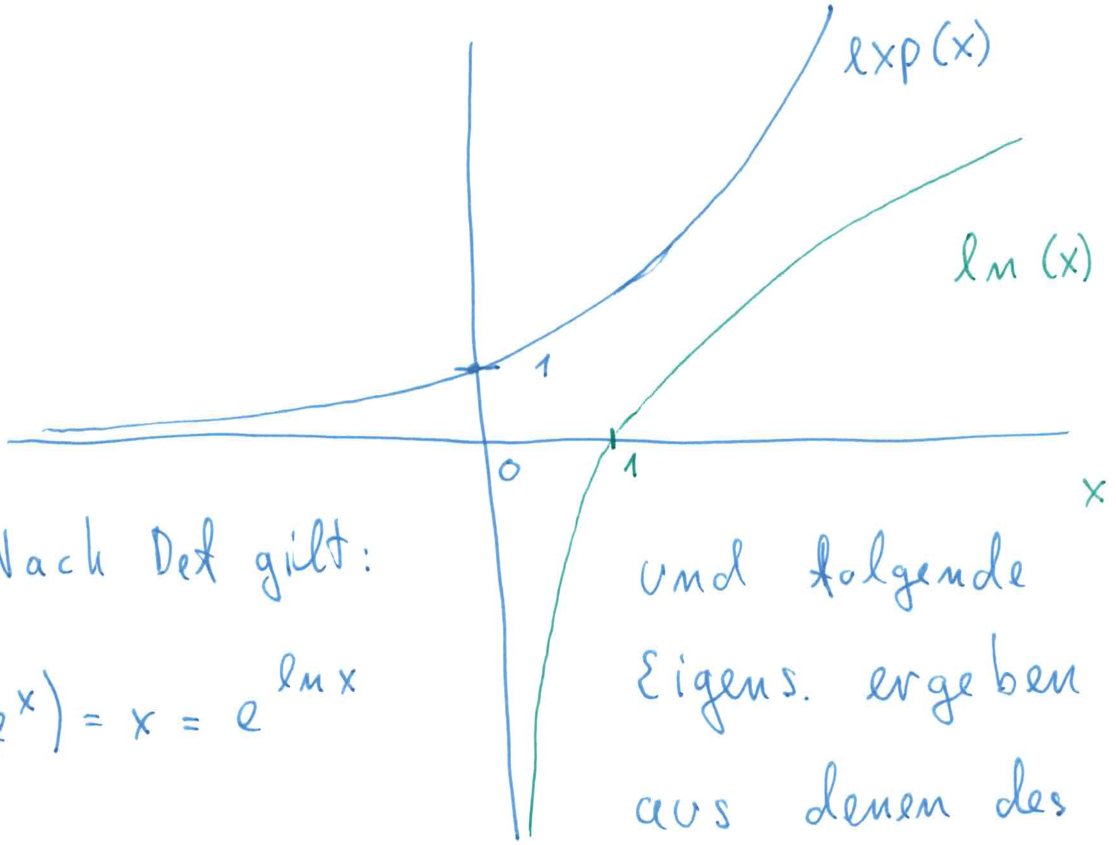
$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \quad e_n(x) = \left[1 + \frac{x}{n}\right]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k}$$

Wg. Eigs 3) und S. 18 ist

$$f = \exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$$

bijektiv, $f^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ existiert und ist stetig, streng isoton

<u>D. 21</u> Die Inverse $\exp^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ heißt natürliche(r) <u>Logarithmus</u>funktion und wird mit $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ bezeichnet.



5) Nach Def gilt:

$$\ln(e^x) = x = e^{\ln x}$$

und folgende Eigens. ergeben sich aus denen des exp

6) $\ln 1 = 0, \ \ln(e) = 1$

7) $\forall \ x, y \in (0, \infty) :$ $\ln x + \ln y = \ln(x \cdot y)$

$$\ln x - \ln y = \ln \frac{x}{y}$$

$$-\ln x = \ln \frac{1}{x}$$

8) $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist stetig & strikt isoton

$\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty, \quad \lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$

$\ln((0, \infty)) = \mathbb{R}$

9) $\forall r \in \mathbb{Q} \quad : \quad \exp(r) = e^r$ Analog zeigt man:

$a > 0 \quad : \quad a^r = e^{r \ln a}$

Ziel nun: a^t für allg $t, a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ defn.

D. 22 Für $a > 0$ setze:

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto a^x := \exp(x \ln a) = e^{x \ln a}$$

Eigens. $a = 1 \Rightarrow \ln a = 0 \Rightarrow a^x = \exp 0 = 1$

$a \in (0, 1) \Rightarrow \exp(x \ln a) = \exp(-x \ln \frac{1}{a})$

Also ist alle Info schon im Fall $a > 1$ enthalten.

1) $\exp_a(0) = a^0 = 1, \quad \exp_a(1) = a^1 = a$

2) $\forall x, y \in \mathbb{R} : \exp_a(x + y) = \exp_a(x) \exp_a(y)$

$$\exp_a(-x) = a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \frac{1}{\exp_a(x)}$$

$$\left(\exp_a x\right)^y = \left(a^x\right)^y = a^{xy} = \exp_a(xy)$$

$$(a^x)^y = \exp\left(y \ln(a^x)\right) = \exp(y \underline{\ln \exp}(x \ln a))$$

$$= \exp\left(y\, x \ln(a)\right) = a^{yx}$$

3) $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, strikt isoton

$$\exp_a(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$$, da $\ln 1 = 0$ und $\ln$ strikt isoton

$$\exp_a(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$$ wg. 2)

Zwischenwerts. $\Rightarrow$ $\exp_a(\mathbb{R}) = (0, \infty)$

4) Also ex. nach S. 18 Umkehrfkt.

$$\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

der Logarithmus zur Basis a. Insbes

$a = e > 1 \Rightarrow \log_a(x) = \ln(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

5) $\log_a \exp_a x = \log_a a^x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\boxed{8-9}$ $\forall y > 0 :$ $a^{\log_a y} = \exp_a \log_a y = y$

6) $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$

7) $\forall x,y \in (0,\infty)$ $\log_a x + \log_a y = \log_a(x\cdot y)$

$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$

$-\log_a x = \log_a \frac{1}{x}$

$\log_a(x^y) = y \log_a x$

wegen

$$\exp_a(\log_a(x^y)) = x^y = (\exp_a \log_a x)^y \overset{\text{oben}}{=} \exp_a(y \log_a x)$$

8) $\log_a : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig, streng isoton

$\log_a x \xrightarrow[x\to\infty]{} +\infty$, $\log_a x \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$,

$\log_a((0,\infty)) = \mathbb{R}$

9) Für alle $a > 1$, $x > 0$ folgt aus 7)

$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ denn $\forall y \in \mathbb{R} : \ln a^y = y \ln a$

Setze $y := \log_a x$ fu, so

$\ln x = \ln(a^{\log_a x}) = (\log_a x) \ln a$

$\boxed{8-10}$ also unterscheiden sich die Fkt nur um Vorfaktor - Konstante.

D. 23 **Allg. Potenz**

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ defn Potenzfkt $p_\alpha : (0,\infty) \to \mathbb{R}$

durch: $p_\alpha(x) := x^\alpha := e^{\alpha \ln x}$

Eigens. von p_α: stetig

$\alpha>0$: streng	isoton	$\lim\limits_{x\to 0} p_\alpha(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to +\infty} p_\alpha(x) = \infty$
$\alpha<0$:	antiton	$= +\infty$	$= 0$
$\alpha=0$	konstant	$= 1$	$= 1$

Bsp 24 a) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Bw: $u \in \mathbb{R} \Rightarrow (1+u)(1-u) = 1-u^2 \leq 1$

$u < 1 \Rightarrow 1+u \leq \frac{1}{1-u}$

$\Rightarrow \forall x<1, n \in \mathbb{N}$: $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \left(\frac{1}{1-\frac{x}{n}}\right)^n \leq \frac{1}{1-x}$

8-11

Bernoulli: $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \geqslant 1-x$

$$e^x = \lim_{n} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{1}{1-x}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{\boxed{1+x}-1}{x} \leq \frac{e^x-1}{x} \leq \frac{\frac{1}{1-x}-1}{x}$$

$$= \frac{\frac{1-1+x}{1-x}}{x} = \frac{1}{1-x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

b) $$\lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$$

Bw $x \in \mathbb{R}$, $y := e^x - 1 \xrightarrow{x\to 0} 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{\ln(1+y)} = \frac{e^x-1}{\ln e^x} = \frac{e^x-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

$$\downarrow y \to 0$$

$$1$$

8 - 12

S. 25 (Exponential fkt in $\mathbb{C}$)

Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Dann

a) $$\lim_{n \to \infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}}_{= E_n(z)} =: \exp(z) =: e^z$$

existiert in $\mathbb{C}$.

b) $$\lim_{n \to \infty} \underbrace{\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n}_{=: e_n(z)} = \exp(z)$$

c) $$e^{z+w} = e^z e^w$$

Bw a) $|z| \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n} E_n(|z|) = \lim_{n} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \overset{>0}{\boxed{\frac{|z|^k}{k!}}}}_{\text{isoton}} = \exp(|z|) =: \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!}$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \, n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$:

$$0 < e^{|z|} - \sum_{k=0}^{n_0} \frac{|z|^k}{k!} =: \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} < \varepsilon$$

8 - 13

Bh: $(E_n(z))_n$ Cauchy-F. in $\mathbb{C}$

Zu $\varepsilon > 0$ sei n_0 wie oben und $m > n \geq n_0$

$$\left|E_m(z) - E_n(z)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} \frac{z^k}{k!}\right| \leq \sum_{n+1}^{\overset{\infty}{\cancel{m}}} \underbrace{\frac{|z|^k}{k!}}_{>0} < \varepsilon$$

S. 7.12 $\Rightarrow$ $\lim E_n(z) =: e^z$ existiert

b) siehe Kaballo, Ana I, Bw Satz 11.1

c) leicht modifiz Bw. vom S. 8.7.

S. 25 (Exponentialfkt in $\mathbb{C}$)

Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Dann

a) $$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}}_{= E_n(z)} =: \exp(z) =: e^z$$

existiert in $\mathbb{C}$.

b) $$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(1+\frac{z}{n}\right)^n}_{=: e_n(z)} = \exp(z)$$

c) $$e^{z+w} = e^z \, e^w$$

Bw a) $|z| \in \mathbb{R}$

$$\lim_n E_n(|z|) = \lim_n \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \overset{>0}{\boxed{\frac{|z|^k}{k!}}}}_{\text{isoton}} = \exp(|z|) =: \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!}$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \, n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$:

$$0 < e^{|z|} - \sum_{k=0}^{n_0} \frac{|z|^k}{k!} =: \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} < \varepsilon$$

8 - 13

Bh: $(E_n(z))_n$ Cauchy-F. im $\mathbb{C}$

Zu $\varepsilon > 0$ sei n_0 wie oben und $m > n \geq n_0$

$$\left|E_m(z) - E_n(z)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} \frac{z^k}{k!}\right| \leq \sum_{n+1}^{\overset{\infty}{\cancel{m}}} \frac{|z|^k}{\underbrace{k!}_{>0}} < \varepsilon$$

S. 7.12 $\Rightarrow$ $\lim E_n(z) =: e^z$ existiert

b) siehe Kaballo, Ana I, Bw Satz 11.1

c) leicht modifiz Bw. vom S. 8.7. $\square$

29.11.2021

2.12.2021

Bw. zeigt: $\forall\, n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{N}$

$$|E_n(z)| \leq E_n(|z|) \leq \exp(|z|$$

$$\lim_{n \to \infty} \quad \| \quad = |\lim E_n(z)| = |e^z| \leq e^{|z|}$$

Wähle nun zu $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$ bel:

$$\delta = \ln\left(\frac{\varepsilon}{e^{|z_0|}}\right)$$

dann gilt $\forall\, z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \delta$

$$|e^{z} - e^{z_0}| = |e^{z_0}(e^{z-z_0} - 1)|$$

$$\leq |e^{z_0}| \, \Big| \sum_{\substack{k=\cancel{0}\\ 1}}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{k!} \cancel{-1} \Big|$$ Warum darf ich so rechnen?

$$\leq e^{|z_0|} \sum_{\substack{k=\cancel{1}\\ 0}}^{\infty} \frac{|z-z_0|^k}{k!}$$

$$= e^{|z_0|} e^{|z-z_0|} < e^{|z_0|} e^{\delta}$$

$$= e^{|z_0|} \frac{\varepsilon}{e^{|z_0|}} = \varepsilon$$

Kor 26 (exp stetig in $\mathbb{C}$)

exp : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist stetig und erfüllt

$|\exp(z)| \leq \exp|z|$

Df 27 Sei $A \subset \mathbb{C}$ und $f: A \to \mathbb{C}$, $z_0 \in A$.

f stetig in z_0 $:\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ mit

$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

f st. auf A $:\Leftrightarrow$ f st. in z_0, $\forall z_0 \in A$

Auch hier: $f, g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig, so auch $f \circ g$.

TRIGONOMETRISCHE FKT

D 28 (sin, cos)

Definiere $\sin, \cos: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$

Bm 29 Als Komposition st. Fkt sind sin & cos $: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig. Es gilt die Eulersche Formel

$$\forall z \in \mathbb{C}: \quad e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

Speziell

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

wobei hier

konj. ändert nur Vorz. vom i
x bleibt unberührt

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{\boxed{-ix}}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{ix}\right)$$

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = \operatorname{Im}\left(e^{ix}\right)$$

$$\overline{E_n(ix)} = \sum_{k}^{n} \frac{\overline{(ix)}^k}{k!} = \sum \frac{(-ix)^k}{k!} = E_n(-ix)$$

$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine ungerade Fkt

$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gerade

D. 30 $M \subset \mathbb{R}$ heiß <u>symmetrisch</u> $:\Leftrightarrow (x \in M \Rightarrow -x \in M)$

$f : M \to \mathbb{R}$ heißt (un) gerade $:\Longleftrightarrow \forall x \in M$ gilt
sym. $f(-x) = -f(x)$

Es gilt sogar $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$\sin(-z) = \frac{1}{2i}\left(e^{-iz} - e^{-(-iz)}\right)$$

$$= -\frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = -\sin(z)$$

$$\cos(-z) = \frac{1}{2}\left(e^{-iz} + e^{-(-iz)}\right) = \cos z$$

S. 31 (Funktionalgl. / Additionsthm f. cos & sin)

$\forall z, w \in \mathbb{C}$ gelten:

a) $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$

b) $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$

Bw Zeigen a) mittels Funkt-Gl. vom exp und Symmetrien

$$\cos(z+w) = \frac{1}{2}\left[e^{iz+iw} + e^{-iz-iw}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{iz}e^{iw} + e^{-iz}e^{-iw}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[(\cos z + i\sin z)(\cos w + i \sin w)$$

$$+ (\cos(+z) \overset{-}{+} i \sin(+z))\ (\cos(+w) \overset{-}{+} i \sin(+w))\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\cos z \cos w - \sin z \sin w + \cancel{i(\cos z \sin w + \sin z \cos w)}$$

$$+ \cos z \cos w - \sin z \sin w + \cancel{i(-\cos z \sin w - \sin z \cos w)}\Big]$$

$$= \cos z \cos w - \sin z \sin w \qquad \checkmark$$

b) analog. $\square$

Bm

$$\sin 0 = \frac{1}{2i}(1-1) = 0$$ oder stetig & ungerade

Aus a) folgt $\forall x \in \mathbb{R}$

$$1 = \frac{1}{2}(1+1) = \cos(0) = \cos(x-x)$$

$$(\sin x)^2$$

$$= \cos x \cos(+x) + \sin x \sin(+x)$$

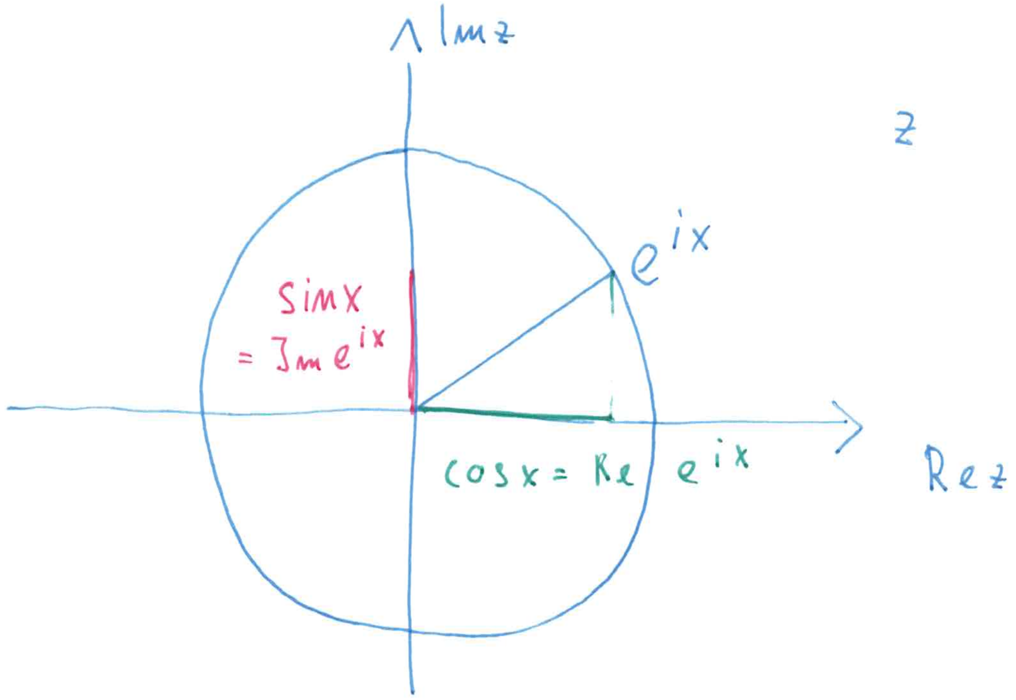
$$= \cos^2 x + \boxed{\sin^2 x}$$

insbes $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$

$$|e^{ix}|^2 = |\cos x + i \sin x|^2 = \cos^2 x + \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \quad |e^{ix}| = 1$$

Die komplexen Zahlen auf dem Einheitskreis kann man also darstellen als



S. 32 $\forall\, x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \boxed{\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n}} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \boxed{\sum_{k=0}^{\infty}} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

wobei beige Grenzwerte links existieren.

Bw

$$m > n: \left| \sum_{k=n}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \sum_{k=n}^{m} \frac{|x|^{2k}}{(2k)!} \leq \sum_{j=2n}^{\infty} \frac{|x|^j}{j!}$$

Mit dem Cauchy-kriterium folgt die Ex. des Limes wie im Bw. vom S. 25.

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos x + i \sin x = e^{ix} \xleftarrow[n \to \infty]{} \qquad \text{S.25}$$

$$E_{2n+1}(ix) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\boxed{(ix)^{2k}}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{\boxed{(ix)^{2k+1}}}{(2k+1)!}$$

$$i^{2k} = (-1)^k \,, \quad i^{2k+1} = (-1)^k \cdot i$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}} + i \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Folge konv. für $n \to \infty$, nenne Limes $\sum_{k=0}^{\infty} (-1) \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

Koeffizientenvergleich im $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$: Beh. □

S 33 (Definition von π)

Fkt: $\cos : [0,2] \to [-1,1]$ besitzt genau eine Nullstelle x_0. Setze $\pi := 2x_0$.

$\cos$ ist streng antiton auf $[0,2]$

$\sin$ isoton $[0, \frac{\pi}{2}]$

$\overset{\frac{\pi}{2}}{\shortparallel}$ Nullstelle x_0 von cos

Beide Fkt positiv auf $(0, \frac{\pi}{2})$.

Bw

$$\cos 2 = \underbrace{\overset{k=0}{1} - \overset{k=1}{2} + \overset{k=2}{\frac{16}{24}}}_{<0} \left(- \quad +\right)\left(- \quad +\right)$$

$$-\frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}\left(-(2k+1) + \overset{2}{x}\right) < 0$$

$\Rightarrow \cos(2) < 0$, $\cos(0) = 1$,

Nullstellens $\Rightarrow \exists\, x_0 \in (0,2)$ mit $\cos(x_0) = 0$

Ähnlich zeigt man: $\forall x \in [0,2] : \sin(x) \geq \frac{x}{3}$

HA 9.1 $\Rightarrow$

8-21

$$\cos y - \cos x = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{y-x}{2}\right) < 0$$

für $0 \le x < y < 2$ $\Rightarrow$ s. antiton auf $[0,2]$

$\Rightarrow$ Nullst. eindeut.

$$\sin y - \sin x = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{y-x}{2}\right) > 0$$

für $0 \le x < \underbrace{y \le x_0}_{\text{cos noch positiv}}$ $\Rightarrow$ s. isoton auf $[0, x_0]$

$\square$

Bm 34 (Periodizität und Werte)

Beweis vorziehen

a) $\forall x \in \mathbb{R} : \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$

$-\cos(x+\pi) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$

b) Iteration ergibt $\forall x \in \mathbb{R}$:

$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ $\quad$ $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$

$\cos(x + \pi) = -\cos x$ $\quad$ $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$

c) $\cos x = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ mit $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$

$\sin x = 0 \iff x = k\pi$

$e^{ix} = 1 \iff x = k \cdot 2\pi$

d) $\forall k \in \mathbb{Z}$ sind $\sin : \left[\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right] \to \mathbb{R}$

$\cos : [k\pi, (k+1)\pi] \to \mathbb{R}$ streng monoton

$\boxed{\text{Bw von a}}$ $\sin^2 \frac{\pi}{2} = 1 - \underset{\uparrow \text{ Nullst.}}{\cos^2 \frac{\pi}{2}} = 1$

Vorzeichen? $\sin \frac{\pi}{2} \geq 0$ wg. Isotonie

$\Rightarrow \sin \frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow e^{i\pi/2} = (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$

$= 0 + i \cdot 1 = i$

$\cos(x + \frac{\pi}{2}) + i \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \exp(i(x + \frac{\pi}{2}))$

$= \exp(i\frac{\pi}{2}) \exp(ix) = i(\cos x + i \sin x)$

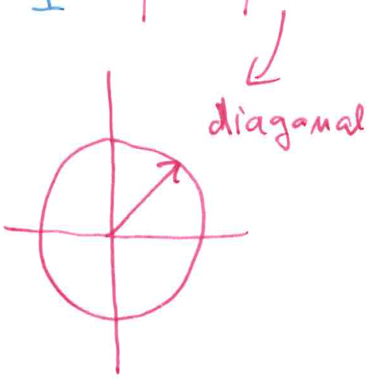
$= -\sin x + i \cos x$

Koeffizienten vergleich. liefert

---

e)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$
$\sin x$	0	1	0	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1/\sqrt{2}$
$\cos x$	1	0	-1	0	1	$1/2$	$1/\sqrt{2}$
$\exp(ix)$	1	i	-1	$-i$	1		



Weitere trigonometrische Fkt

D 35

$\tan: \mathbb{R} \setminus \{ (k+\frac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z} \} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$

heißt Tangens (Fkt.)

$\cot: \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}$

heißt Kotangens (Fkt.)

Der cos ist nicht nur auf $[0,2]$ sondern sogar auf $[0,\pi]$ streng antiton, also bijektiv (wg. Stet.) Abb. auf $\cos([0,\pi]) = [-1,1]$ Intervall

Umkehrfkt

$\arccos: [-1,1] \to [0,\pi]$

heißt Arcus-kosinus.

Existiert zu einer Fkt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ein $p \in \mathbb{R}$, so dass $\forall x \in \mathbb{R}: f(x+p) = f(x)$, so heißt f (p-) periodisch.

---

sin, cos sind 2π-periodisch

tan, cot π-periodisch und ungerade Fkt.

10 Exp, Ln und trigon Fkt.

11 Differenzierbare Fkt

Motivation: Benzinverbrauch

im Fahrtenbuch ist Durchschnittsverbrauch zw. zwei Tankvorg. ablesbar

b enzinstand

km-Stand x : 55 Liter

$x+\Delta x$ 5 Liter

∅ Verbrauch $\frac{50\ L}{\Delta x\ km}$

Im Display kann man sich „momentanen Verbrauch" anzeigen lassen, entsprechend sehr kurzen Δx.

Analog ist die „momentane Geschwindigkeit" definiert als

Ort zum Zpkt t.

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

$$\text{mom. Verbrauch} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{b(t+\Delta t) - b(t)}{x(t+\Delta t) - x(t)}$$

D.1 Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$.

f differenzierbar / ableitbar in x_0 $:\Longleftrightarrow$

$g: I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$

$$g(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$ besitzt Limes in $\mathbb{R}$ für $x \to x_0$

$$\Longleftrightarrow \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \text{ ex. in } \mathbb{R}.$$

Den Limes bez. wir mit $f'(x_0)$ oder $\frac{d}{dx} f(x)\Big|_{x_0}$ oder $\left(\frac{d}{dx} f\right)(x_0)$ und nennen ihn Ableitung von f in x_0. $g(x)$ heißt Differenzenquotient.

Besitzt er nur einen Limes $\genfrac{}{}{0pt}{}{f'_-(x_0)}{f'_+(x_0)}$ für $\genfrac{}{}{0pt}{}{x \nearrow x_0}{x \searrow x_0}$ so heißt f in x_0 $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{linksseitig}}{\text{rechts}}$ diffbar. (Tritt insb. auf, falls x_0 Randpkt von I.)

f heißt diffbar auf I $:\Longleftrightarrow$ $\forall\, x_0 \in I$: f diffb. in x_0. In diesem Fall heißt die Abbildung: $f': I \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto f'(x)$ die Ableitung von f.

9-20

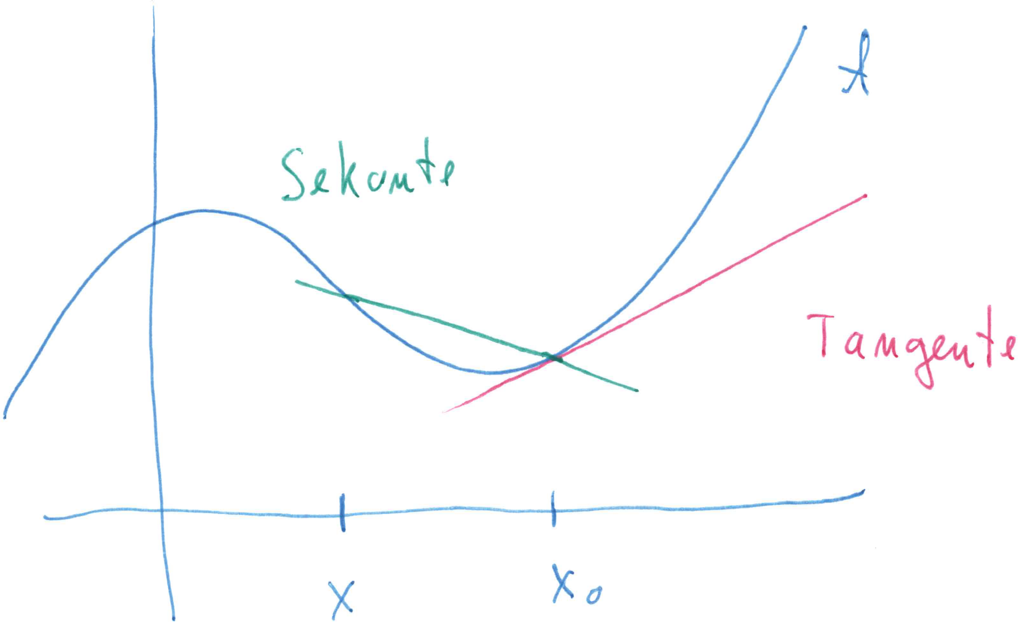
(λ) Einschub

Falls $x_0 = \inf I \in I$, verlangen wir dabei nur
$\sup I \in I$

die Existenz des rechts
links
seitigen Limes.

Übergang vom f zu f' heißt Differentiation.

Geometrische Interpretation



$\dfrac{f(\tilde{x}) - f(x_0)}{\tilde{x} - x_0}$ ist Steigung der Sekante

durch die Pkte $(x_0, f(x_0)), (x, f(x))$

$$x \mapsto \frac{f(x_0)\tilde{x} - f(\tilde{x})x_0}{\tilde{x} - x_0} + \frac{f(\tilde{x}) - f(x_0)}{\tilde{x} - x_0} x$$

und $f'(x_0)$ die Steigung der Tangente

$$x \mapsto f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$.

Beides sind Graphen von affin-linearen Fkt.

Bsp 2 $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

a) $f: x \mapsto ax+b \Rightarrow f'(x) = a$, denn

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{ax+b-ax_0-b}{x-x_0} = a\,\frac{x-x_0}{x-x_0}$$

b) $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n\,x^{n-1}$

$$\frac{x^n - x_0^n}{x-x_0} = \sum_{k=0}^{n-1} x_0^k\, x^{n-1-k}$$

geom

$\sum$ Forml

$$\xrightarrow[x \to x_0]{} \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{x_0^k\, x_0^{n-1-k}}_{= x_0^{n-1}} = n\, x_0^{n-1}$$

c) $f(x) = |x|$ nicht diffbar in 0, da

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{für } x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases} \xrightarrow[x\to 0]{} \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}$$

Aber f ist links und rechsseitig diffbar in $x=0$ mit $f'_+(0)=1$, $f'_-(0)-1$

$f|_{(0,\infty)}$ und $f|_{(-\infty,0)}$ sind diffbar.

9 - (4)

d) $\exp'(ax) = a \exp(ax)$

$$\frac{e^y - e^x}{y-x} = e^x \frac{e^{y-x}-1}{y-x} \xrightarrow[y-x\to 0]{\text{Bsp } 9.24} e^x \cdot 1$$

$$a e^{ax} \frac{e^{a(y-x)}-1}{\underbrace{a(y-x)}_{=\tilde{x}}} \xrightarrow[\tilde{x}\to 0]{} a e^{ax} \cdot 1$$

($a=0$ separat beh.)

e) $\cos' x = - \sin x$, $\sin' x = \cos x$

$$\frac{\sin y - \sin x}{y-x} \overset{HA}{=} \cancel{2} \underbrace{\cos\left(\frac{y+x}{2}\right)}_{\xrightarrow[y\to x]{} \cos x} \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)}{\frac{1}{2}(y-x)}}_{\xrightarrow[y\to x]{} 1}$$

wobei wir benutzten:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \sin x = 1 \qquad (\text{übg.})$$

$$\frac{\cos y - \cos x}{y-x} \overset{HA}{=} -\cancel{2}\, \underbrace{\sin\left(\frac{y+x}{2}\right)}_{\longrightarrow \sin(x)} \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)}{\frac{1}{2}(y-x)}}_{\longrightarrow 1}$$

f) Spannend sind auch die Fkt.

$$x \longmapsto \underbrace{x^{\alpha}}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ x \to 0}} \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}_{\text{oszilliert für } x \to 0} \quad \text{für } \alpha > 0$$

$$x \to 0 \Longleftrightarrow \frac{\pi}{x} \to \infty$$

¿ Wer gewinnt?

Betrachte folgende Fkt $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$

g) $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Denn

$$\frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{y - x} \overset{\substack{\text{3 binomische F} \\ \downarrow}}{=} \frac{1}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} \xrightarrow{y \to x} \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Ist in $x = 0$ Fkt f rechtss. diffbar?

$$\frac{f(y) - f(0)}{y - 0} = \frac{\sqrt{y}}{y} = \frac{1}{\sqrt{y}} \to +\infty \; (y \to 0)$$

$\Rightarrow$ NEIN!

h) $f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

$$\frac{\ln y - \ln x}{y - x} = \frac{1}{x} \, \frac{\ln(y/x)}{\underbrace{y/x - 1}_{= \tilde{x}}} = \frac{1}{x} \, \frac{\ln(1+\tilde{x})}{\tilde{x}} \to \frac{1}{x}$$

für $\tilde{x} \to 0$ d.h. $y \to x$ nach Bsp 9.24.

S. 11.3 Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $a \in \mathbb{R}$.

Dann s. äquivalent.

(i) f diffbar in x_0 mit $f'(x_0) = a$

(ii) Es ex Fkt. $\varepsilon: I \to \mathbb{R}$ mit $\varepsilon(x_0) = 0$, stetig in x_0

und

$$\forall x \in I: \; f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + (x - x_0) \cdot \varepsilon(x) \qquad (x)$$

Bw: (i) $\Rightarrow$ (ii)

Defn:
$$\varepsilon(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) & \text{für } x \neq x_0 \\ 0 & x = x_0 \end{cases}$$

Dann:

$\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$ und

(x) folgt durch Multipl. mit $(x-x_0) \neq 0$

(ii) ⇒ (i)

Für $x \neq x_0$ dividiere (x) ⇒

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a + \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} a$$

⇒ (i) $\square$

Kor 4 $x_0 \in I \subset \mathbb{R}$ Intv. $f: I \to \mathbb{R}$

f diffbar in x_0 a) f stetig in x_0

b) $G = G_{x_0} : I \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \begin{cases} \frac{f(x_0)-f(x_0)}{x-x_0} & \text{für } x \neq x_0 \\ f'(x_0) & x = x_0 \end{cases}$

ist stetig in $x = x_0$ und eine Fortsetzung des Differenzenquotienten $g: I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ im x_0.

Kombiniere differenzierbare Fkt zu neuen.

S.5 Sei $x_0 \in I \subset \mathbb{R}$ Interv., $f, g : I \to \mathbb{R}$ diffbar in x_0. Dann sind auch

$f + g$ und $f \cdot g$ diffb. in x_0

$\frac{f}{g}$ diffb. in x_0, falls $g(x_0) \neq 0$.

Es gelten

a) $(f+g)'(x_0) = f'(a) + g'(b)$

Linearität d. Ableitung

b) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$

Produktregel

c) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

Quotientenregel

Spezialfall: $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = - \frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

Bw a) $\frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$

$x \neq x_0$

9-9

$$\longrightarrow f'(x_0) + g'(x_0) \quad \text{für} \quad x \to x_0$$

b)

$$\frac{(f\cdot g)(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - (f\cdot g)(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

$$\longrightarrow f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0) \quad g(x_0) \quad \text{für } x \to x_0$$

g stet. im x_0 ↗

c) Sp-Fall: $c = g(x_0) \neq 0$

g diffb, insb. stet im $x_0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0$ mit

$\forall\ |x - x_0| < \delta$ gilt $g(x) \neq 0$

somit

$$\frac{1}{x-x_0} \quad \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} = \frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)\, g(x_0)} \quad \frac{1}{x-x_0}$$

$$= - \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \quad \frac{1}{g(x)g(x_0)} \longrightarrow - g'(x_0) \frac{1}{g^2(x_0)}$$

$\boxed{9-10}$ Mit b) folgt c) allgemein.

Bm:

Wir sehen: „Differenzierbark. baut auf Stet. auf."

Falls in b) $g \equiv \lambda$ auf I, $\lambda \in \mathbb{R}$ so:

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda \cdot f'(x_0)$$

$\Rightarrow$ Menge der in x_0 diffb. Fkt $f: I \to \mathbb{R}$ bildet

- $\mathbb{R}$ - Vektorraum, $\cdot$ komm. Ring
- $\mathbb{R}$-Algebra] mit Eins $(f(x_0) = 1, x \in I)$

S. 6 (Kettenregel)

Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ echte Intervalle, $f: I \to J$, $g: J \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, f diffb. in x_0, g diffb in $y_0 := f(x_0) \in J$. Dann ist $h := g \circ f : I \to \mathbb{R}$ diffb. in x_0 und

$$h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \qquad (**)$$

Bw Naiv würde man

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{(f(x) \underset{\downarrow}{-} f(x_0))} \; \frac{(f(x) - f(x_0))}{(x - x_0)_{\downarrow}}$$ ansetzen

Aber Fkt $x \longmapsto f(x) - f(x_0)$ kann Nullst. besitz.

S.3 ⇒ $$g(y) - g(y_0) = g'(y_0)(y-y_0) + \overset{\overset{0}{\uparrow \text{ für } y\to y_0}}{\varepsilon(y)}(y-y_0)$$

setze $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$ ein

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x-x_0} = g'(f(x_0))\boxed{\frac{(f(x)-f(x_0))}{x-x_0}}$$

$$+\, \varepsilon(f(x))\boxed{\frac{(f(x)-f(y_0))}{x-x_0}}$$

$$\xrightarrow[x\to x_0]{} f'(x_0)$$

$$\xrightarrow[x\to x_0]{} \left[g'(f(x_0)) + \overbrace{\lim_{x\to x_0} \varepsilon(f(x))}^{?}\right] f'(x_0)$$

Beachte: f st. im x_0, ε st. in $y_0 = f(x_0)$

$$\varepsilon(f(x)) \to \varepsilon(y_0) = 0$$

$\square$

$\square$

Wie bei der Stetigkeit wollen wir noch die

S.7 (Diffbark. von Umkehrfkt)

Seien $x_0 \in I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f : I \to f(I) =: J \subset \mathbb{R}$ stet. & streng monoton. Ist f in x_0 diffb. und $f'(x_0) \neq 0$, so ist $f^{-1} : J \to I$ in $y_0 = f(x_0)$ diffb und

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Bw: f st. & mon $\Rightarrow$ J Intervall

Sei $y_n \in J \setminus \{y_0\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $y_n \to y_0$. Da f bijektiv:

$\Rightarrow$ $x_n = f^{-1}(y_n) \in I$ und $\forall n : x_n \neq x_0$

$$\Rightarrow \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{\boxed{y_n - y_0}} = \left(\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \right)^{-1}$$

Da f^{-1} sogar stetig:

$$x_n = f^{-1}(y_n) \longrightarrow f^{-1}(y_0) = x_0$$

9-13 $$\xrightarrow[n \to \infty]{} \left(f'(x_0) \right)^{-1}$$

S.7 (Diffbark. von Umkehrfkt)

Seien $x_0 \in I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f : I \to f(I) =: J \subset \mathbb{R}$ stet. & streng monoton. Ist f in x_0 diffb. und $f'(x_0) \neq 0$, so ist $f^{-1} : J \to I$ in $y_0 = f(x_0)$ diffb und

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

7.12.21

Bw: f st. & mon $\Rightarrow$ J Intervall

Sei $y_n \in J \setminus \{y_0\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $y_n \longrightarrow y_0$. Da f bijektiv:

$\Rightarrow \quad x_n = f^{-1}(y_n) \in I$ und $\forall n: x_n \neq x_0$

$$\Rightarrow \quad \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \left(\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}\right)^{-1}$$

Da f^{-1} sogar stetig:

$$x_n = f^{-1}(y_n) \longrightarrow f^{-1}(y_0) = x_0$$

9-13 $\quad \xrightarrow[n \to \infty]{} \left(f'(x_0)\right)^{-1}$

Hier bei benutzten wir „Grenzwertsatz f. Flg"

$$\lim_n \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim_n b_n} \quad \text{falls } 0 \neq \lim b_n \overset{\text{hier}}{=} f'(x_0) \quad \square$$

Bsp. 8

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^3$ strikt isoton, stet.

$$g = f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; y \longmapsto \operatorname{sgn}(y) \sqrt[3]{|y|}$$

$$\frac{g(y) - g(0)}{y - 0} = \frac{\sqrt[3]{|y|}}{|y|} = \frac{1}{|y|^{2/3}} \xrightarrow[y \to 0]{} \infty$$

also g in 0 nicht diffbar.

Wie kann das sein?

→ Voraussetzung $f'(0) \neq 0$ verletzt,

denn $\frac{x^3}{x} = x^2 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

b) Da $\overset{\forall x \in \mathbb{R}}{\exp'(x) = \exp(x) > 0}$, folgt

Diffbkeit von $\ln: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ auch mittels

S.7 : $\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{x}$

c) Allg. Potenzfkt $p_\alpha : (0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto x^\alpha$

$\alpha \in \mathbb{R}$. Mit Kettenregel S. 6

$$p_\alpha'(x) = \exp'(\alpha \ln x) \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \alpha \quad x^\alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$$

d) $f_1, \dots, f_m : I \to \mathbb{R}$ diffbar, $f = \prod_{k=1}^{m} f_k$

$$\Rightarrow \quad f' = \sum_{k=1}^{m} f_1 \cdot \ldots \cdot f_{k-1} \cdot f_k' \cdot f_{k+1} \cdots f_m$$

(Produktregel & Induktion über m, z.B.)

$$(f \cdot g \cdot h)' = f' \cdot g \cdot h + f g' h + f g h'$$

e) $f : I \to \mathbb{R}$ ohne Nullstelle & diffbar

$\Rightarrow$ stetig $\Rightarrow$ festes Vorzeichen, wg. ZWS.

$$\Rightarrow \quad |f(x)| = (\operatorname{sgn} f(x))\, f(x) = (\operatorname{sgn} f)\, f(x)$$

Kettenregel:

$$(\ln |f|)'(x) = \ln'(|f(x)|) \cdot \operatorname{sgn} f \cdot f'(x)$$

$$= \frac{f'(x)}{\operatorname{sgn} f \cdot |f(x)|} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Dieser Quot. heißt <u>logarithmische Ableitung</u> von f.

f) $f_1, \ldots, f_n : I \to \mathbb{R}$ diffb., ohne Nullst.

$f = f_1 \cdot \ldots f_n \Rightarrow |f| = |f_1| \cdot \ldots \cdot |f_n|$

$$\Rightarrow \frac{f'}{f} = (\ln |f|)' = \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{n} \ln |f_k|$$

Abl. linear

$$= \sum_{k} \frac{d}{dx} \ln |f_k| = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'}{f_k} .$$

g) $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$

$a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ist diff bar und

$$p'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^{1-1}$$

Wg. Bsp c) & Summenregel

h) Quotientenregel liefert

für $x \neq (k + \frac{1}{2})\pi$:

$$\tan'(x) = \frac{d}{dx} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

für $x \neq k\pi$:

$$\cot'(x) = \frac{d}{dx}\,\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

beides kann man umformen:

$$\tan^2 x + 1 = \frac{\sin^2 x + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$-\cot^2 x - 1 = -\frac{\cos^2 x + \sin^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

h) Ähnlich für : $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$$

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2}$$

i) Mit Produkt r. $\beta, \alpha \in \mathbb{R}$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^\alpha e^{\beta x}$

$$f'(x) = \alpha\, x^{\alpha - 1} e^{\beta x} + x^\alpha \beta e^{\beta x}$$

$$= (\alpha + \beta x)\, x^{\alpha - 1}\, e^{\beta x}$$

j) $h := g \circ f$, $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$

$$h'(x) = g'(f(x))\, f'(x) = \cos(x^2)\; 2x$$

9-17 | k) Iterativ folgt für

k) $F(x) = \varphi(h(g(f(x)))) = \left(\sin\left((x^4+2x)^2\right) \right)^5$

$$F'(x) = \varphi'(h(g(f(x)))) \cdot h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$= 5\left(\sin(x^4+2x)^2\right)^4 \cos\left(x^4+2x\right)^2 2(x^4+2x)(4x^3+2$$

l) Für $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx}\left(e^{x \ln a}\right) = \ln a \, e^{x \ln a}$$

$$= a^x \ln a$$

Gibt es Fkt. deren Abl. nicht nur wohldef sind, sondern auch stetig oder sogar differenzierbar?

D.9 Sei $I \subset \mathbb{R}$ Int & $f: I \to \mathbb{R}$ diffbar. auf I. mit Ableitung $g = f'$.

a) Ist $g: I \to \mathbb{R}$ stetig, so heißt f stetig diffbar auf I. Die Menge aller solcher Fkt bez. wir mit $C^1(I)$.

b) Ist g auch diffbar, so heißt f

zweimal diffbar auf I und

$g' = (f')'$ die zweite Ableitung von f

Schreiben $\left(\frac{d^2}{dx^2} f\right)(x) := f''(x) := g'(x)$.

c) Für $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ definieren wir rekursiv:

$$C^m(I) := \{ \underline{f \in C^1(I)} \mid f' \in C^{m-1}(I) \}$$

f st. diffbar und f' kann ich nochmal

m-1 mal st. abl.

$$f^{(m)} := (f')^{(m-1)} \quad \text{wobei } f^{(0)} = f$$

↑ $f^{(1)} = f'$,

also z. B. $f^{(2)} = (f')' = f''$

Ein $f \in C^m(I)$ heißt m-mal stet. diffb. auf I.

d) Ein $f \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C^m(I)$ heißt unendlich oder beliebig oft diffbar auf I.

↑ st. kann ich wegl.

Notation $C^0(I) = C(I)$

$$\frac{d^m}{dx^m} f = \left(\frac{d}{dx}\right)^m f = f^{(m)} \qquad m \in \mathbb{N}$$

Bsp 10

Später [$C^m(I)$ ist VR & Ring ⇒ Algebra (mit Eins $f(x) \equiv 1$ auf I)

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$

ist diffbar in alternativ: stückeln

$x_0 = 0$? $$\frac{x|x| - 0}{x - 0} \overset{x \neq 0}{=} |x| \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

in $x_0 \neq 0$: $$\frac{x|x| - x_0|x| + x_0|x| - x_0|x_0|}{x - x_0} = |x| + x_0 \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0}$$

beide pos oder neg für $x \sim x_0$

$$\overset{x \sim x_0}{=} |x| + x_0 \cdot \mathrm{sgn}(x_0) \xrightarrow[x \to x_0]{} 2|x_0|$$

Also ist $g = f'$ sogar stetig auf $\mathbb{R}$, aber offens. nicht diffbar. Insbes

$$C^{(1)}(\mathbb{R}) \neq C^{(2)}(\mathbb{R})$$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ x^2 \sin \frac{\pi}{x} & \text{sonst} \end{cases}$

Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist f diffbar (übg) mit stetigem $g = f' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

Aus Produkt- und Kettenregel folgt nämlich:

$$g(x) = 2x \sin \frac{\pi}{x} + x^2 \cos \frac{\pi}{x} \left(- \frac{\pi}{x^2} \right)$$

$$= 2x \sin \frac{\pi}{x} - \pi \cos \frac{\pi}{x}$$

Betrachte Nullfolge $x_n = \frac{1}{n}$.

$$g(x_n) = 2 \frac{1}{n} \sin(\pi n) - \pi \cos(n\pi)$$

$$= 0 - \pi (-1)^n = \pi (-1)^{n+1}$$

$\Rightarrow$ Grenzw. ex. nicht

$\Rightarrow$ Man kann g nicht zu einer stetigen Fkt $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fortsetzen.

Tats. ist aber f in 0 diffb. mit $f'(0) = 0$ übg.

c) $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $x \in \mathbb{R}, a_k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}: \quad p^{(n)}(x) = n!\, a_n$ (übg.)

$p^{(n+m)}(x) = 0$ für $m \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow p \in C^{\infty}(\mathbb{R})$

d) exp, sin, cos $C^{\infty}(\mathbb{R})$ mit $\forall m \in \mathbb{N}_0$

$$\frac{d^m}{dx^m} e^x = e^x = \exp(x)$$

$$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} \sin(x) = (-1)^m \sin x$$

$$\frac{d^{2m+1}}{dx^{2m+1}} \sin(x) = (-1)^m \cos x$$

$$\cos^{(2m)}(x) = (-1)^m \cos(x), \quad \cos^{(2m+1)}(x) = (-1)^{m+1} \cdot \sin(x)$$

<u>S. 11</u> Sei $I \subset \mathbb{R}$ Int, $f, g: I \to \mathbb{R}$ m-mal diffb. auf I. Dann sind $f+g$ und $f \cdot g$ m-mal diffbar auf I und es gelten

9-22

(a) $\forall x \in \mathbb{R}: \quad (f+g)^{(m)}(x) = f^{(m)}(x) + g^{(m)}(x$

(b) 〃 $\quad (fg)^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} f^{(m-k)}(x) g^{(k)}(x$

Bw

(a) $m=2 \quad ((f+g)')' \underset{SF}{=} (f'+g')' \underset{SF}{=} f''+g''$

weiter mit Induktion

(b) $m=2 \quad (f\cdot g)'' \underset{PR}{=} (f'g+fg')' = f''g+f'g'+f'g'+fg''$

$\underset{SR}{=} f''g+2f'g'+fg''$

$m=3: \quad (fg)''' = ((fg)'')' = (f''g+2f'g'+fg'')'$

$= f'''g + f''g' + 2f''g' + 2f'g'' + f'g'' + fg'''$

$= f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$

Wir erkennen bereits die Binomialkoeffiz.

Für allg. m zeigt man die Formel mit Induktion bzw. analog zum

9
23 Bw. des binomischen Lehrsatzes. □

Bm 12 Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall $m \in \mathbb{N}_0$ oder $m = \infty$, $f, g \in C^m(I)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) $f+g, \lambda f, f \cdot g \in C^m(I)$ insbes. ist $C^m(I)$ ein VR, ein Ring, eine Algebra mit Eins: $h(x) = 1$ für $x \in I$.

b) Ist $0 \notin f(I)$ so ist $\frac{1}{f} \in C^m(I)$

c) Ist $h \in C^m(\underbrace{f(I)}_{\text{Interv. da } f \text{ stet.}})$, so $h \circ f \in C^m(I)$

d) Ist $\underbrace{0 \notin f'(I)}_{\Rightarrow f \text{ strikt monoton, denn}}$, so ist $f^{-1} \in C^m(f(I))$

e) $\forall x \in I : f'(x) > 0 \Rightarrow f$ strikt isot.

f) Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{x}$, so

$$f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f^{(m)}(x) = \frac{(-1)^m m!}{x^{m+1}}$$

$$\Rightarrow f|_{(0,\infty)} \in C^\infty((0,\infty)), \quad f|_{(-\infty,0)} \in C^\infty((-\infty,0))$$

9-24 Da $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$ folgt $\ln \in C^\infty((0,\infty))$

9.12.
2021

13.12.21

9) Seien $n, m \in \mathbb{N}$, $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}{\sum_{k=0}^{m} b_k x^k}$

und $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, dass keine Nullst. von q enthält. Dann $f \in C^\infty(I)$.

→ b.w.

---

12 Kurvendiskussion

geometrische Charakteristiken von Funktionen (graphen)

↑

analytische Eig. v. Fkt.

Extremwerte, Monotonie, Konvexität, Mittelwertsätze

D.1 Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $x_0 \in I$, $f: I \to \mathbb{R}$.

f hat in x_0 ein globales Maximum :⟺

$\forall x \in I: \quad f(x) \le f(x_0)$

Dann heißt $f(x_0)$ globales Maximum von f

x_0 ‖ Maximalstelle von f.

$\boxed{X-1}$

12 Kurvendiskussion

Mittelwertsätze, Extrema, Monotonie, Konvexität.

Wollen Vorstellung über das Verhalten von Funkt. bzw Aussehen von Fkt-Graphen anhand ihrer Charakteristiken entwickeln.

Zusammenspiel von

globalen & lokalen Char.
geometrischen & analytischen "
z.B. Sekante Ableitung

D.1 Sei $I \subset \mathbb{R}$ Interv., $x_0 \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$.

f hat in x_0 ein globales Maximum $:\Longleftrightarrow$
$$\forall x \in I : f(x) \leq f(x_0)$$

Dann heißt:
$f(x_0)$ globales Maximum von f
$x - 2|$ x " Maximalstelle von f

Insbes: $f(x_0) = \max f(I)$

f hat in x_0 <u>lokales Maximum</u> $:\Longleftrightarrow \exists\, \delta > 0$ s.d. $\forall\, x \in I \cap B_\delta(x_0) : \; f(x) \leq f(x_0)$.

Dann heißt x_0 <u>lokale Maximalst.</u> von f,

$f(x_0)$ <u>lok. Maximum</u> ‖ .

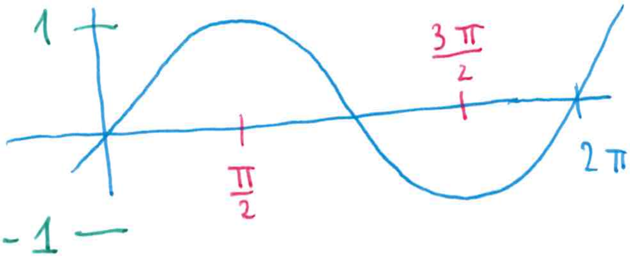
Insbes: $f(x_0) = \max f(I \cap B_\delta(x_0))$

Analog sind auch globales / lokales Minimum und Minimalstelle definiert.

f hat in x_0 ein $\substack{\text{globales} \\ \text{lokales}}$ Extremum $:\Longleftrightarrow$

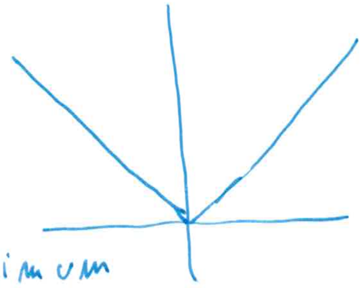
<u>f hat in x_0 ein</u> $\substack{\text{globales} \\ \text{lokales}}$ Maximum oder Minimum

$f(x) = \sin(x)$



$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = \max \sin(\mathbb{R})$

$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 = \min \sin(\mathbb{R})$

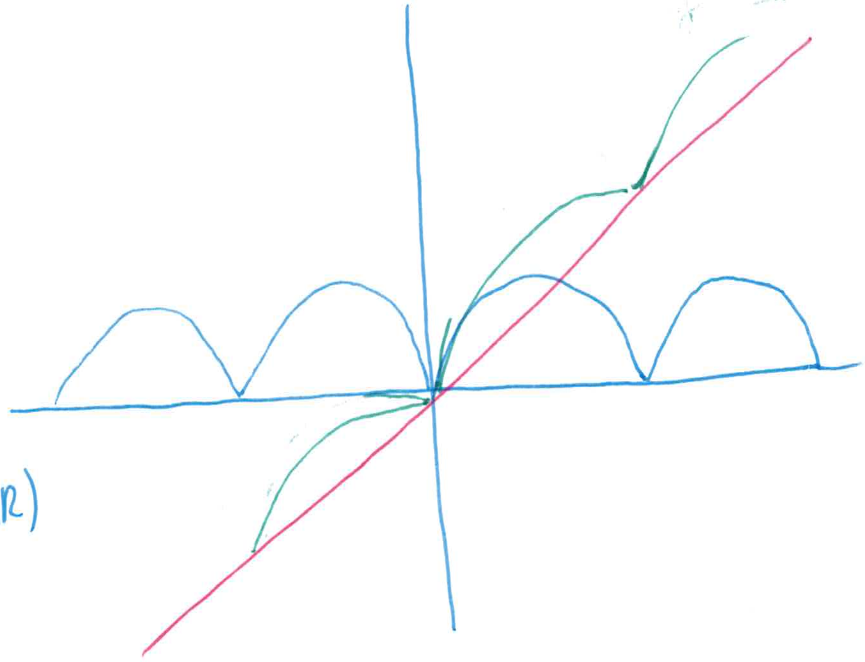


$f(x) = |x|$, $f(0) = 0 = \min f(\mathbb{R})$

$\sup f(\mathbb{R}) = \infty \;\Rightarrow\; \nexists$ glob. Maximum

$f(x) = |\sin x|$

$g(x) = x + f(x)$



$f(0) = 0 = \min f(\mathbb{R})$

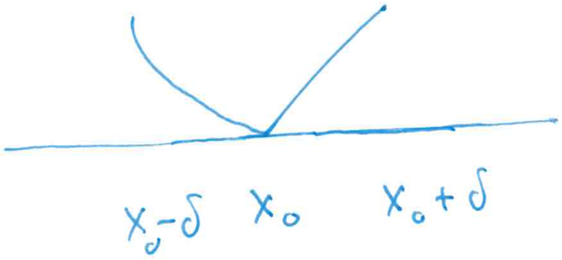
$f(\frac{\pi}{2}) = 1 = \max f(\mathbb{R})$

g ist unbesch.

es ex. weder glob. Max noch Min

¿ Gibt es lokale Minima, z. B. im $-\pi, 0, \pi, 2\pi$?

Angen ein $f: I \to \mathbb{R}$ hat lok Min im $x_0 \in I$. Dann gelten



$\forall\, x \in (x_0, x_0+\delta)$:

$$g_{x_0,f}(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{\underbrace{x-x_0}_{>0}} \geqslant 0$$

$\forall\, x \in (x_0-\delta, x_0)$:

$$g_{x_0,f}(x) = \frac{f(x_0)-f(x)}{\underbrace{x_0-x}_{>0}} \leqslant 0$$

X 4

Diff - Quot $g = g_{x_0, f}$ ist nicht pos auf $(x_0 - \delta, x_0)$
nicht neg. auf $(x_0, x_0 + \delta)$

hat also Vorzeichenwechsel in $x = x_0$.

¿Ist also x_0 eine Nullstelle von g?

I. a. : Nein, da g nicht stetig sein muß.

Aber:

f diffb. in $x_0 \overset{\text{K.11.4}}{\Longrightarrow}$ g stetig fortsetzb. zu G $= G_{x_0, f}$

$$\Rightarrow \quad 0 = G(x_0) = f'(x_0)$$

Also

L.2 Sei $x_0 \in (a, b) = I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ diffbar in x_0 und x_0 lokales Min oder Max von f.

$$\Rightarrow \quad f'(x_0) = 0$$

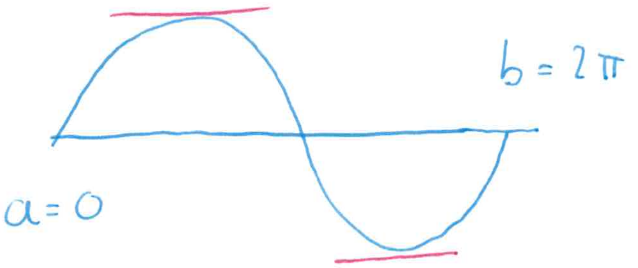
Im Folgenden verw. wir mehrmals Ann

(A) $I = [a, b]$, $a < b$, $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetig auf (a, b) sogar diffbar.

$\boxed{x \; 5 :}$

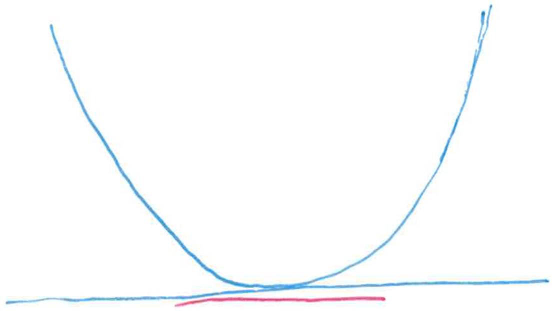
S. v. Rolle 3 Es gelte (A). Ist $f(a)=f(b)$ so ex $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Bsp: $\sin(0) = \sin(2\pi) = 0$



$\xi \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\}$

$f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$



$f(-1) = 1 = f(1)$

$f'(0) = 0$

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $f'(\xi) = 0$ für alle $\xi \in (a,b)$

Bw ① f konstant $\Rightarrow$ Auss. wahr.

② f nicht –||– .

Da f stetig auf abg. Intervall, existieren

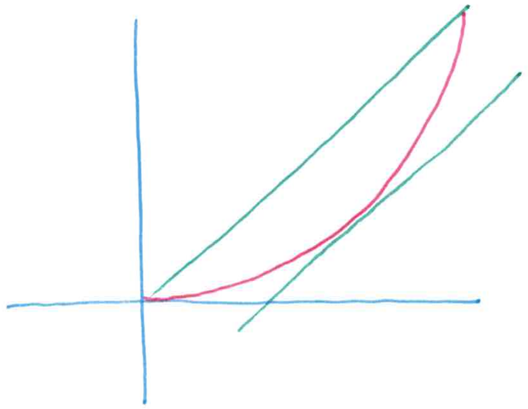
X 6 $x_-, x_+ \in [a,b]$ mit

$\forall \ x \in I: \quad f(x_-) \leq f(x) \leq f(x_+)$

nach S. 9.15 vom Min/Max. Wg $f(a)=f(b)$ können nicht beide x_-, x_+ Randpkt. von I sein. Also ex $\xi \in \{x_-, x_+\}$ mit $a < \xi < b$ und $f'(\xi) = 0$ nach L.2

□

Was gilt ohne $f(a)=f(b)$?



$f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^\alpha, \alpha > 0$

$f(0) = 0, \ f(1) = 1$

Auch hier gibt es einen Punkt $\xi \in (a,b)$ an dem die Tangente parallel (= selbe Steigung) zu der Sekante durch Endpkte des Graphen ist.

lok. Eigensch.

globale 〃

Wie beweisen: kippe den Graphen so, dass Sekante waagrecht liegt.

Mittelwertsatz 4 Gelte (A).

1) Es ex ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a}{b-a}$

2) Es gelte $0 \notin g'((a,b))$. Dann:

$g(b) \neq g(a)$ und es ex ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Bm: i) Anwendung von 1) auf f und g einzeln liefert

$$\frac{f'(\xi_f)}{g'(\xi_g)} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ii) Sei I Zeitintervall $f(t)$ Ort des Autos zum Ztp. t.

a: Startzeit $f(a)$ S-Ort

b: Ankunftszeit $f(b)$ A-Ort

Bewegung auf Gerade $\mathbb{R}$

X 8

⇒ Es ex. Ztp. ξ. s. d

momentane Geschw $f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

⌀ Geschw

Zush. zw. lokalem & globalem Verh.

iii) $t \in [a,b]$ Zeit $f: t \to b(t)$

Benzinst. zum Ztp. t

$g: t \to$ Ort zum Ztp. t.

ⓧ $\dfrac{\text{Verbrauchtes Benzin}}{\text{zurückgeleg. Strecke}} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

¿ Ist das der mom. Benzinverbrauch zum Ztp ξ ?

$$\begin{tikzcd}
\text{Ort} & \text{Zeit} & \text{Benzinst.} \\
J = [g(a), g(b)] \arrow[r, "g^{-1}"] & {[a,b]} \arrow[l, bend left, "g"] \arrow[r, "f"] & {[f(a), f(b)]}
\end{tikzcd}$$

beide f, g strikt isoton angenommen

$h := f \circ g^{-1} : J \to f(I)$ Benz-St. parametr. durch Ort

$$h'(x) = f'(g^{-1}(x)) \, (g^{-1})'(x) = \frac{f'(g^{-1}(x))}{g'(g^{-1}(x))}$$

X - 9

Setze $t = g^{-1}(x)$ bijektiv

$$\Rightarrow \quad h'(g(t)) = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

$$\Rightarrow \quad \otimes = h'(g(\xi))$$

D.h. es gibt eine Position $g(\xi)$ entlang der Strecke an der der „momentane Benzinvverbr" mit dem ⌀ Verbrauch übereinstimmt.

Bw (vom MWS der Differentialr.)

1) Setze $F : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$$\Rightarrow F(a) = f(a) = f(b) - \frac{(f(b)-f(a))}{b-a}(b-a) = F(b)$$

Rolle $\Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b)$ mit

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad ✓$$

2) Falls $g(a) = g(b) \underset{\text{Rolle}}{\Rightarrow} \exists\, \xi_0$ mit $g'(\xi_0) = 0$ ↯

Setze:

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$$

$$\Rightarrow \quad F'(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \, g(x)$$

$$F(a) = f(a) = f(b) - f(b) + f(a) = F(b)$$

Rolle $\Rightarrow \exists \; \xi \in (a,b)$ mit

$$0 = \frac{f'(\xi)}{\bigcirc} - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \boxed{g'(\xi)}$$

$\square$

; Bw von 2) benutzt 1) nicht! Also folgt 1) auch aus 2) mit $g(x) = x$.

Für die Berechnung von Grenzwerten ist nützlich

S.5 (Regeln von L'Hospital) Seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ diffbar und $0 \notin g'((a,b))$

In jeder der zwei Situationen

i) $f(x) \to 0$ und $g(x) \to 0$ für $x \searrow a$

ii) $f(x) \to \infty$ und $g(x) \to \infty$ — || —

gilt: Existiert $\lim\limits_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ so existiert auch

$\lim\limits_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt $\lim\limits_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{y \searrow a} \frac{f'(y)}{g'(y)}$

Entsprechendes gilt auch für:)

1) $x \nearrow b$

2) $x \to \infty$, d.h $b = \infty$

3) $x \to -\infty$, d.h. $a = -\infty$

<u>Bw</u> für i):

Setzen f, g auf $I := [a, b)$ fort durch

$f(a) = 0 = g(a) \Rightarrow f, g$ stetig auf I

MWS $\Rightarrow \forall \; x \in (a, b) \; \exists$ ein $\underbrace{\xi \in (a, x)} \subset [a, x] \subset I$

$$\frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Wg $a < \xi < x$ impliziert $x \searrow a$ auch $\xi \searrow a$.

$$\Rightarrow \lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{\boxed{x \searrow a} \\ \xi \searrow a}} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Zu ii) Setze $Q = \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Also ex zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ s. d

$$\forall t \in (a, a+\delta) \qquad \left| \frac{f'(t)}{g'(t)} - Q \right| < \varepsilon$$

MWS ⇒ Für $x, y \in (a, a+\delta)$, $x \neq y$

$$\left| \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} - \frac{f'(t)}{g'(t)} + \frac{f'(t)}{g'(t)} - Q \right| < \varepsilon \quad ⊗$$

$t \in (x, y)$ Zwischenstelle

Elem. Umformung:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} \boxed{\frac{1 - g(y)/g(x)}{1 - f(y)/f(x)}}$$

$\longrightarrow 1$ für $x \searrow a$

da ja $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ $(x \searrow a)$

N. B. (= Beachte) g' nie 0 ⇒ g strikt monoton

⇒ $g(x) \neq g(y)$

Also ex. ein $\tilde{\delta} \in (0, \delta)$. s.d.

$$\forall x \in (a, a+\tilde{\delta}) : \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} \right| < \varepsilon$$

Komb. mit ⓧ ergibt mit Δ-Ungl.

$$\forall x \in (a, a+\tilde{\delta}) : \left| \frac{f(x)}{g(x)} - Q \right| < 2\varepsilon$$

Der Fall $x \to \infty$ kann mit der Substitution $y = \frac{1}{x}$ auf den Fall $y \searrow a = 0$ zurückgeführt werden. □

Komb. mit ⓧ ergibt mit Δ-Ungl.

$$\forall x \in (a, a+\tilde{\delta}) : \left| \frac{f(x)}{g(x)} - Q \right| < 2\varepsilon$$

Der Fall $x \to \infty$ kann mit der Substitution $y = \frac{1}{x}$ auf den Fall $y \searrow a=0$ zurückgeführt werden. □

16.12.2021

Bsp 7 Für $x \in (0,\infty)$ gilt

$$\ln x \leq x-1$$

Bw:

$$\frac{\ln x}{x-1} = \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} \overset{MWS}{=} \ln' \xi = \frac{1}{\xi}$$

mit $\xi = \xi_x$ zwischen 1 und x.

① Für $x > 1$ ist auch $\xi > 1$ also

$$\frac{\ln x}{x-1} < 1 \Rightarrow \ln x < x-1$$

② Für $x < 1$ ist $\xi \in (x, 1)$ also

$$\frac{\ln x}{x-1} > 1 \Rightarrow \ln x < x-1 < 0$$

Für eine Fkt g schreiben wir

$$g > 0 \text{ auf } I \;:\Longleftrightarrow\; \forall x \in I : g(x) > 0$$

S. $7\frac{1}{5}$ Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) diffbar. Dann

(a) $f' > 0$ auf (a,b) $\Rightarrow$ f streng isoton auf $[a,b]$

(b) $<$ f streng antiton

(c) $f' \geq 0$ auf (a,b) $\Longleftrightarrow$ f isoton auf $[a,b]$

(d) $f' \leq 0$ " antiton

(e) $f' = 0$ " konstant

BW (a) Seien $a \leq x_1 < x_2 \leq b$

MWS $\Rightarrow$ $\exists\, \xi \in (x_1, x_2)$ mit $f(x_2) - f(x_1)$

$= f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0$

Also f' strikt isoton.

Genauso zeigt man alle anderen „$\Rightarrow$"

(c) „$\Leftarrow$"

Für $x, x_0 \in (a,b)$ mit $x \neq x_0$ gilt

$$G(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} f'(x_0)$$

da f diffb.

Da f isoton $\Rightarrow G(x) \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$

Genauso zeigt man andere „$\Leftarrow$".

Bm $7\frac{1}{4}$ a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^3$ ist streng isoton, aber $f'(0) = 0$.

Also wäre „$\Leftarrow$" in a) falsch.

b) $f, g: I \to \mathbb{R}$ diffb. auf Intervall $I \subset \mathbb{R}$

Dann:

$\underbrace{f' = g' \text{ auf } I}$ $\Longleftrightarrow$ $\exists$ Konstante c mit $\forall\, x \in I: g(x) = f(x) + c$.

$\Longleftrightarrow (f-g)' = 0$ auf I

$\Longleftrightarrow f - g = c$

S. 7 $\frac{1}{3}$ (Hinreichendes Kriterium für Extrema

Sei $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differnzierbar und es gelte $f'(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in (a,b)$.

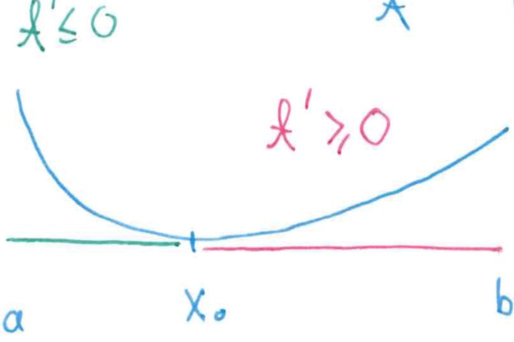
Dann hat f in x_0 ein

a) Minimum, wenn $f' \leq 0$ auf (a, x_0)
$f' \geq 0$ auf (x_0, b)

b) Max , wenn $f' \geq 0$ auf (a, x_0)
$\underbrace{f' \leq 0 \text{ auf } (x_0, b)}_{\forall x \in (x_0,b) :\, f'(x) \leq 0}$

x_0 ist die einzige Minimal- bzw Minimalstelle von f in (a,b), wenn x_0 die einzige Nullstelle von f' in (a,b) ist.

Bw a) … $\Rightarrow$ f antiton auf $(a, x_0]$
f isoton auf $[x_0, b)$



analog für b)

X-14-c

K. 7 $\frac{1}{2}$ Sei $f \in C([a,b])$ auf $(a,b]$ diffb. und

$$c := \lim_{x \downarrow a} f'(x) \text{ existiere}$$

Dann ist f im a rechtsseitig diffbar und es gilt

$$f'_+(a) = c$$

Bw Für $x_n \in (a,b]$ gilt

$$g_a(x_n) = \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \overset{MWS}{=} f'(\xi_n) \text{ für ein } \xi_n \in (a, x_n)$$

Insbes impliziert $x_n \to a$ auch $\xi_n \to a$.

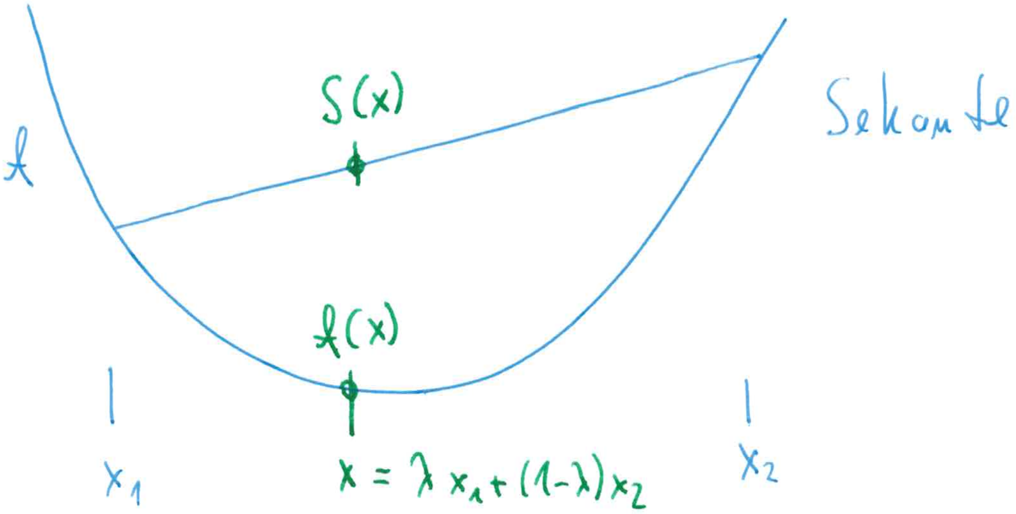
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} g_a(x_n) = f'_+(a)$$

$$\shortparallel$$

$$\lim_{n\to\infty} f'(\xi_n) = c. \qquad \square$$

Analoges Kriterium gilt auch für linksseitige bzw beidseitige diffbarkeit.

X-14-d



$$S(x) = S_{f, x_1, x_2}(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

D. 8 Sei $I \subset \mathbb{R}$ echtes Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$.

a) f heißt konvex (auf I) $:\Longleftrightarrow$

$\forall$ $x_1, x_2, x, \in I$ mit $x_1 < x < x_2$ gilt

$$(*) \quad f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

Da: $x \in (x_1, x_2) \Longleftrightarrow x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$ für ein $\lambda \in (0,1)$

kann man dies umformulieren:

$\Longleftrightarrow$ $\forall$ $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ und $\lambda \in (0,1)$ gilt

$$(**) \quad f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

$$\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 - \lambda x_1 - (1-\lambda) x_2}{x_2 - x_1} = \frac{\lambda (x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}$$

b) Ersetzt man in der Ungl. $(*)$ bzw $(**)$ $\leq$ durch

$<$ so heißt f streng konvex

$\geq$ konkav

$>$ streng konkav

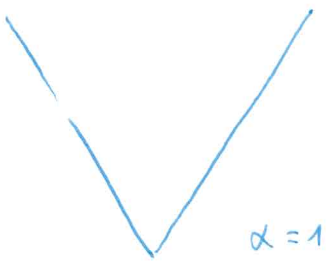
c) Ex. ein $L \in \mathbb{R}$ s.d.

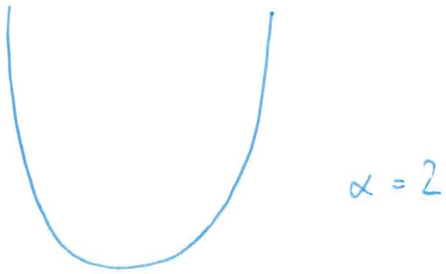
$\forall\, x_1, x_2 \in I$ gilt $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L\, |x_1 - x_2|$

so heißt f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-konst. L.

Bsp 9 Betrachte folgende $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$f : x \longmapsto |x|^\alpha$ für ein $\alpha \geq 1$





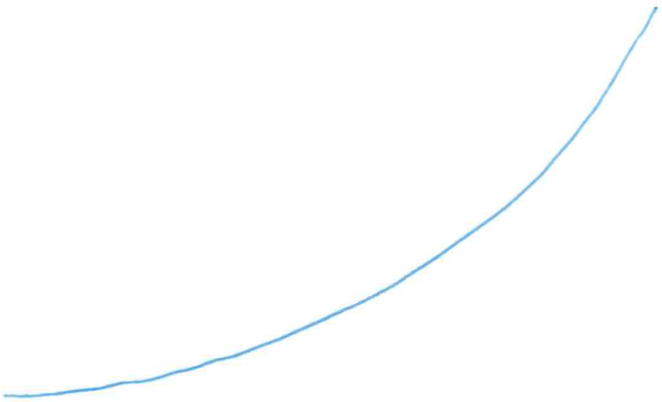
$\Rightarrow$ f strikt konvex und Lipschitz st.

$f : x \longmapsto 5$ ist konvex & Lipschitz st.

$f : x \mapsto a_0 + a_1 x$ nicht strikt konvex

$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist strikt konvex,
nicht Lipschitz.

Aber für jedes beschränkte Intervall ist $\exp\big|_I$ Lipschitz stetig



$$g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} 6 & \text{für } x \in \{a,b\} \\ 5 & x \in (a,b) \end{cases}$$

konvex

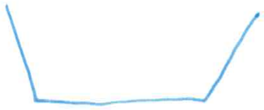
$h : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

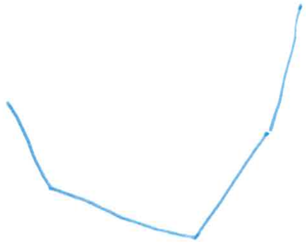
$x \longmapsto -\sqrt{x}$ strikt konvex

nicht Lipschitz stetig.

aber $h|_{[\varepsilon,\infty)}$ ist Lipschitz auf $[\varepsilon,\infty)$ für jedes $\varepsilon > 0$.

$h: x \mapsto -\ln x$ hat auch diese 3 Eigensch.





ebenfalls.

Bm 10 Sei $I \subset \mathbb{R}$ Interv., $f: I \to \mathbb{R}$

i) f Lipschitz-stetig $\Rightarrow$ f stetig

Wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{L} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$

$$\leq L \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$$

ii) f konkav $\Rightarrow$ $-f$ konvex

iii) Ist $J \subset I$ und f konvex auf I

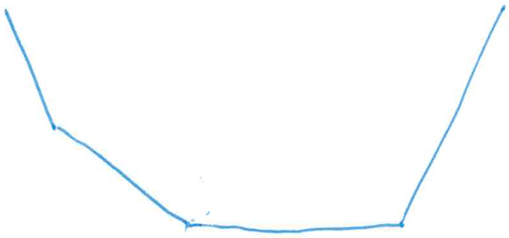
$\Rightarrow$ f konvex auf J.

iv) Seien $\inf I < c < d < \sup I$

Ist $f: I \cap (c, \infty) \to \mathbb{R}$ und

$f: I \cap (-\infty, d) \to \mathbb{R}$ jeweils konvex,

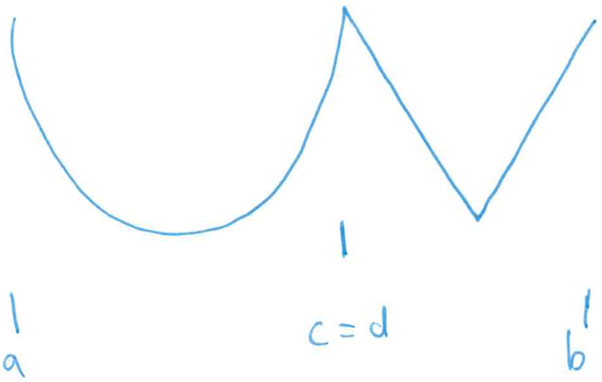
so ist f schon auch auf ganz I konvex
kann man induktiv auf n Teilintervalle verallgem.
Gutes Kriterium für stückweise lin. Fkt.



$\Rightarrow$ muß nur jeden Knick und jedes Zwischenstück einzeln auf Konvexität überprüfen.

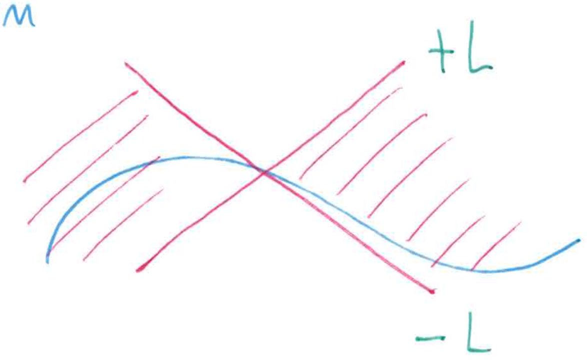
Achtung:

Überlappintervall $(c, d) \neq \emptyset$ wesentlich



f nicht konvex, aber $f|_{[a,c]}$ $f|_{[d,b]}$ einzeln

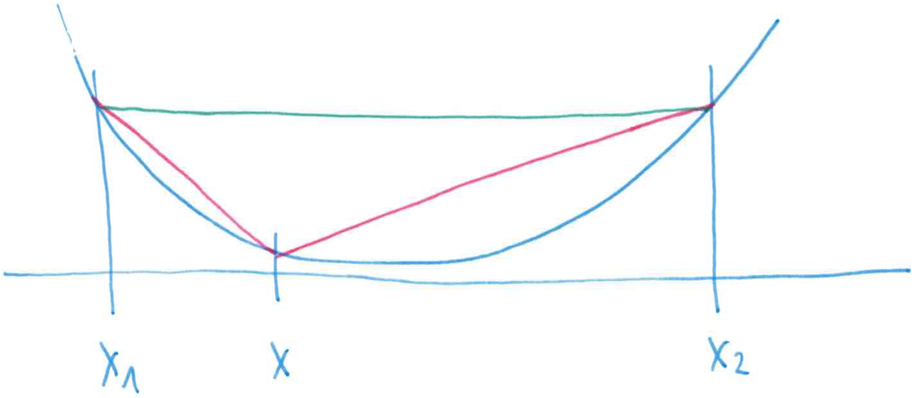
v) Geom Interpretation der Lipschitz-st.



Steigung

vi) f ist konvex $\Longleftrightarrow$ für jedes Tripel $x_1, x, x_2 \in I$ mit $x_1 < x < x_2$ gilt

$$(***) \quad \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$



$\overset{\text{übg}}{\Longleftrightarrow}$ für $x_1 < x < x_2$ wie oben gilt sogar

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \boxed{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

Denn: Multipliziere $(*)$ mit $x_2 - x_1 > 0$

$$(*) \Longleftrightarrow (\underline{x_2 - x} + \underline{x - x_1}) f(x) \le \underline{(x_2 - x)} f(x_1) + \underline{(x - x_1)} f(x_2)$$

$$\Longleftrightarrow (x_2 - x)(f(x) - f(x_1)) \le (x - x_1)(f(x_2) - f(x))$$

divid. durch $(x_2 - x)(x - x_1) > 0$

$$\Longleftrightarrow (***)$$

vii) Für $a < b < c < d$ gilt:

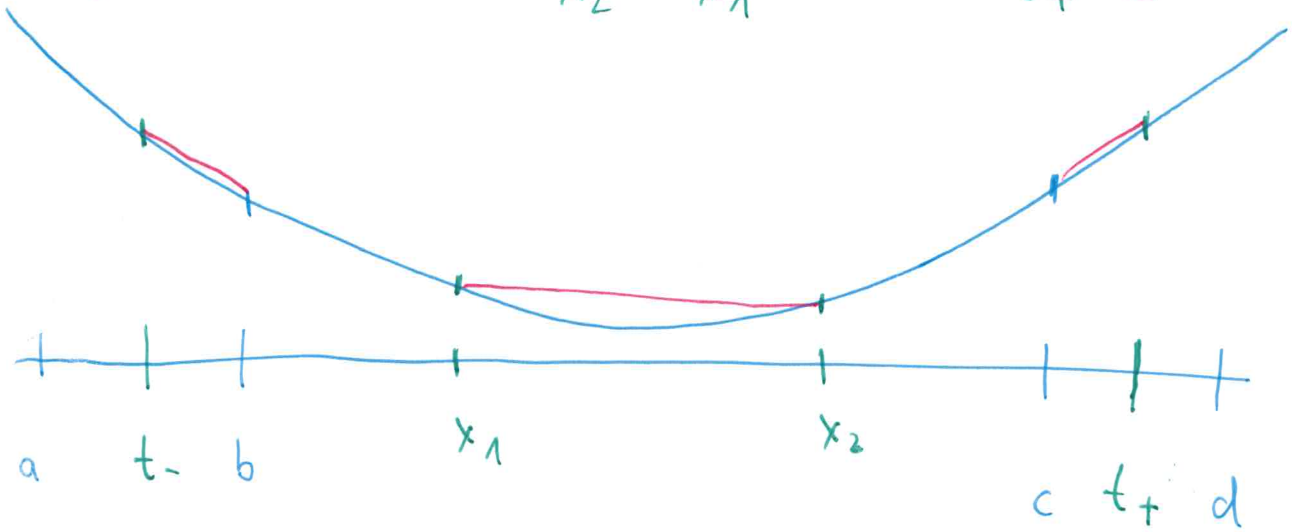
f konvex auf (a,d) $\Rightarrow$ f Lipschitz auf $[b,c$

$\Downarrow$ übg

Für alle t_-, t_+ s.d. $a < t_- < b < c < t_+ < d$

und $x_1, x_2 \in [b,c]$ gilt

$$\frac{f(b)-f(t_-)}{b-t_-} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(t_+)-f(c)}{t_+-c}$$



Wähle $L = \max\left\{ \left| \frac{f(b)-f(t_-)}{b-t_-} \right|, \left| \frac{f(t_+)-f(c)}{t_+-c} \right| \right\}$

Aus vi) folgt ein Konvexitätskriterium für diffb. Fkt.

20 12 2021

Schöne Anwendung des MWS bzw. S. $7\frac{1}{5}$

L. $10\frac{1}{2}$ Charakterisierung der exp Fkt.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ echtes Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ diffbar, $\alpha \in \mathbb{R}$ s.d.

$$f' = \alpha f \qquad \text{auf } I$$

Dann ex. eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, s.d

$$\forall x \in I : \quad f(x) = c e^{\alpha x}$$

Bw Setze $g(x) = f(x) e^{-\alpha x}$ für $x \in I$.

Dann: $\forall x \in I: g'(x) = f'(x) e^{-\alpha x} - \alpha f(x) e^{-\alpha x}$

$$\overset{\text{Ann}}{=} \alpha f(x) e^{-\alpha x} - \alpha f(x) e^{-\alpha x}$$

$$= 0$$

S. $7\frac{1}{5} \Rightarrow$ g ist konstant auf I, d.h

$\exists c \in \mathbb{R}$ mit $g = c$ auf I.

$\Rightarrow f(x) = g(x) e^{\alpha x} = c e^{\alpha x}$ auf I $\square$

20.12.21

S. 11 Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) diffbar. Dann

f konvex auf $[a,b] \Longleftrightarrow f'$ isoton auf (a,b)

Bw „$\Rightarrow$"
Seien $a < x_1 < x < x_2 < b$, so gilt $(***)$

Bilde Grenzwert $x \searrow x_1$

$$\Rightarrow \quad f'(x_1) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

Bilde Limes $x \nearrow x_2$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq f'(x_2)$$

Also $x \mapsto f'(x)$ isoton.

„$\Leftarrow$"
Seien $a \leq x_1 < x < x_2 \leq b$.

HWS $\Rightarrow \exists \ \xi_1 \in (x_1, x)$ und $\xi_2 \in (x, x_2)$

mit $$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\xi_1) \overset{f' \text{ isot.}}{\leq} f'(\xi_2) = \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \quad \square$$

d.h. $(***)$.

11 - 2

K.12 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) 2-mal diffbar. Dann

i) f konvex $\Leftrightarrow$ $f'' \geq 0$ auf (a,b)

ii) $f'' > 0$ auf (a,b) $\Rightarrow$ f streng konvex

Bw

i) f konv. auf $[a,b]$ $\overset{S.11}{\Longleftrightarrow}$ f' isot. auf (a,b)

$\overset{7.1/5}{\Longleftrightarrow}$ f'' nicht neg -"-

ii) Falls strikte Konv. verletzt ex Tripel $x_1 < x < x_2$ in $[a,b]$ so dass in $(***)$ Gleichheit gilt

MWS $\Rightarrow$ $\exists$ $\xi_1 \in (x_1, x)$, $\xi_2 (x, x_2)$ mit

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \overset{(***)}{=} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2)$$

$\Rightarrow$ f' nicht streng monoton $\Rightarrow$ f'' hat Nullstelle. □

besser mit S.16 kombinieren.

11-3

S. 13 Seien $(a,b) \subset I \subset [a,b]$, $f: I \to \mathbb{R}$ konvex, $x \in (a,b)$.

i) Ist x globales Maximum von f, so ist f konstant

ii) Ist x ein lokales Max. von f, so ist f auf einer Umgeb. von x konstant, d.h. es ex $\delta > 0$ und $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall y \in B_\delta(x): \quad f(y) = c$$

Hier schom iii) iv)

Bw vom i)

Da $x \in (a,b)$ ex. y, z mit $a < y < x < z < b$.

$$\Rightarrow f(x) = t f(x) + (1-t) f(x) \quad \text{für bel } t \in (0,1)$$

$$\overset{\text{Max}}{\geq} t f(y) + (1-t) f(z)$$

$$\overset{\text{konv.}}{\geq} f(ty + (1-t) f(z)) \qquad \exists t_0 \text{ mit } x = t_0 y + (1-t_0) z$$

$$\overset{t=t_0}{=} f(x)$$

$\Rightarrow$ überall Gleichheitsz.

$\Rightarrow f(y) = f(z) = f(x)$ sonst taucht „>“ auf.

11-4

ii) lok. Max $\Rightarrow$ $\exists\ \delta > 0$ mit

$\forall\ y \in (x-\delta, x+\delta) : f(y) \leq f(x)$

Wähle $x - \delta < y < x < z < x + \delta$ bel.

$\Rightarrow \exists\ \lambda \in (0,1)$ mit $x = \lambda y + (1-\lambda) z$

$$f(x) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x)$$

$$\overset{\text{lok. Max}}{\geq} \lambda f(y) + (1-\lambda) f(z)$$

$$\overset{\text{Konvex}}{\geq} f(x)$$

$\Rightarrow$ überall „=" $\Rightarrow$ $f(y) = f(x) = f(z)$

<u>iii)</u> $f : I \to \mathbb{R}$ <u>strikt</u> Konvex

$\Rightarrow$ f hat höchstens ein globales Minimum

<u>iv)</u> Sind $c < d,\ c, d \in I$ zwei globale Minimalstellen von f, so sind alle $y \in [c,d]$

glob — || ———————.

<u>Bw von iii)</u> Wid - Ann: Seien $c < d,\ c, d. \in I$

$\boxed{11-5}$ globale Minimals. (Für $\lambda \in (0,1)$ ist)

$$x = \underset{\frac{1}{2}}{\lambda} c + \underset{\frac{1}{2}}{(1-\lambda)} d \quad \in \quad (c,d) \subset I \quad \text{und}$$

$$f(x) = f(\qquad\qquad) \underset{\text{strikt k.}}{<} \lambda f(c) + (1-\lambda) \underbrace{f(d)}_{= f(c) \text{ Minim.}}$$

$$= f(c) = \text{Minimum auf } I \ \lightning$$

zu iv) Ann $\Rightarrow$ $f(c) = f(d) = \min f(I) =: m$

Jedes $x \in [c,d]$ hat Darstellung

$$x = \lambda c + (1-\lambda) d \quad \text{mit } \lambda \in [0,1]$$

$$\Rightarrow f(x) = f(\qquad\qquad) \le \lambda f(c) + (1-\lambda) f(d)$$

$$= \lambda m + (1-\lambda) m = m.$$

□

§ 14 (Hinreichende Kriterien für Max/Min)

Seien $a<b$, $f: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x_0) = 0$

(i) Gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\forall \; x \in (x_0 - \delta, x_0) : \; f'(x) > 0$$

$$\forall \; x \in (x_0, x_0 + \delta) : \; f'(x) < 0,$$

so hat f im x_0 lokales Maximum.

(ii) Ex. ein $\delta > 0$ mit

$$f' < 0 \quad \text{auf } (x_0 - \delta, x_0)$$

$$f' > 0 \quad \text{auf } (x_0, x_0 + \delta)$$

so ist x_0 lokale Minimalstelle von f.

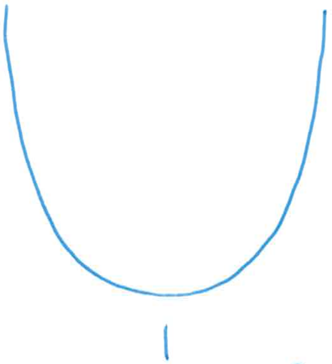
Sei i.f. sogar $f \in C^2(a,b)$

iii) $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ lok. Max-Stelle von f

iv) $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ ist lokale Min-St. von f.

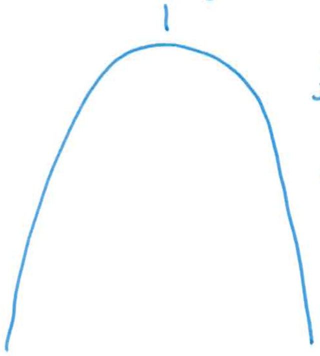
Bsp $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \longmapsto ax^2$

$a > 0$



$a < 0$

$x_0 = 0$



$f''(0) < 0$

$\Rightarrow$ Max.

$f''(0) > 0$

$\Rightarrow$ Min

$x_0 = 0$

$f'(x) = 2ax, \quad f'(0) = 0, \ f''(x) = 2a, \ f''(0) = 2a$

Bedingungen sind nicht notwendig, denn

$a = 0 \Rightarrow f = 0$ auf $\mathbb{R} \Rightarrow$ alle $x \in \mathbb{R}$ sind Minima

abwohl $f' = 0$ und $f'' = 0$ auf $\mathbb{R}$

Bw: i)

Satz $7\frac{1}{5} \Rightarrow$ f streng wachsend auf $(x_0-\delta, x_0)$

& fallend $(x_0, x_0+\delta)$

d.h. $f(x_0)$ ist kleiner als alle $f(y)$ für

$y \in (x_0-\delta, x+\delta) \setminus \{x_0\} = \dot{B}_\delta(x_0)$

ii) analog

iii) f'' stetig und $f''(x_0) < 0$

$\Rightarrow$ ex. $\delta > 0$ mit $f'' < 0$ auf $B_\delta(x_0)$

$\overset{7\,1/5}{\Rightarrow}$ f' streng antiton auf -11-

$$f'(x_0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f' > 0 & \text{auf } (x_0-\delta, x_0) \\ f' < 0 & \text{auf } (x_0, x_0+\delta) \end{cases}$$

Teil i) $\Rightarrow$ f hat lok Max im x_0

iv) analog.

D. 15 Sei $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ mit $a < b$, $x_0 \in (a,b)$

a) Ist $f \in C^1(a,b)$ und $f'(x_0) = 0$, so heißt x_0 stationärer Punkt von f.

11-8 ⌈ b) Besitzt f in x_0 keine Ableitung oder ist $f'(x_0) = 0$ so heißt x_0 kritischer Punkt von f. $\rfloor$ Stat. Pkt Spezialfall von krit. P.

c) Ist f stetig auf (a,b), so heißt x_0 Wendepunkt von f, falls

f konvex auf (a,x_0) und konkav auf (x_0,b)

oder

f konkav auf (a,x_0) und konvex auf (x_0,b)

S. 16 (Kriterien für Konkavität)

Sei I echtes Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ diffbar

(a) f konvex auf $I \Leftrightarrow f'$ isoton auf I

(b) f konkav antiton

Sei i. F. f sogar 2-mal diffb. auf I

(c) f konvex auf $I \Leftrightarrow f'' \geq 0$ auf I

(d) konkav ≤ 0

(e) $x_0 \in (a,b) \subset I$ ist Wendepunkt

$\Rightarrow f''(x_0) = 0$

Beweis von e) und f)

zu e) $x_0 \in (a,b)$ Wendepunkt von f.

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} ① & f|_{(a,x_0)} \text{ konvex} & \& & f|_{(x_0,b)} \text{ konkav} \\ ② & \quad \| \quad \text{ konkav} & \& & \quad \| \quad \text{ konvex} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} ① & f'|_{(a,x_0)} \text{ isoton} & \& & f'|_{(x_0,b)} \text{ antiton} \\ ② & \quad \| \quad \text{ antiton} & \& & \quad \| \quad \text{ isoton} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} ① & f' \text{ hat lok. Max in } x_0 \\ ② & \qquad\qquad \text{Min} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \quad f''(x_0) = 0$$

---

zu f) Sei $f'''(x_0) > 0$. $f \in C^3 \Rightarrow \exists\, \delta > 0$ mit $f'''|_{B_\delta(x_0)} > 0 \Rightarrow f''|_{B_\delta(x_0)}$ strikt isoton

$$f''(x_0) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f''|_{(x_0-\delta,\, x_0)} \text{ negativ} \overset{\text{k.12}}{\Rightarrow} \text{strikt konkav} \\ f''|_{(x_0,\, x_0+\delta)} \text{ positiv.} \Rightarrow \text{strikt konvex} \end{array} \right.$$

$\boxed{11-9\tfrac{1}{2}}$ $\Rightarrow x_0$ Wendepunkt. Analog für $f'''(x_0) < 0$.

(f) Sei $f \in C^3(a,b)$, $x_0 \in (a,b)$, $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$. Dann hat f einen Wendepkt im x_0.

20.12.2021

Bm 17 i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$

$f'(x) = n \quad x^{n-1}$

$f''(x) = n(n-1)\, x^{n-2}$ für $n \geq 2$

$f'''(x) = n(n-1)(n-2)\, x^{n-3}$, $n \geq 3$

$n=3$: $f''(0)=0$, $f'''(0) = 6 \neq 0 \Rightarrow 0$ ist Wendepkt.

$n=4$: $f''(0)=0$, $f'''(0) = 0$

0 ist kein Wendepunkt, sondern glob. Minim.

x^4 ist auf ganz $\mathbb{R}$ konvex

ii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 2a_2 x + a_1$, $f''(x) = 2a_2$

$a_2 \geq 0 \Leftrightarrow f'' \geq 0$ auf $\mathbb{R} \Leftrightarrow f$ konvex auf $\mathbb{R}$

$\leq$ $\qquad \leq$ $\qquad$ konkav

11-10

(f) Sei $f \in C^3(a,b)$, $x_0 \in (a,b)$, $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$. Dann hat f einen Wendepkt im x_0.

20.12.2021

Bsp 17 i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$

$f'(x) = n \quad x^{n-1}$

$f''(x) = n(n-1)\ x^{n-2}$ für $n \geqslant 2$

$f'''(x) = n(n-1)\ (n-2)\ x^{n-3}$, $n \geqslant 3$

$n = 3$: $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 6 \neq 0 \Rightarrow 0$ ist Wendepkt.

$n = 4$: $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 0$

0 ist kein Wendepunkt, sondern glob. Minim.

x^4 ist auf ganz $\mathbb{R}$ konvex

ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 2a_2 x + a_1$, $f''(x) = 2a_2$

$\underset{\leq}{a_2 \geqslant 0} \Leftrightarrow \underset{\leq}{f'' \geqslant 0}$ auf $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ f $\underset{\text{konkav}}{\text{konvex}}$ auf $\mathbb{R}$

iii) Potenzfunktion $p_\alpha : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \longmapsto x^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$

$p'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, $p''_\alpha(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$

$\alpha < 0 \Rightarrow p_\alpha$ strikt antiton &
|| konvex

$\alpha \in (0,1) \Rightarrow p_\alpha$ -||- isoton
& || konkav

$\alpha > 1 \Rightarrow p_\alpha$ || isoton
& konvex

$\alpha = 0 \Rightarrow p_\alpha$ konstant $\Rightarrow$ isoton & konkav & konvex
antiton

$\alpha = 1 \Rightarrow p_\alpha$ linear $\Rightarrow$ isoton & konkav & konvex

---

Bsp 18

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x(1+x^2)^{-1/2}$

$$\Rightarrow f'(x) = (1+x^2)^{-1/2} - \frac{1}{2}x(1+x^2)^{-3/2}\,2x$$

$$= \frac{1+\cancel{x^2}-\cancel{x^2}}{(1+x^2)^{3/2}} > 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}$$

11-11 $f'(0) = 1$, $x \neq 0 \Rightarrow 1+x^2 > 1$

⇒ Für $x \neq 0$ ist $f'(x) \in (0,1)$

⇒ $\sup\limits_{\mathbb{R}} |f'(x)| = 1$

übg ⇒ f ist Lipschitz-st. mit $L=1$

S. $7\frac{1}{5}$ ⇒ f ist strikt isoton auf $\mathbb{R}$

$$f''(x) = -\frac{3}{2}\left(1+x^2\right)^{-5/2} 2x = -\frac{3x}{(1+x^2)^{5/2}}$$

$$= -\operatorname{sgn} x \boxed{\frac{3|x|}{(1+x^2)^{5/2}}} \geq 0$$

$f''(0) = 0$

$f''|_{(-\infty,0)} > 0$ ⇒ f konvex auf $(-\infty,0)$

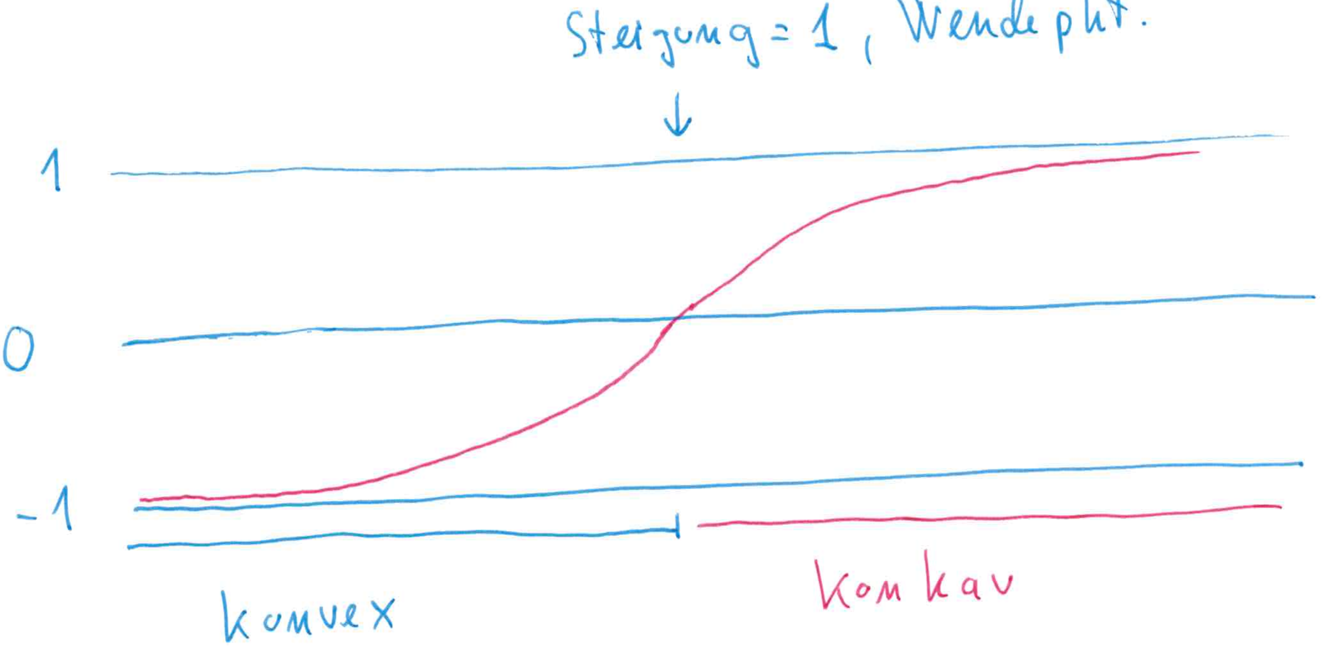
$f''|_{(0,\infty)} < 0$ ⇒ f konkav auf $(0,\infty)$

⇒ f hat in 0 Wendepunkt

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ x \to -\infty}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to \infty \\ x \to -\infty}} \left(1+x^2\right)^{-3/2} = 0$$

„Kurve wird immer flacher und ist

asymtotisch konstant! Aber strikt wachsend auf $\mathbb{R}$!



D. 19 Asymtoten

Seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $I = (a,b)$ und $f: (a,b) \to \mathbb{R}$. Wir sagen, dass der Graph von f eine

i) senkrechte / vertikale Asymptote im b besitzt, falls $b < \infty$ und

$$|f(x)| \to +\infty \text{ für } x \to b.$$

Dann heißt die Gerade $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = b\}$ senkrechte Asymtote von f.

Analog definiert für a statt b

ii) waagerechte / horizontale Asymptote $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = c\}$ besitzt, falls

$$a = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to a} f(x) = c$$

oder

$$b = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to b} f(x) = c$$

(oder beides)

iii) schiefe Asymtote $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = a_0 + a_1 x\}$ besitzt, falls

$$a = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to a} \left(f(x) - a_0 - a_1 x\right) = 0$$

oder

$$b = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to b} \left(f(x) - a_0 - a_1 x\right) = 0$$

oder beides.

Man kann $a_1 \neq 0$ verlangen, um eine horizontale Asymtote auszuschliessen, oder aber eine hor. A. als Spezialfall einer schiefen ansehen.

iv) Ist $g: I \to \mathbb{R}$ eine andere (häufig einfachere Funktion), wird sie als nicht gerade Asymtote zu der Funktion f (bzw. ihren Graphen) bezeichnet, falls

$$a = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = 0$$

oder

$$b = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to b} - \text{''} - .$$

oder beides.

Achtung: Unterscheidung zu $g \sim f$ für $x \to \infty$

z.B. $f(x) = e^x + 1$, $g(x) = e^x$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{e^x + 1}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + e^{-x}}{1} = 1 \text{ d.h.}$$

$f \sim g$. aber $\lim_{x \to \infty} (f - g)(x) = \underline{1}$

Häufig betrachtet man auch Asymtoten einer Fkt $f: I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ (oder mit mehreren fehlenden Punkten), z. B. bei rationalen Fkt.

Bsp 20 $x_0 = 1$, $I = \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$

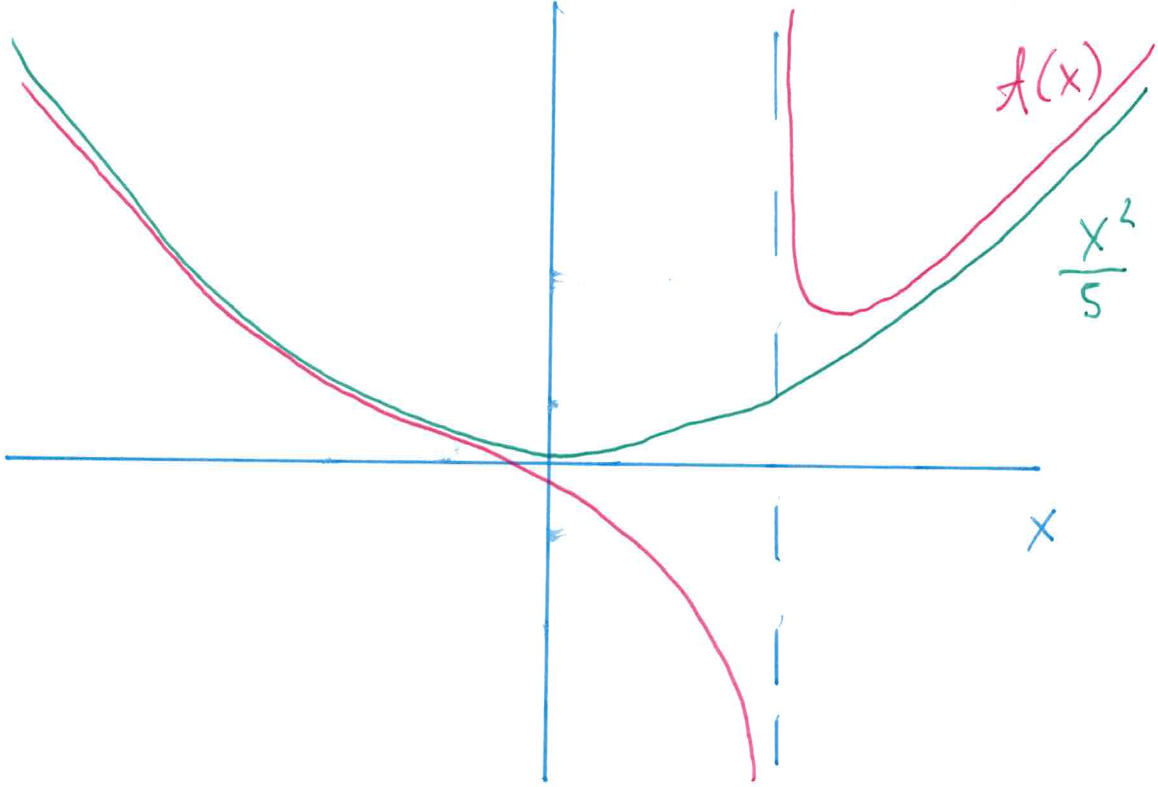
$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 5}{5x - 5} = \frac{x^3 - x^2}{5(x-1)} - \frac{1}{x-1}$$

$$= \frac{1}{5} x^2 - \frac{1}{x-1}$$

besitzt:

* vertikale Asymptote $\{(1,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ (sowohl für $x \searrow 1$ als auch für $x \nearrow 1$)

* Parabelfkt $x \longmapsto \frac{x^2}{5}$ als nicht-gerade Asymtote. Diese nennt man auch Näherungsparabel.

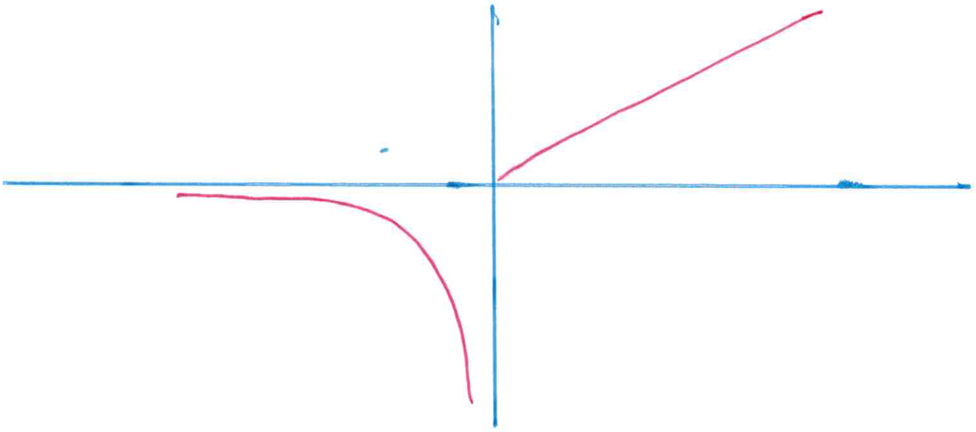


Dagegen ist für $g: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x^{\operatorname{sgn}(x)}$$

- $\{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ vertikale Asymptote

  nur für $x \nearrow 0$
- $g(x) = 0$ horizontale Asympt. auf $(-\infty, 0)$
- $g(x) = x$ schiefe Asymtote auf $(0, \infty)$



Bsp 21 $f: \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\} \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{x^3}{x^2-1}$$

$$f(-x) = \frac{-x^3}{x^2-1} = -f(x) \Rightarrow f \text{ ungerade}$$

$\Rightarrow$ reicht $f|_{[0,\infty)} : [0,1) \cup (1,\infty) \to \mathbb{R}$ zu untersuchen

$x = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

$x \neq 0 \Rightarrow f(x) \neq 0$

$f(x) \longrightarrow +\infty$ für $x \searrow 1$

$f(x) \longrightarrow -\infty$ für $x \nearrow 1$

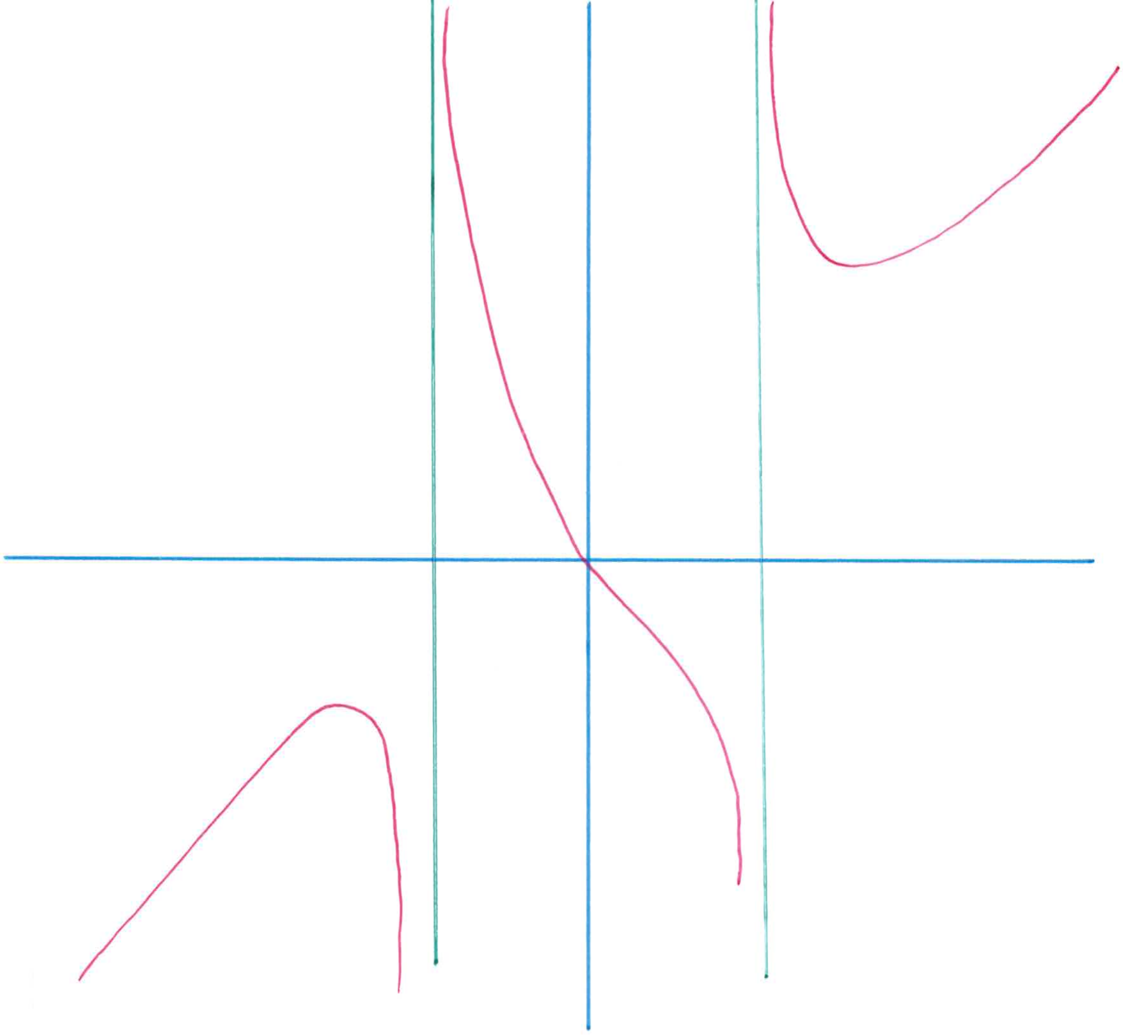
$\Rightarrow \{(\pm 1, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ senkrechte Asympt.

$$h(x) := f(x) - x = \frac{x^3}{x^2-1} - x\frac{x^2-1}{x^2-1} = \frac{x}{x^2-1}$$

$$\longrightarrow 0 \text{ für } |x| \longrightarrow \infty$$

$\Rightarrow \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ schiefe Asympt.

für $x \to \pm\infty$



Asymtaten implizieren:

auf $(1, \infty)$ hat f (mind.) ein lok. Min

$(-\infty, -1)$ Max

$$f'(x) = 3x^2 \, (x^2-1)^{-1} - x^3 \, (x^2-1)^{-2} \, 2x$$

$$= \frac{3x^2(x^2-1) - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \iff x \in \{-\sqrt{3}, 0, +\sqrt{3}\}$$

$\Rightarrow -\sqrt{3}$ kanditat für Maximalst. in $(-\infty, 0)$

muß es sein, da kein Konkurrent!

11-19

analog: $\sqrt{3}$ einziges lok. Max auf $(0,\infty)$

$x=0$ keine lok. Extremalstelle, da über f in $x=0$ das Vorz. wechselt, ist das nicht der Fall

$$f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

$$f'''(x) = -6\,\frac{x^4+6x^2+1}{(x^2-1)^4}$$

	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},\infty)$
f	negativ		pos	neg	positiv	
	isot	anti ton				isot.
	konkav		konvex	konk	konvex	

Bsp 22 (Nachtrag L'Hospital)

a) $a, b > 0$, $x \neq 0$

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a^x - b^x}{x} \Rightarrow f(0) = 0 = g(0)$$

11-20 $f'(x) = a^x \ln a - b^x \ln b \xrightarrow[x\to 0]{} \ln a - \ln b$

$$g'(x) = 1 \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ln \frac{a}{b} = \lim_{x \to 0} h(x).$$

b) $\alpha, \beta > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0$

Bw: Für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq \alpha$ und $x \geq 1$

gilt $0 < \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} \leq \frac{x^k}{e^{\beta x}}$

also reicht es die Aussage für $\alpha = k \in \mathbb{N}$ zu zeigen.

Wir wenden L'Hospital k-mal an:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^k}{e^{\beta x}} = \lim_{\infty} \boxed{\frac{k}{\beta}} \frac{x^{k-1}}{e^{\beta x}}$$

→ Intuition

$$= \frac{k(k-1)}{\beta^2} \lim_{\infty} \frac{x^{k-2}}{e^{\beta x}} = \ldots = \frac{k!}{\beta^k} \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^{\beta x}}$$

← Rechtfertig. □

$$= 0$$

←

Substitution $y = e^x$ ergibt

$$\lim_{y \to \infty} \frac{(\ln y)^\alpha}{y^\beta} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0$$

Substitution $t = 1/y$ ergibt

$$\lim_{t \searrow 0} t^{\beta} \ln t = \lim_{y \to \infty} \frac{1}{y^{\beta}} \ln \left(\frac{1}{y}\right)$$

$$= - \lim_{y \to \infty} \frac{(\ln y)}{y^{\beta}} = 0$$

13 Weitere trigonometrische Fkt

Dieses Kap. mit der früheren Diskussion der trigonometrischen Fkt zusammen fassen, z. B. indem man Alles nach dem Kapitel zur Differenzierbarkeit macht.

① $f := \sin : I := \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow f' = \cos$ ist positiv auf

$$\mathring{I} = I \setminus \{\inf I, \sup I\} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

S. 12.7 $\frac{1}{5} \Rightarrow f$ streng isoton auf I

f stetig $\Rightarrow$ $f(I) = [\min f(I), \max f(I)]$

$= [-1, 1] =: J$ Intervall

Die Umkehrfkt

$$\arcsin := f^{-1} : J \to I$$

heißt <u>Arkussinus</u> und ist ebenfalls streng isoton & diffbar auf $\mathring{I} = (-1,1)$ mit

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

wobei $y = f(x) = \sin x$

② $f := \cos : I := [0,\pi] \longrightarrow J := [-1,1]$

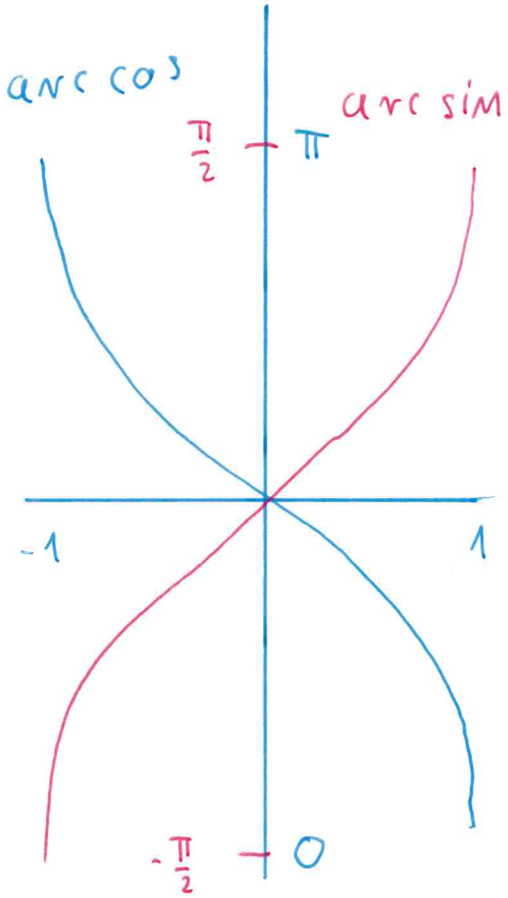
streng antiton, bijektiv, diffbar

Die Umkehrfkt

$$\arccos := f^{-1} : J \to I$$

ist auch streng antiton, stetig auf J und diffbar in allen $y \in \mathring{J} = (-1,1)$, $y = f(x) = \cos(x)$ mit

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = -\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$



③ $f := \tan : I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$

streng isoton, $f \in C^\infty(I)$

bijektiv, da

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty$$

Die Umkehrfkt

$$\arctan := f^{-1} : \mathbb{R} \to I$$

heißt Arkustangens, ist streng isoton, diffbar in allen $y = f(x) = \tan x \in \mathbb{R}$ mit

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$ da ja

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

④ Betrachte $f = \cot : (0,\pi) \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{\cos x}{\sin x}$$

Dann: * $f' : (0,\pi) \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$

* also $f' \leq -1$ insb. f strikt antiton und injektiv

* $$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sin x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \pi} f(x) = -\lim_{x \to \pi} \frac{1}{\sin x} = -\infty$$

* f stetig $\Rightarrow f((0,\pi)) = \mathbb{R}$

Also ex. die Umkehrfkt

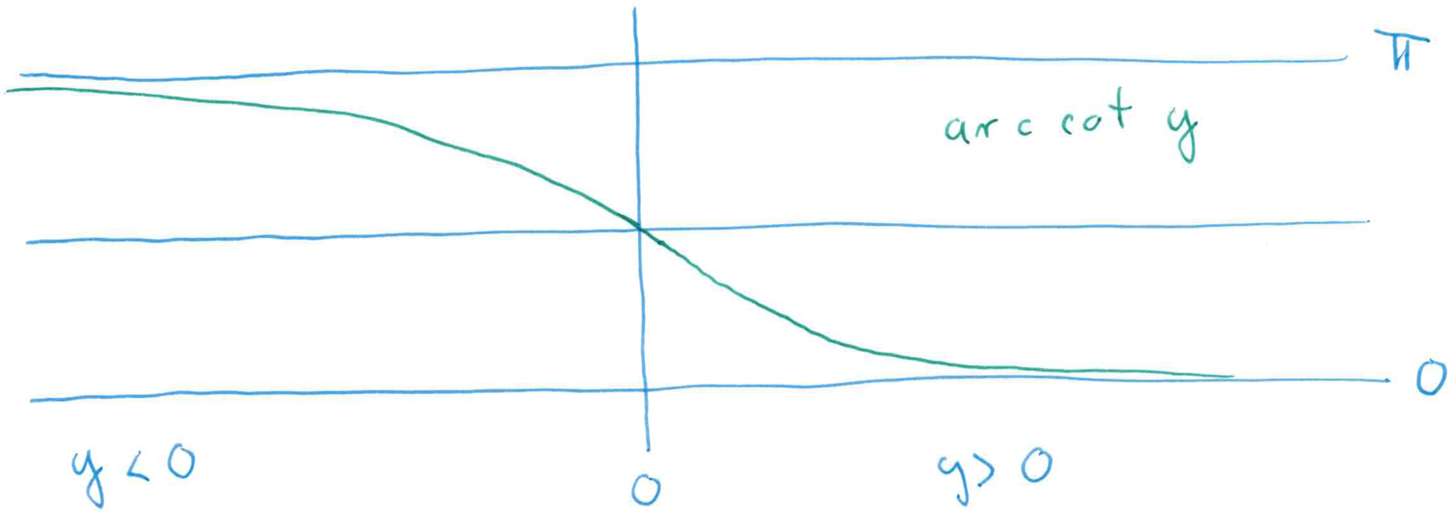
$$\operatorname{arccot} := f^{-1} : \mathbb{R} \to (0,\pi)$$

wird mit Arkuscotangens bezeichnet, ist streng antiton und diffbar mit

$\forall\, y = f(x) \in \mathbb{R} : (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{-1}{1+f^2(x)} = -\frac{1}{1+y^2}.$

Als Übg zeigt man:

$$\lim_{y\to-\infty} \operatorname{arccot}(y) = \pi \, , \quad \lim_{y\to+\infty} \operatorname{arccot}(y) = 0$$



⑤ Hyperbelfunktionen

Wir definieren die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f = \sinh : X \longmapsto \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$$

$$f = \cosh : x \longmapsto \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$

$$f = \tanh : x \longmapsto \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

sowie $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$g = \coth : x \longrightarrow \frac{1}{\tanh x} = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$$

und bez mit

Sinus hyperbolicus,

Cosinus — || —

Tangens ||

Cotangens || .

Offensichtlich ist cosh gerade und sinh, tanh, coth ungerade Fkt.

$\sinh(-x) = -\sinh x$

$\cosh(-x) = \cosh x$

Es ergeben sich, ähnlich wie bei sin, cos, tan und cot die Rechenregeln

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

Des weiteren:

$$1 = \cosh 0 \leq \cosh x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

$$0 = \sinh 0 < \sinh x < \cosh x \quad \text{für } x > 0$$

$$\sinh' = \cosh > 0 \Rightarrow \sinh \text{ strikt isot.}$$

$$\cosh' = \sinh \begin{cases} > 0 & \text{auf } (0, \infty) \\ < 0 & \text{auf } (-\infty, 0) \end{cases}$$

Für $x \to \infty$ gelten:

$$\cosh x \to \infty$$
$$\sinh x \to \infty$$
$$\tanh x \to 1$$
$$\coth x \to 1$$

Die Gleich.

$$1 = \cosh(0) = \cosh(x-x)$$
$$= \cosh^2 x - \sin^2 h\, x$$

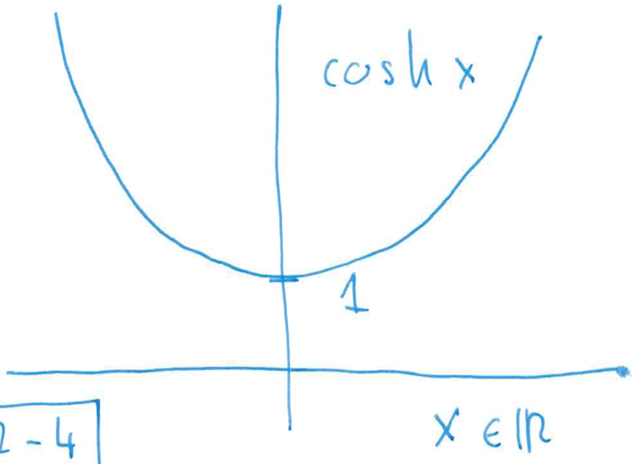
stellt eine Bez. zur Hyperbel her, denn die Abb.

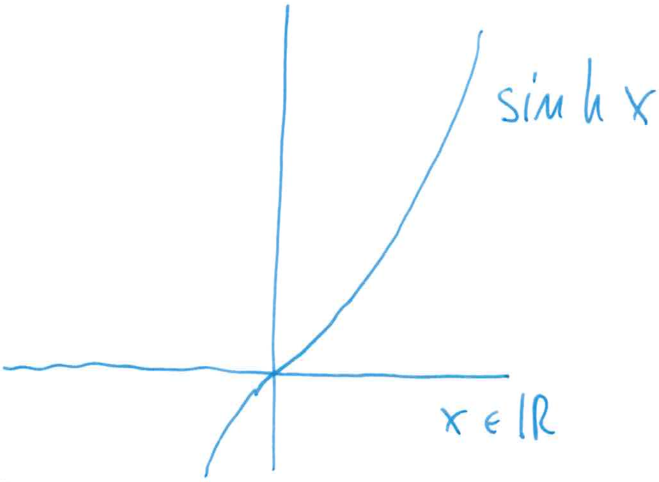
$$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto (\cosh t, \sinh t)$$

parametrisiert den Hyperbelast

$$H := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ x^2 - y^2 = 1 \}.$$

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ liegt $h(t)$ auf H.



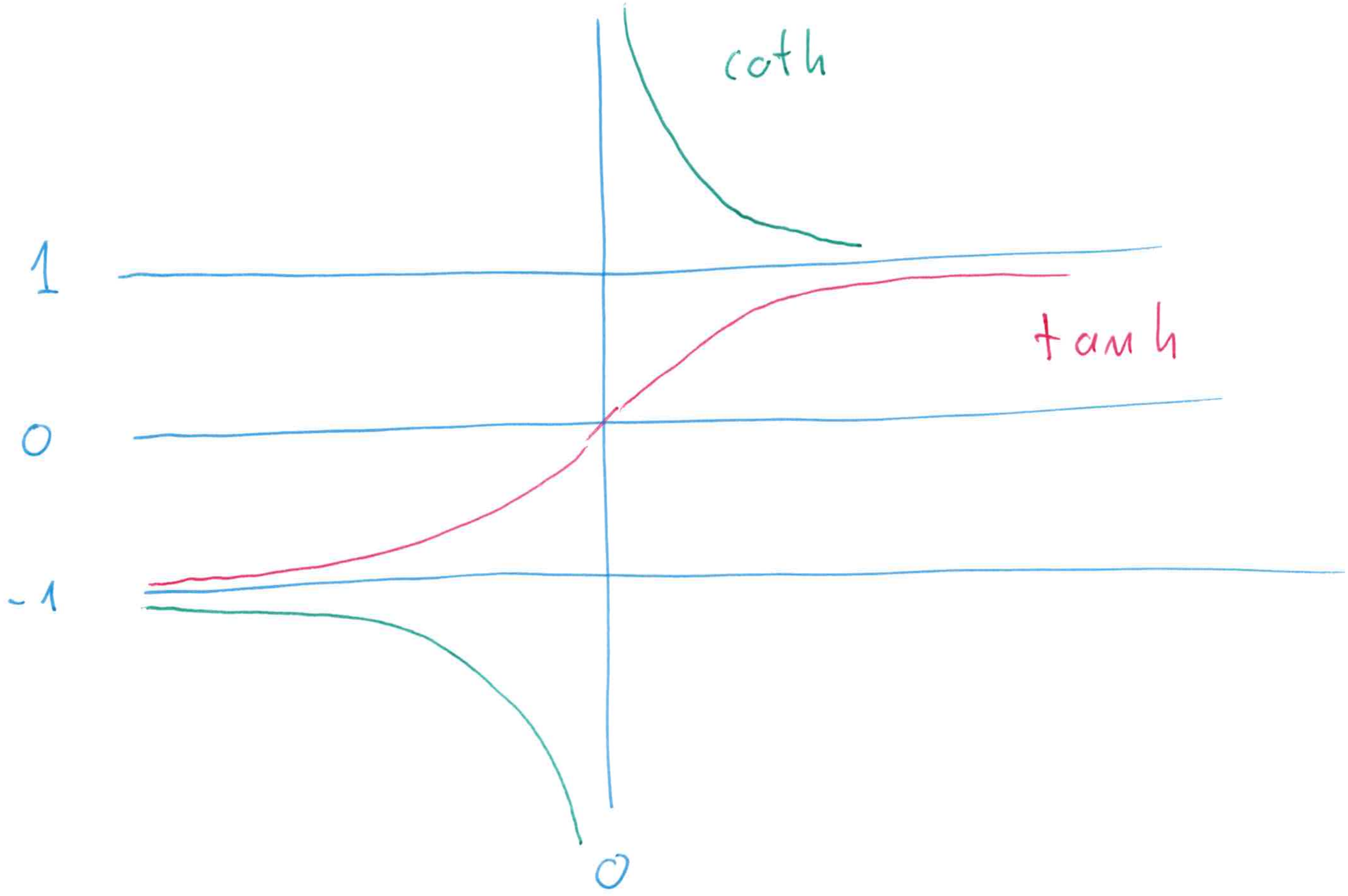


$\tanh : \mathbb{R} \longrightarrow (-1,1)$ ist ungerade, streng isoton, bijektiv

$$\tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$

$\coth\big|_{(0,\infty)} : (0, \infty) \longrightarrow (1, \infty)$ streng antiton, bijektiv.

$$\coth' x = -\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x, \; x \neq 0$$



⑥ Areafunktionen

Da $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng isoton & bij., ex. Umkehrfkt

$$\operatorname{arsinh} := (\sinh)^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \, ,$$

heißt <u>Areasinus hyperbolicus</u>.

Da $\cosh : (0, \infty) \longrightarrow (1, \infty)$ streng isoton & bij, ex. Umkehrfkt

$$\operatorname{arcosh} = (\cosh)^{-1} : (1, \infty) \to (0, \infty)$$

heißt <u>Area cosinus hyperbolicus</u>.

Analog sind

Area tangens hyperbolicus

$$\operatorname{artanh} = (\tanh)^{-1} : \; (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Area cotangens hyp.

$$\operatorname{arcoth} = (\coth)^{-1} : \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

definiert.

Aus den expl. Formeln für sinh und cosh ergeben sich die Darst.

$$\otimes \ \forall \overset{y}{\textcircled{x}} \in \mathbb{R} : \quad \operatorname{ar}\sinh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\forall x \geq 1 : \quad \operatorname{ar}\cosh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\forall x \in (-1,1) : \operatorname{ar}\tanh x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\forall |x| > 1 : \quad \operatorname{ar}\coth x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

beweisen $\otimes$

Setze $y = \sinh x$, d.h. $x = \operatorname{ar}\sinh y$

$$\Rightarrow e^x = \sinh x + \cosh x$$

$$= \sinh x + \sqrt{1 + \sinh^2 x}$$

$$= y \quad + \sqrt{1 + y^2}$$

Bilde nun Logarithmus.

Die Ableitungen der Areafkt erh. man aus obigen Darstellungen oder über die Abl. - Regeln f. Umkehrf.

$y \in \mathbb{R}$: $\quad \operatorname{ar\,sinh}' y = \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$

$y > 1$: $\quad \operatorname{ar\,cosh}' y = \dfrac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}$

$|y| < 1$: $\quad \operatorname{ar\,tanh}' y = \dfrac{1}{1-y^2}$

$|y| > 1$: $\quad \operatorname{ar\,coth}' y = \dfrac{1}{1-y^2}$

---

14 Der Begriff des Riemann-Integrals

Problem, Motivation

Sei $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ und

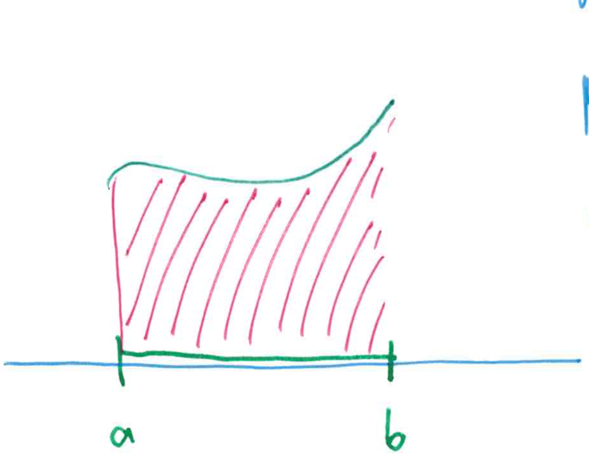
$f: I \longrightarrow [0,\infty)$ „schön", z. B. stetig.

Sei $G_f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, y = f(x) \}$

der Graph von f und

$F = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, 0 \le y \le f(x) \}$

die Menge zwischen dem Abschnitt I auf der x-Achse und dem Graphen von f:



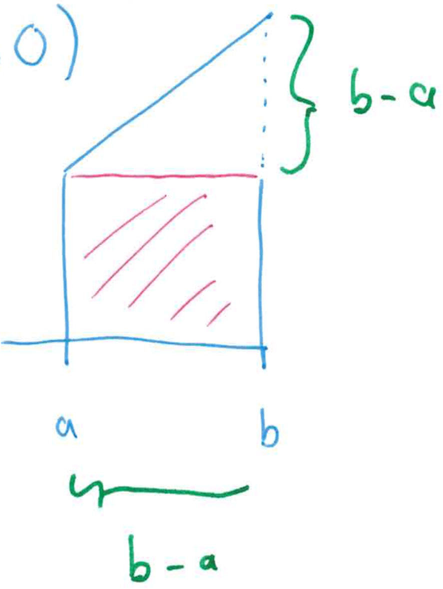
Kann man der Menge F einen Flächeninhalt zuordnen?

12-9 Wie schön muß f dazu sein? Reicht die Stetigkeits eigenschaft?

Bsp: 1 $f(x) = c$ auf I

$\Rightarrow$ F hat Fläche $vol(F) = (b-a) \cdot c$

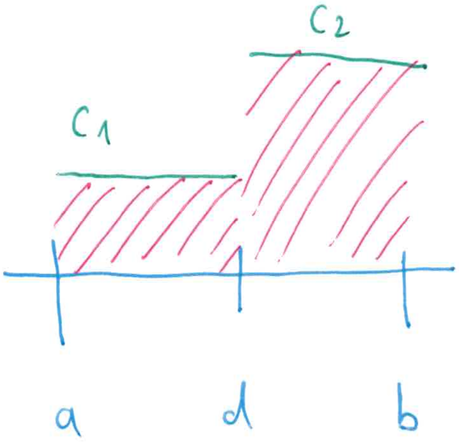
$f(x) = x$ auf I $(\Rightarrow a \geq 0)$



$$\Rightarrow \quad vol(F) = a(b-a) + \frac{1}{2}(b-a)^2$$
$$= \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

$$f(x) = \begin{cases} c_1 & \text{für } x \in [a, d] \\ c_2 & x \in (d, b] \end{cases} \qquad d \in (a,b)$$

$$\Rightarrow \quad vol(F) = c_1 \cdot (d-a) + c_2(b-d)$$



Dies motiviert:

D. 14.2 Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Eine Menge $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset [a,b] =: I$ heißt Zerlegung von I, falls

$$a = x_0 < x_1 < \dots\dots < x_n = b$$

Wir setzen

$$I_k := [x_{k-1}, x_k] \text{ für } k = 1, \dots, n$$

und $\|Z\| := \max\{x_k - x_{k-1} \mid k = 1, \dots, n\}$.

$\|Z\|$ nennen wir Feinheit(sgrad) oder -maß der Zerlegung Z. Eine weitere Zerlegung $Z' \subset I$ von I heißt feiner als Z falls $Z \subset Z'$.

D. 14.3 Sei $f: I = [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkt

Funktion und Z eine Zerlegung von I.

Für $k = 1, \dots, n$ setze:

$$m_k = m_k(f) = \inf_{x \in I_k} f(x) \quad ,$$

$$s_k = s_k(f) = \sup_{x \in I_k} f(x) \quad ,$$

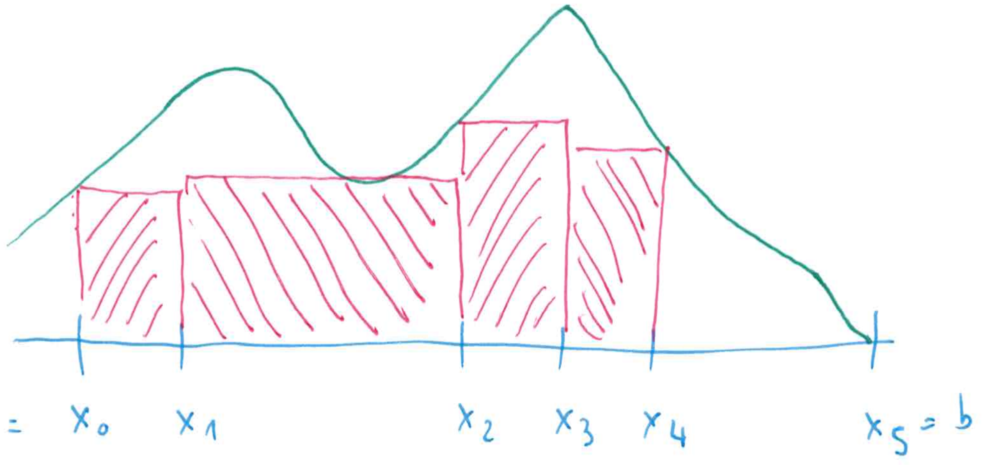
$$U_Z = U_Z(f) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) \quad ,$$

Untersumme von f über Z und

$$O_Z = O_Z(f) = \sum_{k=1}^{n} s_k (x_k - x_{k-1})$$

Obersumme von f über Z .

Illustration von $U_Z(f)$ mit $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_5\}$



Für zwei Zerlegungen $Z_{gr} \subset Z_{fn} \subset I$

gilt:

$$U_{Z_{gr}} \leq U_{Z_{fn}} \quad , \quad O_{Z_{gr}} \geq O_{Z_{fn}}$$

Daraus folgt (Übg.): für zwei bel.

Zerl. Z_1, Z_2 von I:

$$U_{Z_1}(f) \leq O_{Z_2}(f).$$

Wg. Monotonie & Beschränktheit ist wohldef:

<u>D. 14. 4</u> (Darbouxintegrale)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt.

$$\underline{I} := \underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \sup \left\{ U_Z(f) \,\middle|\, Z \text{ Zerlegung von } [a,b] \right\}$$

und

$$\overline{I} := \overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \inf \left\{ O_Z(f) \,\middle|\, Z \text{ Zerlegung von } [a,b] \right\}$$

heißen unteres bzw oberes <u>Darbouxintegral</u> oder <u>Unter-</u> bzw. <u>Oberintegral</u> von f (über $[a,b]$).

12-13

13.1.22

Im ganzen § 14 gelten die Ann:

- $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I := [a, b]$
- $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt.

D. 14.5 (Riemann - Σ)

Ist $Z = (x_0, \dots, x_n)$ eine Zerlegung von I und $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ mit $\xi_k \in I_k$ so dfn. man die Riemann-Summe von f bzgl. Zerlegung Z und Stützst $\xi = \xi(Z)$ als

$$S_{Z, \xi}(f) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1})$$

Für $f \in C$ sind O_Z, U_Z Spezialfälle

Wie passt dies mit O_Z und U_Z zusammen

L. 14.6 (Char. d. R-Intbarkeit)

Es sind äquivalent:

12-14

(i) $\underline{I}(f) := \sup\limits_{\substack{Z \subset I \\ \text{Zerl.}}} U_Z(f) = \inf\limits_{\substack{Z \subset I \\ \text{Zerl.}}} O_Z(f) =: \overline{I}(f)$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists$ Zerlegung Z von I

mit $\quad O_Z(f) - U_Z(f) < \varepsilon$

(iii) Es ex ein $I(f) \in \mathbb{R}$ mit:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ mit

$|S_{Z,f}(f) - I(f)| \leq \varepsilon$ für alle Zerleg. mit $\|Z\| \leq \delta$.

Ist eine (dann alle) Bed. erfüllt, so

gilt: $\quad I(f) = \underline{I}(f) = \overline{I}(f) \quad$ (RI)

Bw. $\quad$ (ii) $\Rightarrow$ (i)

Für alle Zerl. Z_1, Z_2 gilt ja: also auch:

$$\sup_{Z_1} U_{Z_1}(f) \leq \inf_{Z_2} O_{Z_2}(f)$$

Für kompl. Schranke

Sei nun die Zerl. Z zu $\varepsilon > 0$ gemäß (ii) gewählt und setze $Z_1 := Z_2 := Z$.

$$\Rightarrow \quad 0 \leq O_Z(f) - U_Z(f) < \varepsilon$$

Da $\varepsilon > 0$ in (ii) bel $\Rightarrow$ Eigs. (i)

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Wg (i) ex. zu jedem $\varepsilon > 0$ Zerl. $Z_1, Z_2 \subset I$,

s.d $\quad 0 \leq O_{Z_2}(f) - U_{Z_1}(f) \leq \varepsilon \quad (x)$

Da $\quad Z := Z_1 \cup Z_2 \supset Z_1$ und $Z \supset Z_2$

folgt $\quad O_Z(f) \leq O_{Z_2}(f)$

$$U_Z(f) \geq U_{Z_1}(f)$$

somit

$$O_Z(f) - U_Z(f) \overset{(x)}{\leq} \varepsilon$$

also (ii).

(i) & (ii) $\Rightarrow$ (iii) Setze: $C := \max\{|f(x)|, x \in I\}$

12-16 und $I(f) := \underline{I}(f) \overset{(i)}{=} \overline{I}(f)$

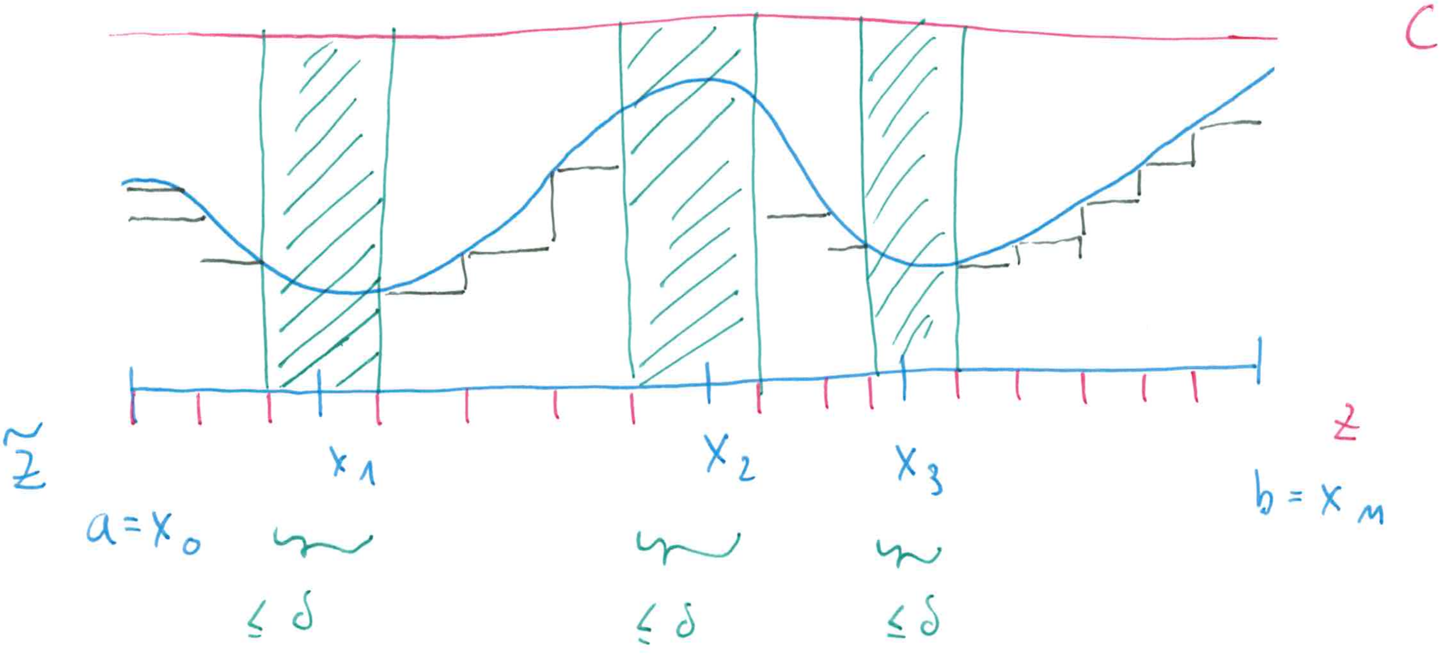
Zu $\varepsilon > 0$ existiert nach (i) & (ii) eine Zerlegung $\tilde{Z} = (x_0, \dots, x_m)$ mit

$$I(f) - \frac{\varepsilon}{2} \le U_{\tilde{Z}}(f) \underset{\text{immer}}{\le} O_{\tilde{Z}}(f) \le I(f) + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

Sei nun $Z \subset I$ eine Zerlegung mit $\|Z\| \le \delta$

Dann gilt: für bel Stützstellen ξ

$$U_{\tilde{Z}}(f) - \delta m C \le S_{Z,\xi}(f) \le O_{\tilde{Z}}(f) + \delta m C \qquad (2)$$



In den anderen Interv. sind die Summanden von $S_{Z,f}(f)$ gesandwicht zw. -lt von $U_{\tilde{Z}}$ und $O_{\tilde{Z}}$

(1) & (2) $\Rightarrow$

$$I(f) - \frac{\varepsilon}{2} - \delta n C \leq S_{Z,\xi}(f) \leq I(f) + \frac{\varepsilon}{2} + \delta n C$$

Erfüllt die Feinheit $\delta N C \leq \frac{\varepsilon}{2}$, so

$$| S_{Z,\xi}(f) - I(f)| \leq \varepsilon$$

$\Rightarrow$ (iii) (Beachte: ε geht über $N = N(\varepsilon)$ ein. kann dies aber durch Wahl $\delta \leq \frac{\varepsilon}{2NC}$ kompensieren.)

(iii) $\Rightarrow$ (ii)

Sei $\varepsilon > 0$ bel. und $\delta > 0$ gemäß (iii) gewählt. Dann gilt für jede Zerleg. mit $\|Z\| < \delta$ und bel. Stützst ξ

$$I(f) - \varepsilon \leq S_{Z,\xi}(f) \leq I(f) + \varepsilon$$

O_Z & U_Z „fast Spezialfälle" von $S_{Z,\xi}$

$$\Rightarrow \quad I(f) - 2\varepsilon \leq U_Z(f) \leq O_Z(f) \leq I(f) + 2\varepsilon$$

$\Rightarrow \quad 0 \leq O_Z(f) - U_Z(f) \leq 4\varepsilon$

$\varepsilon > 0$ bel $\Rightarrow$ Beh. $\square$

Ist $f \in C([a,b])$ so ex $\xi_k^\pm$ mit

$$f(\xi_k^+) = s_k \quad \text{und} \quad f(\xi_k^-) = m_k$$

da ja f auf jedem I_k sein Min & Max annimt. Wähle ich Stützstellen

$\xi^+ = (\xi_1^+, \dots, \xi_n^+)$ so ist

$$S_{Z,\xi^+}(f) = O_Z(f) \quad \text{und} \qquad (+)$$

analog: $S_{Z,\xi^-}(f) = U_Z(f) \qquad (-)$

Ist f nicht stetig, kann ich nur approximieren:

$$s_k = \lim_{N\to\infty} f(\xi_k^{(N),+})$$

12-19

$$m_k = \lim_{N\to\infty} f(\xi_k^{(N),-})$$

Dann gelten (+) & (-) (nur) approximativ

Für jede Zerlegung $Z = (x_0, \dots x_n)$ existieren Folgen $\xi^{(N),+}, \xi^{(N),-}, N \in \mathbb{N}$

mit

$$O_Z(f) = \lim_{N \to \infty} S_{Z, \xi^{(N),+}}(f)$$

$$U_Z(f) = \lim_{N \to \infty} S_{Z, \xi^{(N),-}}(f)$$

Bm 14.7

* Hinter (iii) verbirgt sich die Konvergenz eines Netzes. Wir schreiben dann auch

$$\lim_{\|Z\| \to 0} S_{Z, \xi}(f) = I(f)$$

für den Grenzwert. Die Konvergenz gilt dann für jede Wahl von Stützstellen $\xi = \xi(Z)$.

* Mit einer leichten Modifikation des obigen Arguments und einer entsp. Defn. des Grenzwerts läßt sich zeigen:

$$\overline{I}(f) = \lim_{\|Z\| \to 0} O_Z(f) \quad , \quad \underline{I}(f) = \lim_{\|Z\| \to 0} U_Z(f)$$

D. 14.8 (Riemann - Intb.)

Erfüllt f eine der Bed in L. 14.6 so heißt es (Riemann-) <u>integrierbar</u> und das (bestimmte) (Riemann-) <u>Integral</u> vom f über $[a,b]$ als

$$\int_a^b f \; dx := \int_a^b f(x)\,dx := I(f) = \sup_Z U_Z(f)$$

$$= \inf_Z O_Z(f) = \lim_{\|Z\| \to 0} S_{Z,\xi}(f)$$

Man setzt

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \quad \& \quad \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Die Menge der über $[a,b]$ Riemann-intb.

bez. wir mit $\mathcal{R}[a,b]$. .

Also ist $f \mapsto I(f)$ eine Abb. $I : \mathcal{R}[a,b] \to \mathbb{R}$.

Wir werden untersuchen:

(1) Was für Fkt sind R-intbar?

Insbesondere trifft dies für folg. 3 Typen und deren kombin. zu:

- Treppenfkt
- monotone Fkt
- stetige Fkt

(2) Welche Eigs. hat $I : \mathcal{R}[a,b] \to \mathbb{R}$

- Linearität
- Monotonie
- Δ-Ungl.
- Additiv bzgl. der Def-Intervalle.

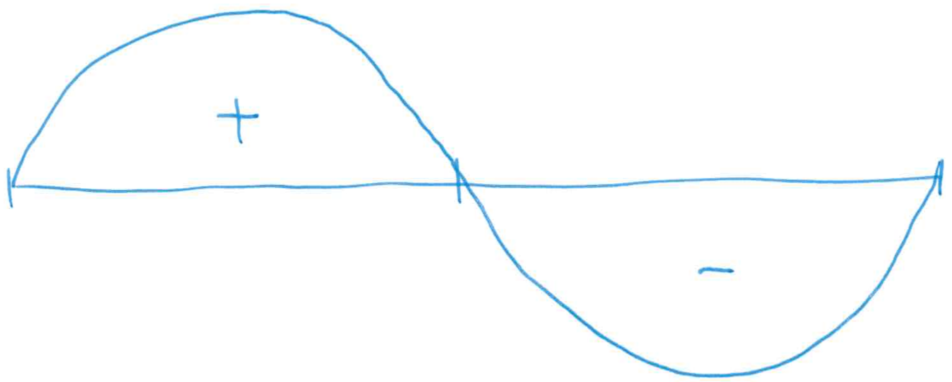
(3) Welche Methoden gibt es für ein $f \in \mathcal{R}[a,b]$ $I(f)$ auszurechnen?

Wir bemerken: Nimmt f pos. & neg. Werte an, treten in den entsp. Beitr.

12-22 in den Summen die entsp.

Vorzeichen auf.

z. B. $a = 0$, $b = 2\pi$, $f = \sin : I \to \mathbb{R}$



$$\int_0^{2\pi} \sin(x)\, dx = 0$$

D. 14. 9 (Treppenf.)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfkt, wenn eine Zerlegung $Z = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ von $[a,b]$ und $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ ex. s.d.

$$f = c_k \quad \text{auf } (x_{k-1}, x_k) = \underline{\overset{\circ}{I}_k}$$

Wg

$$\min\{c_1, \dots, c_n\} \le f(x) \le \max\{c_1, \dots, c_n\}$$

ist f beschr. In $x_0, \dots, x_n$ ist der Wert

von f nicht festgelegt und auch

irrelevant in der Integ. - Theorie.

L 14.10 (Treppenf. sind R-intb.)

Jede Treppenf wie in D. 14.9 ist Riemann-intbar und es gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} c_k \left(x_k - x_{k-1}\right)$$

Bw: Übg.

L. 14.11 (Monot. Fkt. sind R-intbar)

Jedes monotone $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist R-intbar.

Bw ŒE sei f isoton. Sei

$$Z = \left(a,\ a + \frac{b-a}{n},\ \ldots\ldots,\ a + (n-1)\frac{b-a}{n},\ b\right)$$

eine äquidist. Zerl. von $[a,b]$ der Feinheit $\frac{b-a}{n}$. Wg. Isot. gilt:

$$\sup_{x \in I_k} f(x) = f(x_k), \quad \inf_{x \in I_k} f(x) = f(x_{k-1})$$

$$\Rightarrow \quad O_Z(f) - U_Z(f) = \sum_{k=1}^{n} \left[f(x_k) - f(x_{k-1}) \right] \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{= b-a/n}$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(f(x_k) - f(x_{k-1}) \right)$$

$$= \frac{b-a}{n} \left[f(b) - f(a) \right]$$ Teleskopsumme

$\longrightarrow \quad 0$ für $n \to \infty$

L. 14.6 $\Rightarrow$ f ist R-intbar. □

<u>D. 14.12</u> (Glm. Stetigkeit)

Sei $M \subset \mathbb{R}$ bel. und $g: M \to \mathbb{R}$ eine Fkt.

g heißt <u>gleichmäßig stetig</u> (auf M), falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ex., so dass

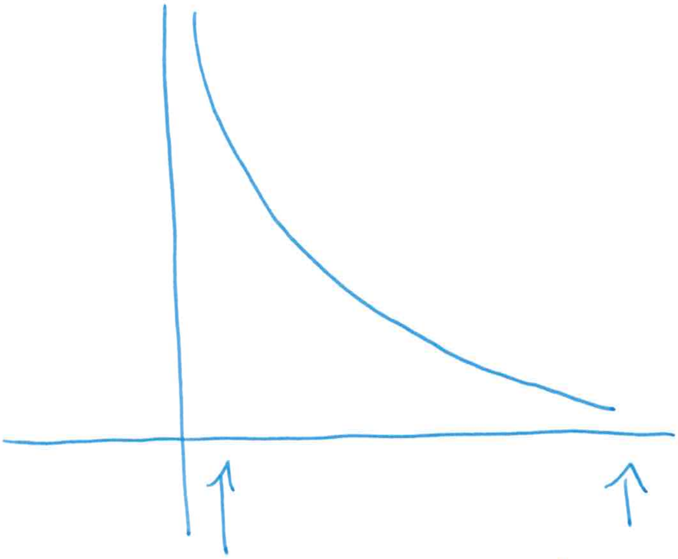
$$x, y \in M, \ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Beachte: δ hängt von ε, aber nicht von Position von x und y ab, solange

$|x-y|<\delta$. Merke: f stetig: $\delta = \delta(\varepsilon, x)$, glm. st.: $\delta = \delta(\varepsilon)$.

z. B ist $f: M = (0,1) \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{x}$

stetig, aber nicht glm. st., denn



δ sehr klein.

rel. große δ möglich

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Zu $y < x \in (0,1)$ ex. nach ZWS $\xi \in (y,x)$

mit $f(x) - f(y) = f'(\xi)\,(x-y)$
$= -\frac{1}{\xi^2}\,(x-y)$

Für $\varepsilon > |f(x) - f(y)|$ muß man also

Mo 17.1.22

Wiederholung / Erläuterung / Bm 14.12a

(i) J Intervall $g : J \to \mathbb{R}$ stetig $:\Longleftrightarrow$

$\Big[\forall x \in J$ und $\varepsilon > 0$ $\exists$ $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$

s.d. $x, y \in J$, $|x-y| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon$

Nun zus. Ann: $\forall \varepsilon > 0$ ist

$$\delta_0(\varepsilon) := \inf_{x \in J} \delta(\varepsilon, x) > 0$$

Dann folgt:

$\Big[\forall x, y \in J$, $|x-y| < \delta_0(\varepsilon) \overset{\text{Dfn.}}{\leq} \delta(\varepsilon, x)$:

$\underbrace{|g(x) - g(y)| < \varepsilon}_{\text{da stet. in } x}$

Also ist unter der Zus.-Ann. g sogar glm. stetig.

13 - 1

ii) Sei $J \subset \mathbb{R}$ Intervall, $g : J \to \mathbb{R}$.

Dann gelten Implik.

$$g \text{ erfüllt } \sup_{x \in J} |g'(x)| \leq L$$

$\Rightarrow$ g ist Lipschitz-st. mit konst L

$\Rightarrow$ g ist glm. st. mit $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{L}$

$\Rightarrow$ g ist stetig mit $\delta(\varepsilon, x) = \frac{\varepsilon}{L}$

$|x-y| < \varepsilon \xi^2 < \varepsilon x^2$ wählen.

Für $x \to 0$ muß also δ immer kleiner gewählt werden.

Mo. 17. Jan 22

L. 14. 13

Jedes $f \in C([a,b])$ ist glm. st. auf $[a,b]$.

Bw: Angenommen: falsch!

Dann ex. ein $\varepsilon > 0$ „ohne unif $\delta(\varepsilon) > 0$“

d.h. mit Erg:

$\forall n \in \mathbb{N}$ ex Punkte $x_n, y_n \in [a,b]$ s.d.

$$|x_n - y_n| < \boxed{\frac{1}{n}} \quad \text{aber } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$$

erfolgloser Kandidat für δ

BW: Ex konv. Teilfolge (x_{n_k})

ex. Limes $x = \lim_{k \to \infty} x_{n_k} \in [a,b]$

$$|y_{n_k} - x_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \Rightarrow \lim_{k \to \infty} y_{n_k} = x$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon \leq | f(x_{n_k}) - f(x) + f(x) - f(y_{n_k}) |$$

$$\leq |f(x_{n_k}) - f(x)| + |f(x) - f(y_{n_k})|$$

$$\longrightarrow \quad 0 + 0 \quad \text{für } k \to \infty .$$

$\lightning$ $\square$

L. 14.14 ($C[a,b] \subset \mathcal{R}[a,b]$)

Sei $f : [a,b]$ stetig, dann ist es R-intb.

Bw

[$f \in C([a,b]) \Rightarrow f$ glm. st. auf $[a,b]$

es ex $\forall \varepsilon > 0$

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Sei $\varepsilon > 0$ geg.

Ziel: Finde Zerl. Z mit $O_Z(f) - U_Z(f) < \varepsilon$

glm. st. $\Rightarrow \exists \delta > 0$ s.d.

$x,y \in I$ $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ (*)

Für bel. Zerl. Z mit $\|Z\| < \delta$ gilt:

$$O_Z(f) - U_Z(f) = \sum_{k=1}^{M} \Big[\underbrace{\sup_{x_{k-1}<x<x_k} f(x) - \inf_{x_{k-1}<x<x_k} f(x)}_{\leq \frac{\varepsilon}{b-a} \text{ wg } (*)} \Big](x_k - x_{k-1})$$

$$< \frac{\varepsilon}{b-a} \underbrace{\sum_{k=1}^{M} (x_k - x_{k-1})}_{= x_M - x_0}$$

$$= \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon \qquad \square$$

S. 14.15 (Eigensch. von $f \Rightarrow \int f$)

(1) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ gilt $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}[a,b]$ und

$$\int_a^b [\alpha f + \beta g]\, dx = \alpha \int_a^b f\, dx + \beta \int_a^b g\, dx$$

(2) Sind $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < b < c$ so gelten:

(i) Ist $f \in \mathcal{R}[a,c]$ so sind

$f|_{[a,b]} \in \mathcal{R}[a,b]$ und $f|_{[b,c]} \in \mathcal{R}[b,c]$

und

$$\int_a^c f\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_b^c f\,dx$$

(ii) Sind $g \in \mathcal{R}[a,b]$ und $h \in \mathcal{R}[b,c]$,

so ist

$$f:[a,c] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{für } x \in [a,b] \\ 0 & x = b \\ h(x) & x \in (b,c] \end{cases}$$

R-intbar und es gilt:

$$\int_a^c f\,dx = \int_a^b g\,dx + \int_b^c h\,dx$$

(3) Sind $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ mit $f \leq g$ auf $[a,b]$ so

$$\int_a^b f\,dx \leq \int_a^b g\,dx$$

$\frac{13}{6}$ Gilt zusätzlich $f(x_0) < g(x_0)$ für ein $x_0 \in [a,b]$ und sind f & g stetig in x_0,

so gilt sogar
$$\int_a^b f\,dx < \int_a^b g\,dx$$

(4) Ist $f \in R\,[a,b]$ und

$$m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x) \quad , \quad S = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$$

so

$$m\,(b-a) \leq \int_a^b f\,dx \leq S\,(b-a)$$

(5) Ist $f, g \in R\,[a,b]$, so auch $|f|$, $\min\{f, g\}$, $\max\{f,g\} \in R\,[a,b]$ und

$$\left|\int_a^b f\,dx\right| \leq \int_a^b |f|\,dx$$

$$\max\left\{\int_a^b f\,dx, \int_a^b g\,dx\right\} \leq \int_a^b \max\{f,g\}\,dx$$

min $\geq$ min

wobei: $\min\{f,g\}(x) = \min\{f(x), g(x)\}$

(6) Für $f \in C[a,b]$ gilt:

$$\int_a^b |f(x)| \, dx = 0 \iff f = 0 \text{ auf } [a,b]$$

Beweistipps

(1) Linearität:

$$S_{Z,\xi}(f+g) = \sum_{k=1}^{M} (f+g)(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{M} \left(f(\xi_k) + g(\xi_k)\right)(x_k - x_{k-1})$$

$$= S_{Z,\xi}(f) + S_{Z,\xi}(g)$$

Verfeinere! $\|Z\| \longrightarrow 0$

(2) Additivität bzg. Intervallen.

Sei Z_1 Zerl. von $[a,b]$

Z_2 $[b,c]$

$\Rightarrow Z := Z_1 \cup Z_2$ $[a,c]$

13 - 8

$$\Rightarrow \quad S_{Z,\xi}(f) = S_{Z_1,\xi_1}(f) + S_{Z_2,\xi_2}(f)$$

wobei $\xi_1 = \xi \cap Z_1$

$\xi_2 = \xi \cap Z_2$

Schicke $\|Z\| \longrightarrow 0$

(3) Monotonie

Sei $f \geqslant 0$ auf $[a,b]$

$\Rightarrow \quad U_Z(f) \geqslant 0$ für jede Zerl. $Z \subset [a,b]$

$\Rightarrow \sup\limits_{Z}$ — || —

Ist $2\delta := f(x_0) > 0$ und f st. im x_0, so

$\exists \; \varepsilon > 0$ mit $f\big|_{B_\varepsilon(x_0)} \geqslant \delta$

$$\Rightarrow \int_a^b f\,dx \overset{(2)}{\geqslant} \underbrace{\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}}_{\cap [a,b]} f\,dx \geqslant \delta \cdot \cancel{2}\varepsilon > 0$$

(4) Vgl. mit konst. Fkt: klar.

(5) Δ-Ungl.

$$\left|\int f\,dx\right| = \pm\int f\,dx = \int \underbrace{\pm f}_{\le |f|}\,dx$$

$$\le \int |f|\,dx$$

(6) Kriterium für Null-Funktion

„$\Leftarrow$" klar

„$\Rightarrow$" Falls f nicht ident. Null, so

ex $x_0 \in [a,b]$ mit $2\delta = |f(x_0)| > 0$

$$\overset{\text{s.O.}}{\Rightarrow} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} |f(x)|\,dx > \delta\cdot\varepsilon > 0$$

$\Rightarrow$ ↯.

Bm: 16 Es folgt

* $\mathcal{R}[a,b]$ ist ein (unendl.-dim) V-Raum.

$I : \mathcal{R}[a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\ f \longmapsto I(f)$ ist linear

* $C[a,b] \subset \mathcal{R}[a,b]$

* Auf $C[a,b]$ ist die Abb
dem Vektorraum

$$f \longmapsto \int |f(x)|\,dx \quad \text{eine Norm.}$$

Bsp. 14.17

übg.

a) Dirichlet fkt $f = D : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Z c $[0,1]$ Zerlegung

$$\Rightarrow \quad U_Z(f) = 0 \neq O_Z(f) = 1$$

Auch sup & inf helfen nicht.

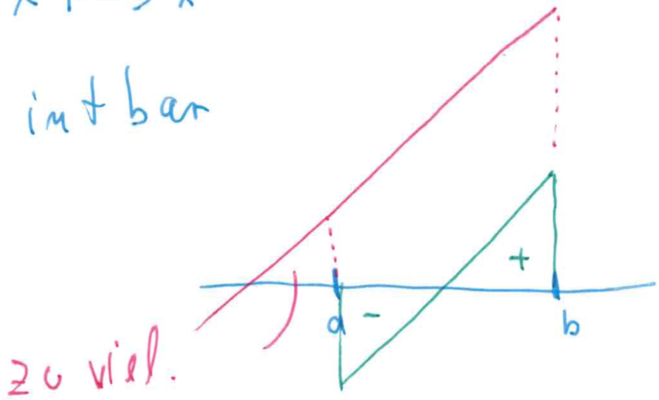
$\Rightarrow$ nicht R-intbar

Differenz 2 Dreiecke.

b) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto x$

$\Rightarrow$ f stet. $\Longrightarrow$ R intbar

Intuition



Berechne mit Riemann $-\Sigma$

$$\int_a^b f\,dx = \lim_{\|Z\| \to 0} S_{Z,\xi}(f)$$

Wähle $Z^{(n)} = \left(a, a+\frac{b-a}{n}, \dots, a+\frac{n-1}{n}(b-a), b\right)$

$$\xi^{(n)} = \left(a+\frac{b-a}{n}, \dots\dots, b\right)$$

$$\Rightarrow S_{Z^{(n)},\xi^{(n)}}(f) = \sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\boxed{\frac{b-a}{n}}$$

$$= \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{b-a}{n}\, n\cdot a}_{} + \underbrace{\frac{b-a}{n}\,\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} k}_{}$$

$$= (b-a)\,a + \frac{(b-a)^2}{n^{\cancel{2}}}\,\frac{\cancel{n}(n+1)}{2}$$

$$= ba-a^2 + \frac{b^2-2ab+a^2}{2}\boxed{\frac{n+1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty}$$

$\longrightarrow 1$

$\boxed{13-12}$ $= \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$

Vorlesung 25 20 Januar 2022

allgem. Definieren

Def. 14.16 (Stammfkt.) $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$. $F: I \to \mathbb{R}$ heißt **Stammfunktion** falls F diff'bar und $F' = f$. auf I

F Stammf $\Rightarrow$ $F + c$ auch, F, G Stammf $\Rightarrow$ $F - G = \text{const.}$

- welche Fkt. besitzen eine Stammfkt.?
- Stammfkt. nicht eindeutig
- Methoden zur Best. von Stammfkt.?

Satz 14.17. Sei $f \in \mathcal{R}([a,b])$ und sei $m = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$, $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$. Dann gibt es $\mu \in [m, M]$ mit

$$m(b-a) \le \int_a^b f \, dx = \mu (b-a) \le S (b-a)$$

Beweis Folgt aus Satz 14.15 (4).

Satz 14.18 (Mittelwertsätze). Seien $f, g \in C([a,b])$, $g > 0$. Dann:

(i) gibt es $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f \, dx = f(\xi)(b-a)$$

(ii) gibt es $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f \cdot g \, dx = f(\xi) \int_a^b g \, dx$$

Beweis (i) folgt aus (ii) mit $g \equiv 1$.

Zu (ii): Da g stetig und >0 ist

$$\int_a^b g \, dx > 0.$$ nach Satz 14.15

Setze $m = \inf f$, $M = \sup f$, so gilt

$$\int_a^b m \cdot g \, dx \leq \int_a^b f \cdot g \, dx \leq \int_a^b M \cdot g \, dx$$

$$\Leftrightarrow m \leq \underbrace{\int_a^b f \cdot g \, dx \Big/ \int_a^b g \, dx}_{D} \leq M$$

Nach dem ZWS für stetige Fkt. gibt es also ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = D$. $\square$

Satz 14.19 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $a, b \in I$, $f \in C(I)$.

(i) Sei $F_a(x) = \int_a^x f\,dt$, $x \in I$. Dann ist F_a eine Stammfkt. von f.

(ii) Ist F (irgendeine) Stammfkt. von f, so gilt

$$(*) \quad \int_a^b f\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

Beweis (a) Mit Satz 14.18 gilt

$$(**) \quad F_a(x+h) - F_a(x) = \int_a^{x+h} f\,dt - \int_a^x f\,dt$$

$$\overset{S.14.15}{=} \int_x^{x+h} f\,dt \overset{S.14.18}{=} f(J_h) \cdot h, \quad J_h \in [x, x+h]$$

$$F'(x) \overset{!}{=} \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{F(x+h)-F(x)}{h}}_{\text{existiert}} = \lim_{h \to 0} f(J_h) = \lim_{J_h \to x} f(J_h) = f(x)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{F(x+h)-F(x)}{h}}_{\xrightarrow[h \to 0]{} F'(x)} = \underbrace{f(J_h)}_{\xrightarrow[h \to 0]{} f(x)} \quad (\text{warum?})$$

(b) wegen (a) (und MWS der Differentialrech.)

$$F' = f = F_a'$$

$$\Rightarrow (F - F_a)' = 0 \qquad F(x) = \int_a^x f\,dt + C$$

$$\Rightarrow F(a) = C \quad ~~und~~ \text{ also}$$

$$\Rightarrow F - F_a = C$$

③

$$\int_a^x f\,dt = F(x) - F(a)$$

Mit $x=b$ folgt Bch. $\square$

Stetigkeit von f ist für die Darstellung nicht notw.

<u>Satz 14.20</u> Sei $f \in \mathcal{R}([a,b])$ und F eine Stammfkt. von f auf $[a,b]$. Dann gilt

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f\,dt$$

<u>Beweis</u>. Sei $\varepsilon > 0 \overset{\text{Lem 14.6}}{\Rightarrow} \exists\, Z = (\overset{a}{\overset{\shortparallel}{x_0}}, x_1, \ldots, \overset{b}{\overset{\shortparallel}{x_n}})$ Zerlegung von $[a,b]$ mit

$$\left| \int_a^b f\,dt - S_{Z,\xi}(f) \right| < \varepsilon$$

Schreibe

$$F(b) - F(a) = \sum_{h=1}^{n} \underbrace{(F(x_h) - F(x_{h-1}))}$$

galt ohne Stetigkeit! $\to (**)$

$$= f(J_k)(x_h - x_{k-1})$$

$\uparrow$ Stützstellen

Satz 14.18 benutzt Stetigkeit.

Wir benutzen hier MWS der Diff-Rechn. für F, dass Diffbar ist und $F' = f$

$$= S_{Z,\xi}(f)$$

$\xi = (f(J_k))_k$

Da $\varepsilon > 0$ bel. war, folgt Beh. $\square$

Zuerst best. Integrale dann unbest. Disk!

Def. 14.21 Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine Fkt. die eine Stammfkt. besitzt. Dann wird mit

$$\int f(x)\,dx = \int f\,dx$$

ein beliebiges Element der Menge aller Stammfkt. bez. und heißt unbestimmtes Integral von f über I.

Bsp. 14.22 (Grundintegrale) (stets $x \in \mathbb{R}$ außer eingeschränkt.)

- $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$ $\quad (\alpha \neq -1,\ x \in (0,\infty))$
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C$ $\quad (x \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$
- $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ und $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
- $\int e^x\,dx = e^x + C$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$ $\quad (x \neq (k+\frac{1}{2})\pi)$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$ $\quad (x \neq k\pi)$
- $\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$ und $\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$, $x \in (-1,1)$
- $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$

- $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \operatorname{arsinh} x + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arcosh} x + c, \quad (x>1).$

Beispiel 14.23.

(i) $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \int_0^4 x^{1/2}\,dx$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1}\Big|_0^4 = \frac{2}{3} x^{3/2}\Big|_0^4 = \frac{2}{3}\cdot 4^{3/2} = \frac{14}{3}$$

(ii) $\int_0^{\textcircled{3}} e^{2x+3}\,dx = \frac{1}{2} e^{2x+3}\Big|_0^{\textcircled{4}} = \frac{1}{2}(e^{2\cdot 4+3}-1)$

(iii) $\int_0^1 xe^x\,dx = x\cdot e^x - e^x\Big|_0^1 = e^x(x-1)\Big|_0^1$

$$= 0 - e^0(-1) = 1.$$

(ii) und (iii) zeigen, wie man auch Produkt- bzw. Verkettungen integrieren kann. Für komplexe Fkt. schwer (besonders im Kopf). Dazu jetzt Regeln (Umkehrung Produkt- bzw. Kettenregel)

für unbest. Integral analog.

Satz 14.24. (Partielle Integration).

Seien $f, g \in C^1([a,b])$. Dann

$$\int_a^b f'g\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b fg'\,dx$$

Beweis $(fg)' = f'g + fg'$, also ist fg eine Stammfkt von $f'g + fg'$ auf $[a,b]$. Mit dem HDI (Satz 14.19 (b)) folgt Beh. □

Beispielklassen wie im Königsberger

Bsp. 14.25.

(i) $\int_0^1 e^x \cdot x \, dx = e^x \cdot x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x \cdot 1 \, dx$

$$= e^x \cdot x \Big|_0^1 - e^x \Big|_0^1$$

$$= e^x (x-1) \Big|_0^1 = 1$$

(ii) $\int x^2 e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} \cdot x^2 - \int \frac{1}{3} e^{3x} 2x \, dx$

$$= \frac{1}{3} e^{3x} x^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} e^{3x} \cdot x - \int \frac{1}{3} e^{3x} dx \right)$$

$$= \frac{1}{3} e^{3x} x^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} \right)$$

$$= \dots$$

(iii) $\int \log x \, dx = \int 1 \cdot \log x \, dx$

$$= x \cdot \log x - \underline{\int x \cdot \frac{1}{x} dx} = x \log x \underline{\ - x}.$$

Notation erklären.

Satz 14.26. (Substitution) Sei $\varphi \in C^1([a,b])$ und sei $f \in C(\varphi([a,b]))$.

Dann:
$$\int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt.$$

Beweis. Sei F Stammfkt. von f auf I (exist. nach Satz 14.19(a)) und sei $\Phi(x) = (F\circ\varphi)(x)$.

$$\Rightarrow \Phi'(x) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$
$$= f(\varphi(x))\,\varphi'(x),$$

also ist Φ eine Stammfkt. von $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ auf $[a,b]$.

Mit HDI folgt

$$\int_a^b f\circ\varphi\,\varphi'\,dx \overset{\text{HDI}}{=} \Phi(b) - \Phi(a)$$
$$= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \overset{\text{HDI}}{=} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f\,dt \quad \square$$

Bemerkung 14.27 (Anwendungen Substitution)

Es gibt zwei Vers. der Anwendung von Satz 14.26:

abh. davon was einfach ist

1. Version: Bev. $\int f \circ \varphi \, \varphi' \, dx$

$\leadsto$ Best. Stammfkt. F von f und $\int f \circ \varphi \, \varphi' \, dt = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$!

2. Version: Bev $\int f \, dx$

$\leadsto$ Best. Stammfkt. Φ von $(f \circ \varphi)\varphi'$,

dann $\int_a^b f = \Phi(\varphi^{-1}(b)) - \Phi(\varphi^{-1}(a))$

Beispiel 14.28.

(a) $\int_a^b x^2 e^{x^3+1} \, dx = \int_a^b \varphi'(x) \, e^{\varphi(x)} \, dx$

mit $\varphi(x) = x^3+1 \leadsto$ 1. Version, also

da $f = F = \exp$:

$$= \exp(\varphi(b)) - \exp(\varphi(a))$$

$$= e^{b^3+1} - e^{a^3+1}.$$

(b) $\int x \sqrt{(1+x^2)^3}\, dx$ $\left(\begin{array}{l} t = 1+x^2 \\ \frac{dt}{dx} = 2x \\ dx = \frac{dt}{2x} \end{array} \right)$

$= \frac{1}{2} \int f'(x) \sqrt{f(x)^3}\, dx$,

$f(x) = 1+x^2$ → Version 1.

→ Stammfkt. von $f(x) = \sqrt{x^3} = x^{3/2}$
ist
$F(x) = \frac{2}{5} x^{5/2}$

also

$= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} (f(x))^{\frac{5}{2}} \right)$

$= \frac{1}{5} (1+x^2)^{5/2} = \frac{1}{5} \sqrt{(1+x^2)^2}$.

ENDE

(c) $\int \sqrt{1-x^2}\, dx \overset{!}{=} \int \sqrt{1-f(t)^2} \cdot f'(t)\, dt$ $x \in [-1,1]$

Dafür muss $[-1,1] = f([a,b])$
gelten; die Fkt.

$t \mapsto \sqrt{1-f(t)^2}\; f'(t)$

sollte einfacher zu integr. sein (Version 2)
als $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$.

24. Januar 2022

Lem 14.29 Sei $f \in \mathcal{R}[a,b]$ und

$F: [a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dx$.

a) F ist Lipschitz-stetig mit Konstante $L = \sup_{a \le x \le b} |f(x)| =: \|f\|_\infty$

b) Ist f stetig in $x_0 \in [a,b]$, so ist F differenzierbar in x_0 und $F'(x_0) = f(x_0)$.

Bw: a) Jedes $f \in \mathcal{R}[a,b]$ ist beschr., also $\|f\|_\infty < \infty$.

Seien nun $x < y$ aus $[a,b]$ belieb., dann

$$m(y-x) \le F(y) - F(x) = \int_x^y f\,dt \le S(y-x)$$

nach S. 14.20 nach S. 14.15 (4)

$$-L(y-x) \le \quad \dots \quad \le L(y-x)$$

Damit ist Lipschitz-St. gezeigt

b) Ohne Beweis $\square$

Bm 14.30 Sei $J \subset \mathbb{R}$ bel. Interv. und $g: J \to \mathbb{R}$. Gilt

g ist monoton oder

g ist Lipschitz-stetig:

so folgt:

Es ex. abzählbare Menge $Q \subset J$, s.d.

$\forall x \in J \setminus Q$ ist g in x differenzierb.

Bem 31

(i) Bestimmtes Integral: über $[a,b]$

Ist eine lineare Abbildung

$$I : R[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longmapsto I(f) = \int_a^b f\,dx$$

Bildet also eine Fkt f auf eine Zahl $I(f) \in \mathbb{R}$ ab

(ii) Bildung einer Stammfunktion:

Die Zuordnung $R[a,b] \to C[a,b]$

$$f \longmapsto \left(x \mapsto F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt \right)$$

Ist eine lineare Abb, die einer Fkt $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine andere Fkt $F_a : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ zuordnet.

14-3

(iii) Auf $C[a,b]$ führe eine Äquivalenzrelation $F \sim G :\iff$ $(F-G)$ ist konst. Fkt auf $[a,b]$ ein.

Sei nun $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfkt von $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ (d.h. F ist diffb. auf $[a,b]$ und $F' = f$ auf $[a,b]$). Sei $G \in C[a,b]$. Dann gilt

G ist ebenfalls Stammfkt von f

$\iff$ $G \sim F$

(iv) Unbestimmtes Integral

Sei $f \in \mathcal{R}[a,b]$ eine Fkt, die eine Stammfunktion besitzt. Dann schreiben

wir $\int f \, dx = \int f(x) dx$

für einen bel. Repräsentanten der

Äquivalenzklasse der Stammfkt von f.

Bsp 14.32 Beispielklassen zur part. Int.

$$\left[\ f,g \in C^1[a,b] \Rightarrow \int_a^b f'g = fg\Big|_a^b - \int_a^b fg'\ \right]$$

(A) Sei $f(x) = x$, d.h. $f'(x) \equiv 1$, dann folgt:

$$\int_a^b g\,dx = \int_a^b 1 \cdot g\,dx = x\,g(x)\Big|_a^b - \int_a^b x\,g'(x) \cdot dx$$

Hier (B)

(C) Sei $\boxed{\alpha \neq -1}$, $f'(x) = x^\alpha$ und $g(x) = \ln x$ auf $(0,\infty)$

$$\Rightarrow \int x^\alpha \ln x\,dx = \underbrace{\frac{1}{\boxed{\alpha+1}}\,x^{\alpha+1}}_{= f(x)} \ln x - \frac{1}{\alpha+1}\int x^{\alpha+1-1}\,dx$$

$$= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(\ln x - \frac{1}{\alpha+1}\right)$$ da ja $\ln' x = x^{-1}$

Spezialfälle:

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Re} I_n = \int x^n \, e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx$$

Analog

$$\operatorname{Im} I_n = \int \operatorname{Im} \left(x^n \, e^{c x} \right) dx$$

$$= \int x^n \, e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx$$

$\boxed{(B)}$ Integranden der Form $\sqrt{\underbrace{\pm 1 \pm x^2}_{\geqslant 0}}$.

$$\int 1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{1-x^2} + \arcsin x \right)$$

auf $[-1,1]$

$$\int \sqrt{1+x^2} \, dx = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{1+x^2} + \operatorname{ar} \sinh x \right)$$

$$\int \sqrt{x^2-1} \, dx = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{x^2-1} - \operatorname{ar} \cosh x \right)$$

auf $[1, \infty)$

Wie bei (A) setze $f(x) = x \Longrightarrow f'(x) = 1$

$$\int 1 \sqrt{1-x^2} \, dx = x \sqrt{1-x^2} - \underbrace{\int x \, \frac{1}{2} \, \frac{(-2x)}{\sqrt{1-x^2}} \, dx}_{}$$

$$\sqcup = \int \frac{-1 + 1 - x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$= -\underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}}_{= \arcsin x \text{ nach } 14.22} + \int \boxed{\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}}\, dx$$

$$\boxed{\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{1-x^2}\, dx = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x - \int \sqrt{1-x^2}\, dx$$

gilt auf dem offenen Intervall $(-1,1)$

d.h. $-1 < a < b < 1$

Da beide Seiten stetig auf $[-1,1]$ sind, gilt die Gleichheit auf ganz $[-1,1]$.

Die beiden anderen Formeln bew. man ähnlich.

$\boxed{\alpha = -1}$ $F(x) = \frac{1}{2} (\ln x)^2$ ist Stammfkt von $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

$\boxed{\alpha = 0}$

$$\int x^0 \ln x = \int 1 \cdot \ln x = x \ln x - x$$

Notation (s mißbrauch) bei unbestim. Intgr.

Hier schrieben wir auch:

$$-\int x \frac{1}{x} dx = -x$$

Eigentlich ist gemeint:

$$-\int_c^x t \frac{1}{t} dt = -\int_c^x 1 dt = -(x-c)$$

$$= -x + c$$

Wobei c einen frei wählbaren Startpkt bzw die freie Konstante beim unbestimmten Integr. bez.

(D) Integranden der Gestalt

$$f(x)g'(x) = x^n e^{cx} \qquad (n \in \mathbb{N},\ c \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$$

Der Exponent kann durch part. Integr. um eins reduziert werden (vgl. Spezialfall 14.25)

$$I_n := \int x^n e^{cn} = x^n \frac{e^{cx}}{c} - \int x^{n-1} e^{cx} \frac{n}{c}$$

$$= \frac{1}{c} x^n e^{cx} - \frac{n}{c} I_{n-1}$$

Da $I_0 = \int e^{cx} = \frac{1}{c} e^{cx}$ lässt sich so jedes I_n in endl. vielen Schritten berechnen (oder mit vollst Induktion.)

Vorgriff: Wir werden sehen, dass

für $f_1, f_2 \in R[a,b]$ auch

$f := f_1 + i f_2 : [a,b] \to \mathbb{C}$

Riemann-intbar ist. Insbesondere

gelten $I_n := \int x^n e^{cx} = \frac{x^n e^{xc}}{c} - \frac{n}{c} I_{n-1}$

und $I_0 = \frac{1}{c} e^{cx}$ auch für $n \in \mathbb{N}$

$c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Damit können wir auch Stammfkt

zu $x^n \; e^{\alpha x} \cos \beta x$ und

$(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ $x^n \; e^{\alpha x} \sin \beta x$ berechnen

Setze $c := \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$. Ist $c = 0$

so ist der Integrand x^n und

elementar intbar. Ansonsten:

$$\mathrm{Re}(x^n \; e^{cx}) = \mathrm{Re}(x^n \; e^{\alpha x} \; e^{i\beta x})$$

$$= x^n \; e^{\alpha x} \cos \beta x$$

(E) Integranden $\cos^k x$, $\sin^k x$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$

$$\int \underline{\cos^k x}\, dx = \int \underbrace{\cos^{k-1} x}_{= g(x)} \; \underbrace{\cos x\, dx}_{= f'(x)}$$

$$= \cos^{k-1} x \, \sin x + \int (k-1) \cos^{k-2} x \, \sin x \cdot \sin x \, dx$$

$$= \cos^{k-1} x \, \sin x + (k-1) \int \underline{\cos^{k-2}} x \, (1 - \underline{\cos^2 x}) \, dx$$

Umstellen:

$$k \int \cos^k x = \cos^{k-1} x \, \sin x + (k-1) \int \cos^{k-2} x$$

Analog:

$$\int \sin^k x \, dx = -\frac{1}{k} \sin^{k-1} x \cos x + \frac{k-1}{k} \int \sin^{k-2} x \, dx$$

Wie bei den Exponentialfkt in (D) kann man dies iterieren und erhält: z.B. für das bestimmte Integral über $[0, \frac{\pi}{2}]$:

$$c_{2m} := \int_0^{\pi/2} \cos^{2m} x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2m} x \, dx$$

$$= \frac{2m-1}{2m} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{4} \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$c_{2m+1} := \int_0^{\pi/2} \cos^{2m+1} x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} x \, dx$$

$$= \frac{2m}{2m+1} \cdot \ldots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$$

14 - 12

$$c_{2n} := \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx$$

$$= \frac{2n-1}{2n} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{4} \, \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$c_{2n+1} := \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx$$

$$= \frac{2n}{2n+1} \cdot \ldots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$$

24. Jan 22

27. Jan 22

(F) Mithilfe partieller Integr. zeigt man, dass $I_n := \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$, $n \in \mathbb{N}$ die Rekursionsgl.

$$2n \, I_{n+1} = (2n-1) \, I_n + \frac{x}{(1+x^2)^n} \qquad (RG)$$

erfüllt. Da

$$I_1 = \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$$

folgt mit $n=1$ in (RG)

$$2 I_2 = I_1 + \frac{x}{1+x^2} \quad \text{d.h.}$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\left[\arctan x + \frac{x}{1+x^2} \right]$$

Verifiziere dies durch Abl. der R.S.!

Ergänzung zu (B):

Auf $(-\infty, -1]$ kann ich immer noch rechnen:

$$\underline{\int 1 \sqrt{x^2-1}} = x\sqrt{x^2-1} - \int x \, \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\int \frac{x^2-1+1}{\sqrt{x^2-1}} = \underline{\int \sqrt{x^2-1}} + \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{x^2-1}\, dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-1} - \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx \right]$$

Wegen $\cosh : \mathbb{R} \to [1, \infty)$, d.h.

$\operatorname{arcosh} : [1, \infty) \to \mathbb{R}$

können wir den letzten Term nicht direkt durch diese Fkt darstellen.

Zupass kommt uns hier die Substitutionsregel

$\varphi \in C^1[a,b]$

$f \in C^0(\varphi[a,b])$

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt$$

Bsp. 14.33 Bsp. klassen zur Substit.

Zuerst f. Version 1

(G) Für $c \neq 0$ ist mit $\varphi(x) = c \cdot x$

$$c\int_a^b f(cx)\,dx = \int_{ca}^{cb} f(t)\,dt$$

Insbesondere für $\varphi(x) = -x$

$$-\int_a^b f(-x)\,dx = \int_{-a}^{-b} f(t)\,dt$$

Anwendung auf (B) für

$$-b < -a < 1 \quad (\Leftrightarrow \quad b > a > 1)$$

$$\int_{-b}^{-a} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = -\int_b^a \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \int_a^b \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$$

$$\boxed{14-14} = \frac{1}{2}\left[t\sqrt{t^2-1} - \operatorname{arcosh} t\right]\Big|_a^b$$

(H) Für $c \in \mathbb{R}$ und $\varphi(x) = x + c$ gilt

$$\int_a^b f(c+x)\, dx = \int_{a+c}^{b+c} f(t)\, dt$$

z. B.

$$\int_{-\frac{1}{7}}^{\frac{\pi}{6}-\frac{1}{7}} \sin\left(x+\frac{1}{7}\right) dx = \int_0^{\pi/6} \sin(t)\, dt$$

$$= -\cos(t)\Big|_0^{\pi/6} = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + 1$$

(I) Für $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow F(x) = \ln|x|$ ergibt sich für $a < b$, sofern $0 \notin \varphi([a,b])$

$$\int_a^b \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{1}{t}\, dt = \ln|t|\Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}$$

$$= \ln|\varphi(x)|\Big|_a^b = \ln|\varphi(b)| - \ln|\varphi(a)|$$

Spezialfälle:

$$\int \tan x = \int \frac{\sin x}{\cos x} = -\int \frac{\cos' x}{\cos x} = -\ln|\cos x|$$

$$\frac{1}{7} \int \frac{7x^6}{x^7+1} = \frac{1}{7} \ln |x^7+1|$$

(J) $$\frac{1}{2} \int_a^b f(x^2)\, 2x\, dx = \frac{1}{2} \int_{a^2}^{b^2} f(t)\, dt$$

mit $\varphi(x) = x^2 \Rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = 2x$

(K) $$\frac{1}{2} \int x^{\cancel{3}\,2}\, e^{x^2}\, 2x\, dx = \frac{1}{2} \int t\, e^t\, dt$$

$t = \varphi(x) = x^2 \Rightarrow \varphi'(x) = 2x = \frac{dt}{dx}$

$$\overset{p.I}{=} \frac{1}{2} \left(t\, e^t - \int e^t\, dt \right)$$ vgl. (D)

Allgem: für $n, k, l \in \mathbb{N}$ mit $n+1 = l \cdot k$ gilt.

$$\frac{1}{k} \int x^{n+1-k}\, e^{x^k}\, k x^{k-1} dx = \frac{1}{k} \int t^{l-1}\, e^t\, dt$$

$t = \varphi(x) = x^k \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \varphi'(x) = k\, x^{k-1}$ weiter mit

$x^{n+1-k} = t^{\frac{n+1}{k} - 1}$ (D)

14-16

Bsp. 14.34 zur Version 2

(L) Für $t \in] \subset [-1, 1]$ folgt mit

$t = \varphi(x) = \sin x$, $\frac{dt}{dx} = \cos x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\int \sqrt{1-t^2}\, dt = \int \sqrt{1-\sin^2 x} \cos x \, dx$$

Pyth.
$$= \int \cos^2 x \, dx$$

Additionsth.
$$= \frac{1}{2}\int (\cos 2x + 1)\, dx$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x \underbrace{- \sin^2 x - \cos^2 x}_{-1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\underbrace{\sin 2x}_{= 2\sin x \cos x} + x\right) = \frac{1}{2}\left(x + \sin x \sqrt{1-\sin x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\arcsin t + t\sqrt{1-t}\right)$$ vgl. (B)

Ein bestimmtes Intg. als Bsp.

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2x)\, dx = \frac{\pi}{4}$$

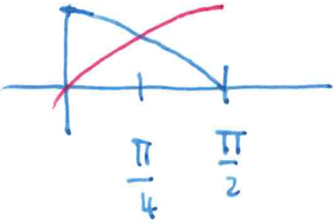
da $\sin 2 \cdot 0 = 0 = \sin 2 \frac{\pi}{2}$

Manche Int kann man sowohl mit part Int. als auch mit Substit. ausrechnen. Ebenso auch

(M) $$\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \int_0^{\pi/4} \frac{\cancel{1+\tan^2 x}}{(1+\tan^2 x)^{\cancel{2}}}\, dx$$

$$t = \varphi(x) = \tan x, \quad \frac{dt}{dx} = \varphi'(x) = 1 + \tan^2 x$$

$$0 = \tan 0, \quad 1 = \tan \frac{\pi}{4} = \frac{1/2\,\sqrt{2}}{1/2\,\sqrt{2}}$$



$$= \int_0^{\pi/4} \cos^2 x \, dx \overset{(E)}{=} \frac{1}{2}\left[\cos x \sin x \Big|_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4} 1\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$$

(N) $$\int e^{\sqrt{t}}\, dt = 2 \int e^x x \, dx \overset{(D)}{=}$$

$x = \sqrt{t} \Rightarrow t = x^2 = \varphi(x)$ $\qquad 2\left(x e^x - \int e^x dx\right)$

$\Rightarrow \frac{dt}{dx} = \varphi'(x) = 2x$ $\qquad = 2(x-1)e^x = 2(\sqrt{t}-1)e^{\sqrt{t}}$

14 - 18

Allg. für $k \in \mathbb{N}$:

$$\int e^{\sqrt[k]{t}}\,dt = k \int e^{x}\, x^{h-1}\,dx$$

weiter mit (D)

$$x := \sqrt[k]{t} \Rightarrow t = x^{h} = \varphi(x)$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dx} = \varphi'(x) = h\,x^{h-1}$$

Auf $\Theta \in (0,\infty)$ betr.

(O) $[\Theta > 0]$

$$\int \frac{d\Theta}{\sin^{m}\Theta} = \int \left(\frac{1+t^{2}}{2t}\right)^{m} \frac{2}{1+t^{2}}\,dt$$

$$\Theta = 2 \arctan t \;, \quad t = \tan \Theta/2 > 0$$

Rechnung $\Rightarrow$ $\sin\Theta = \frac{2t}{1+t^{2}}$, $\cos\Theta = \frac{1-t^{2}}{1+t^{2}}$

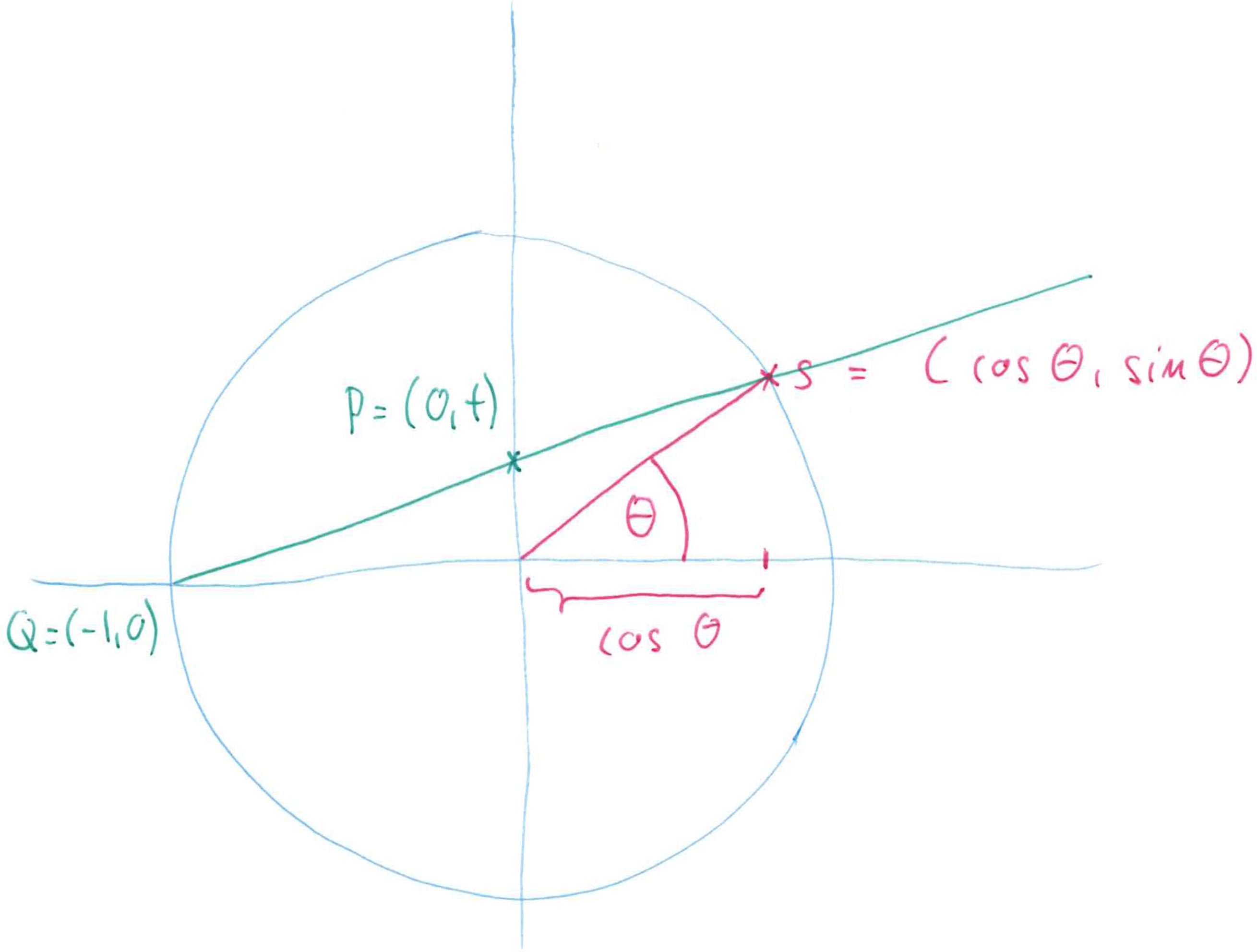
$$\tan\Theta = \frac{2t}{1-t^{2}} \;, \quad \Theta'(t) = \frac{d\Theta}{dt} = \frac{2}{1+t^{2}}$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln t = \ln \tan \Theta/2$$

$$= 2^{1-m} \int \frac{(1+t^{2})^{m-1}}{t^{m}}\,dt = 2^{1-m} \sum_{k=1}^{2m-2} a_k \int t^{k-m}\,dt$$

elementar berechenbar.

$\boxed{14-19}$



$$t = \tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

14 – 19 a

Manchmal sind trig. Additionsthm effizienter als part. Integr.

Bsp. 14.35

(P) $\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \, dx$

$$\left[\cos 2x = \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{= 1} - 2 \sin^2 x \right]$$

$\Rightarrow 2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$ $\quad = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right)$

vgl. auch (L)

(Q) Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ gelten:

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cos nx \, dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \cos nx \, dx = \begin{cases} 2\pi & \text{für } k = n = 0 \\ 0 & k \neq n \\ \pi & k = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } k = n = 0 \\ 0 & k \neq n \\ \pi & k = n \neq 0 \end{cases}$$

Bew. nur letzte Formel.

$$n = 0 \Rightarrow \qquad \sin nx \equiv 0$$

$$k = n \neq 0 \Rightarrow$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 nx \overset{(P)}{=} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2n} \sin 2nx \right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left(2\pi - 0\right) = \pi$$

$$\sin r \sin t = \frac{1}{2}\left(\cos(r-t) - \cos(r+t)\right)$$

$$\boxed{k \neq n} \Rightarrow$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \, \sin nx \overset{AT}{=} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\cos(k-n)x - \cos(k+n)x\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\boxed{\frac{1}{k-n}} \sin(k-n)x - \frac{1}{k+n} \sin(k+n)x \right)\Big|_0^{2\pi} = 0$$

Bm 14.36 Integration rationaler Funktionen

Wollen $R = \frac{P}{Q}$ integrieren, wobei P, Q Polynome. Der Int. Bereich darf keine Nullst. von Q enthalten. Dabei reicht es, den Fall Grad P < Grad Q zu betrachten, den mit Polynomdivision (Euklidischer Algorithmus) erhält man die Darstellung

$$\frac{P}{Q} = S + \frac{R}{Q}$$

wobei S und R Polynome mit Grad R < Grad Q ist.

Bsp.: Polynomdivision:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^3+5x^2-7x+4}{2x-8}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{29}{2} + \frac{120}{2x-8}$$

Ein komplexes Polynom P vom Grad n hat genau n Nullstellen über $\mathbb{C}$:

$$P(z) = a \prod_{j=1}^{n} (z - z_j) \qquad a, z_j \in \mathbb{C}$$
$$a \neq 0$$

Sind alle koeffiz. reell von P so gilt wg:

$$\overline{P(z)} = \sum_{k=1}^{n} b_k \overline{z^k} = P(\bar{z})$$

z Nullst. vom P $\Longleftrightarrow$ $\bar{z}$ Nullst. von P

Es folgt dann mit $z = \xi + i\mu$, falls $\mu \neq 0$

$$(x - z)(x - \bar{z}) = (x - \xi - i\mu)(x - \xi + i\mu)$$
$$= \underbrace{(x - \xi)^2 + \mu^2}_{\text{reelles Polynom}}$$

Dividiert man also aus P das quadr. Polynom $(x - z)(x - \bar{z})$ aus, erhält man wieder ein reelles Polynom. Ist l die Vielfachheit der Nullstelle z (d.h.

14 - 23 $\quad P(w) = (w - z)^l \, Q(w)$ mit

anderem Polynom Q), folgt induktiv, dass auch $\bar{z}$ Nullst. d. Vielfachheit l ist.

und

$$(x-z)^l \, (x-\bar{z})^l = \left((x-\xi)^2+\mu^2\right)^l$$

27.1

---

31. Jan

$\Rightarrow$ Jedes reelle Polynom (Polyn. mit $\mathbb{R}$-koeff) hat Darst

$$P(x) = a \prod_{k=1}^{r} (x-x_k)^{m_k} \prod_{j=1}^{s} \left[(x-\xi_j)^2+\mu_j^2\right]^{l_j}$$

mit reellen Nullst. x_k mit Vielfachh. m_k für $k \in \{1, \dots, r\}$

und komplexen Nullst $\xi_j \pm \mu_j i$ der Vielf. l_j für $j = 1, \dots s$. Also ist der Grad von P

$$\text{Grad } P = \sum_{k=1}^{r} m_k + 2 \sum_{j=1}^{s} l_j$$

Es gilt folgender Sachverhalt:

$\boxed{14-24}$ Im Königsberger systematischer

19.6. Man berechne das Integral $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^4}$.

Anleitung. Man benutze $1+x^4 = \left(1+\sqrt{2}x+x^2\right)\left(1-\sqrt{2}x+x^2\right)$ und stelle eine Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{ax+b}{1+\sqrt{2}x+x^2} + \frac{cx+d}{1-\sqrt{2}x+x^2}$$

her.

19.7. Man berechne die Integrale

$$\int x\sin x\,dx, \qquad \int x^2\cos x\,dx, \qquad \int x^3 e^x\,dx.$$

19.8. Für $m \in \mathbb{Z}$ berechne man das Integral

$$\int x^m \log x\,dx \quad (x > 0).$$

19.9. Man zeige: Das Riemannsche Lemma (Satz 6)

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f(x)\,\sin kx\,dx = 0$$

gilt auch unter der schwächeren Voraussetzung, dass $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ nur Riemann-integrierbar ist.

Anleitung. Man behandle zunächst den Fall, dass f eine Treppenfunktion ist und führe den allgemeinen Fall durch Approximation darauf zurück.

19.10. Es seien P_n die Legendre-Polynome

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n,$$

vgl. Aufgabe 16.4. Man beweise mittels partieller Integration

i) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0 \quad$ für $n \neq m$.

ii) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} P_n(x)^2 dx = \frac{2}{2n+1}$.

S. 14.3.7 (Partialbruchzerlegung)

Sind R und P reelle Polynome mit Grad R < Grad P und

$$P(x) = \prod_{k=1}^{r} (x-x_k)^{m_k} \prod_{j=1}^{s} \left[(x-\xi_j)^2+\mu_j^2\right]^{l_j}$$

so ex. koeffiz $a_{ki}, b_{j\nu}, c_{j\nu} \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{R(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^{r} \sum_{i=1}^{i_k} \frac{a_{ki}}{(x-x_k)^i} + \sum_{j=1}^{s} \sum_{\nu=1}^{l_j} \frac{b_{j\nu}x + c_{j\nu}}{\left[(x-\xi_j)^2+\mu_j^2\right]^{\nu}}$$

Die konkreten Werte für $a_{ki}, b_{j\nu}, c_{j\nu}$ erhält man durch Einsetzen geschickt gewählter Werte von x oder Koeffizienten-vgl.

Hintergrund: Die Monome

$$M_\nu : x \longmapsto x^\nu \quad , x \in [a,b]$$

sind linear unabh. Vektoren. Gilt also

$$\alpha_0 M_0 + \alpha_1 M_1 + \dots + \alpha_N M_N$$

$$= \beta_0 M_0 + \beta_1 M_1 + \dots + \beta_N M_N \quad \text{auf } [a,b]$$

mit koeffizienten $\alpha_0, \beta_0, \dots, \alpha_N, \beta_N \in \mathbb{R}$

so folgt

$$(\alpha_0 - \beta_0) M_0 + \dots + (\alpha_N - \beta_N) M_N = 0$$

als Fkt auf $[a,b]$

und dann wg. der lin Unabhängigkeit

$$0 = \alpha_0 - \beta_0 = \dots = \alpha_N - \beta_N .$$

Also muß jedes koeffizienten paar gleich

sein.

Bsp. 14.38 a) für Partialbruchzerlegung

$$\frac{R(x)}{P(x)} = \frac{-x^2 - 6x + 3}{(x-1)^2 (x^2+1)^2} = \frac{a_{11}}{x-1} + \frac{a_{22}}{(x-1)^2} + \frac{b_{11}x + c_{11}}{x^2+1}$$

$$+ \frac{b_{12}x + c_{12}}{(x^2+1)^2}$$

Bsp. 14.38 $a<b$, $[a,b]\cap\{-1,1\}=\emptyset$

Berechne $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{1-x^2}\,dx$!

Wissen: $1-x^2=(1-x)(1+x)$

Ansatz: $\displaystyle\frac{1}{1-x^2}=\frac{a_{11}}{1-x}+\frac{a_{21}}{1+x}$

Hauptnenner $\displaystyle = \frac{a_{11}+a_{21}+(a_{11}-a_{21})x}{1-x^2}$

koeffiz-Vgl: $1-a_{11}+a_{21}=(a_{11}-a_{21})x$, $x\in[a,b]$

$\Rightarrow$ $a_{11}-a_{21}=0$ & $a_{11}+a_{21}=1 \Rightarrow a_{11}=a_{21}=\frac{1}{2}$

Also

$$\int_a^b \frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\left[\int_a^b\frac{dx}{1-x}+\int_a^b\frac{dx}{1+x}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_a^b\frac{dx}{1+x}-\int_a^b\frac{dx}{x-1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln|x+1|-\ln|x-1|\right]\Big|_a^b=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\Bigg|_a^b$$

Hier hat P nur eine reelle Nullst. der Vielfachkeit 2, daher treten nur a_{11}, a_{12} und ein konjugiertes Nullstellenpaar der Vielfachkeit $l=2$, daher treten nur die koeff. b_{11}, c_{11} sowie $b_{1,2}, c_{12}$ auf.

Multiplikation auf Hauptnenner ergibt

$$\frac{R(x)}{P(x)} = \frac{1}{(x-1)^2 (x^2+1)^2} \Big[a_{11} (x-1)(x^2+1)^2 + a_{12} (x^2+1)^2$$

$$+ (b_{11} x + c_{11})(x-1)^2 (x^2+1) + (b_{12} x + c_{12})(x-1)^2 \Big]$$

Nun multipliziert man den Zähler aus. Dann ergibt Koeffizientenvergleich:

x^5 : $0 = a_{11} + b_{11}$

x^4 : $0 = -a_{11} + a_{12} - 2 b_{11} + c_{11}$

x^3 : $0 = 2a_{11} + 2b_{11} - 2c_{11} + b_{12}$

$$x^2 : \quad -1 = -2a_{11} + 2a_{12} - 2b_{11} + 2c_{11} - 2b_{12} + c_{12}$$

$$x^1 : \quad -6 = a_{11} + b_{11} - 2c_{11} + b_{12} - 2c_{12}$$

$$x^0 : \quad 3 = -a_{11} + a_{12} + c_{11} + c_{12}$$

Auflösen des Gl.-Systems liefert

$a_{11} = 0$, $a_{12} = -1$

$b_{11} = 0$, $c_{11} = 1$

$b_{12} = 2$, $c_{12} = 3$

Manchmal kann man die koeffizienten schneller bestimmen, wenn man geschicht gewählte Werte von x einsetzt. Insbesondere:

Ist x_{k_0} eine i-fache Nullstelle von P (d.h. $P(x) = (x - x_{k_0})^i \, Q(x)$, wobei Q Polynom ohne Nullstelle in x_{k_0})

so erhält man koeffiz $a_{k_0 i}$ durch

$$a_{k_0 i} = \frac{R(x)}{P(x)}(x-p)^i \Big|_{p = x_{k_0}} = \frac{R(x_{k_0})}{Q(x_{k_0})}$$

In unserem Bsp.

$$a_{1,2} = \frac{-x^2-6x+3}{(x^2+1)^2}\Big|_{x=x_1=1} = -1$$

da ja $P(x) = (x-1)^2 \, Q(x)$ mit

$Q(x) = (x^2+1)^2$.

Nachdem man eine rationale Fkt $\frac{R}{P}$ partialbruchzerlegt hat, treten Summanden der folgenden Form auf, die man mit bekannten Regeln integrieren kann (außerhalb Nullst. von P) (α) $\int \frac{a}{x-p}\,dx = a \ln|x-p| + \text{const}$

(β) $\int \frac{a}{(x-p)^n}\,dx = \frac{1}{1-n}\,\frac{a}{(x-p)^{n-1}} + \text{const}$

(γ) $\int \frac{bx+c}{(x-\xi)^2+\mu^2}\,dx$

$$= \frac{b}{2}\int \frac{2x-2\xi}{(x-\xi)^2+\mu^2}\,dx + \frac{b\xi+c}{\mu}\int \frac{1/\mu\;dx}{\left(\frac{x-\xi}{\mu}\right)^2+1}$$

Test: $\frac{bx-\cancel{b\xi}}{(x-\xi)^2+\mu} + \frac{\cancel{b\xi}+c}{\cancel{\mu}}\,\frac{\cancel{\mu}}{(x-\xi)^2+\mu^2}$

Nun: Zähler = (Nenner)' im 1. Term

Bsp (I)

$$= \frac{b}{2}\ln\left((x-\xi)^2+\mu\right)^2 + \frac{b\xi+c}{\mu}\int\frac{dt}{t^2+1} + \text{const}$$

$t=\varphi(x)=\frac{x-\xi}{\mu}$ Rücksubst

$\boxed{15-5}$ $= \frac{b}{2}\ln\left((x-\xi)^2+\mu\right)^2 + \frac{b\xi+c}{\mu}\arctan\frac{x-\xi}{\mu} + \text{const}$

(δ) Auch hier zerlegen wir erstmal

$$\int \frac{bx+c}{(x-\xi)^2+\mu^2}\,dx$$

$$= \frac{b}{2}\int \frac{2x-2\xi}{((x-\xi)^2+\mu^2)^n}\,dx + \underbrace{\int \frac{b\xi+c}{[(x-\xi)^2+\mu^2]^n}\,\frac{1/\mu^{2n}}{1/\mu^{2n}}\,dx}$$

2 Substitutionen:

$$t = \varphi(x) = \frac{x-\xi}{\mu} \qquad = \frac{b\xi+c}{\mu^{2n-1}}\,\frac{1/\mu}{\left[\left(\frac{x-\mu}{\mu}\right)^2+1\right]^n}$$

$$\varphi'(x) = 1/\mu = \frac{dt}{dx}$$

$$s = \psi(x) = (x-\xi)^2+\mu^2, \quad \frac{ds}{dx} = \psi'(x) = 2x-2\xi$$

$$= \frac{b}{2}\int \frac{ds}{s^n} + \frac{b\xi+c}{\mu^{2n-1}}\int \frac{dt}{(t^2+1)^n}$$

Rücksubtitution

$$= \frac{b}{2}\,\frac{1}{1-n}\,\frac{1}{[(x-\xi)^2+\mu^2]^{n-1}} + \text{const.}$$

$$+ \frac{b\xi+c}{\mu^{2n-1}}\, I_n \qquad \text{[wie in Bsp (F)]}$$

$\boxed{1.5-6}$

Num: I_n mit Rekursion berechnen,

$t = \frac{1}{\mu}(x-\xi)$ rücksubstituieren!

14.39 Integration $\mathbb{C}$-wertiger Fkt.

Sei $J \subset \mathbb{R}$ und $f: J \to \mathbb{C}$. Definiere

$\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f : J \to \mathbb{R}$ durch

$$(\operatorname{Re} f)(x) = \operatorname{Re} f(x), \quad (\operatorname{Im} f)(x) = \operatorname{Im} f(x).$$

Seien nun $a < b$, $f_1, f_2 \in \mathcal{R}[a,b]$ und

$f: [a,b] \to \mathbb{C}$, $f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$.

Dann setzen wir

$$I(f) := \int_a^b \underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{C}} dx := \int_a^b \underbrace{f_1(x)}_{\in \mathbb{R}} dx + i \int_a^b \underbrace{f_2(x)}_{\in \mathbb{R}} dx$$

insbes: $\operatorname{Re} I(f) = \int_a^b f_1 dx$, $\operatorname{Im} I(f) = \int_a^b f_2 dx$

15 Uneigentliche Integrale

Bisher $f \in R[a,b]$

- $[a,b]$ beschränkt & abgeschl.
- f –||–

Wollen dies nun abschwächen

D 15.1 (Uneigentliche R-Intbarkeit)

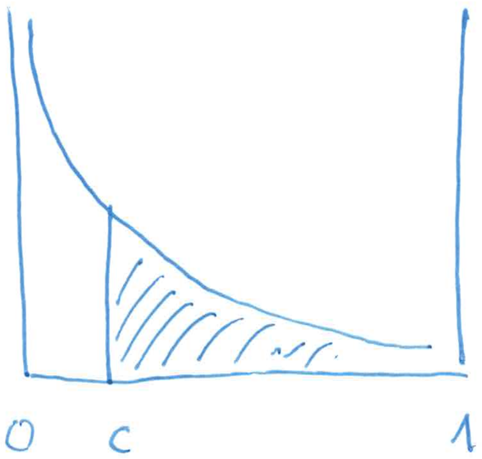
(1) Sei $-\infty \leq a < b < \infty$. Eine Fkt $f: (a,b] \to \mathbb{R}$ heißt <u>uneigentlich Riemann-intbar</u> bei a, wenn für alle $c \in (a,b)$ die Einschränkung $f|_{[c,b]}$ R-intbar ist und

$$\lim_{c \searrow a} \int_c^b f(x)\,dx \quad \text{existiert.}$$

In diesem Fall bezeichnen wir

diesen Limes mit $\int_a^b f(x)\,dx$

⌈ Bsp: $(a,b] = (0,1]$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$



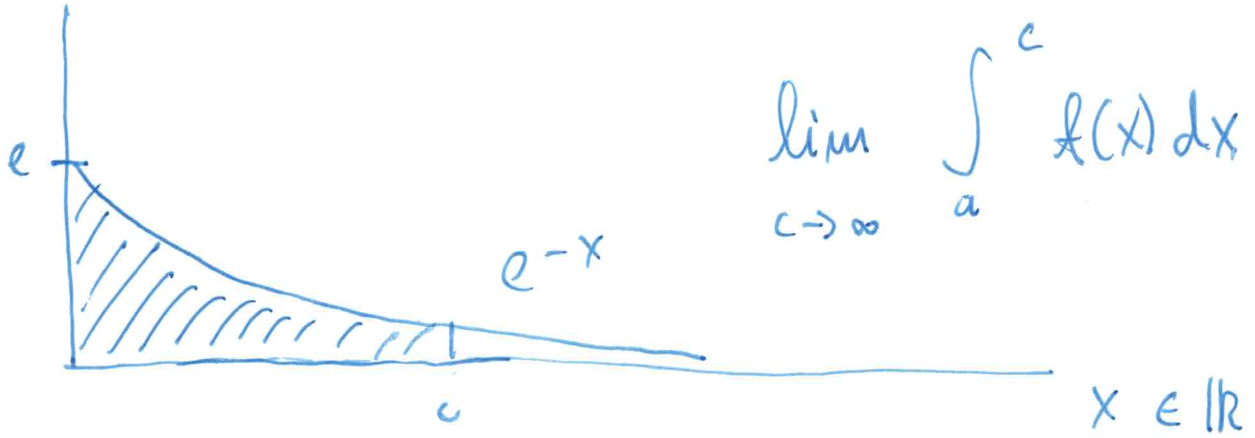
$$\int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \longrightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$ ⌋

(2) Seien $-\infty < a < b \le \infty$. Die Fkt. $f : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *uneigentlich Riemann-intbar* bei b, falls für jedes $c \in (a,b)$ die Einschränkung $f\big|_{[a,c]} \in \mathcal{R}[a,c]$ ist und der Limes

$$L = \lim_{c \nearrow b} \int_a^c f(x)\,dx \quad \text{existiert.}$$

In diesem Fall setzen wir $\int_a^b f\,dx := L$.

⌜ Bsp $[a, b) = [0, \infty)$, $f(x) = e^{-x}$



$$\lim_{c \to \infty} \int_a^c f(x)\,dx$$

⌟

(3) Sind $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ und $f: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ so, dass ein $c \in (a,b)$ existiert, so dass $f\big|_{(a,c]}$ und $f\big|_{[c,b)}$ uneigentlich R-intbar sind, so nennen wir f bei a und b <u>uneigentlich Riemann-intbar</u> und setzen

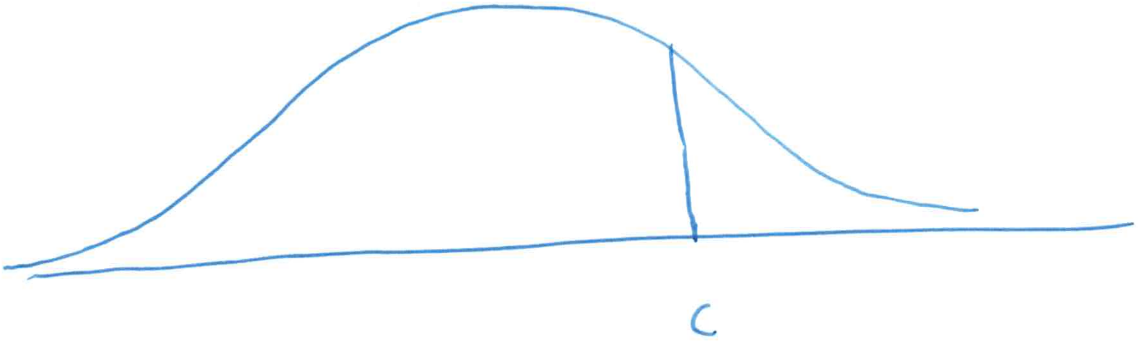
$$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$$

Gilt dies für ein $c \in (a,b)$, dann auch für jedes $c \in (a,b)$ und Summe bleibt gleich. $\boxed{*}$

Mo

Do 3. Febr. 22

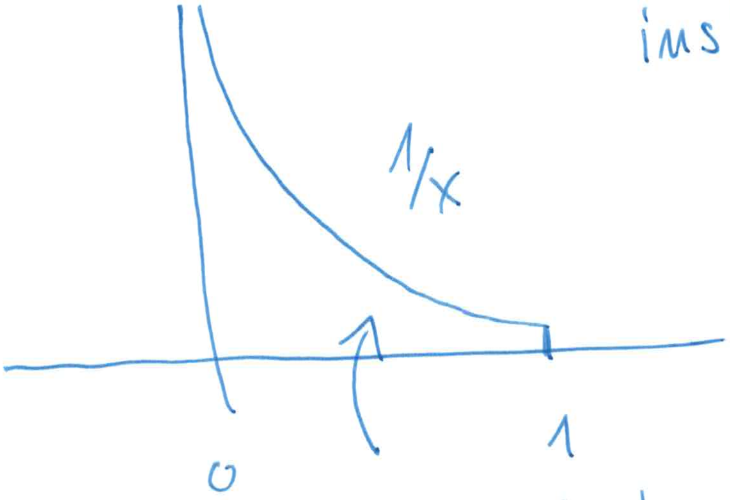
⌈Bsp $(a,b) = (-\infty, +\infty)$, $f(x) = e^{-x^2}$



⌋

Bm 15.2 (Klassen von) Situationen

(α)* a bzw b endlich: lokale Singularität insbesondere f unbeschränkt.

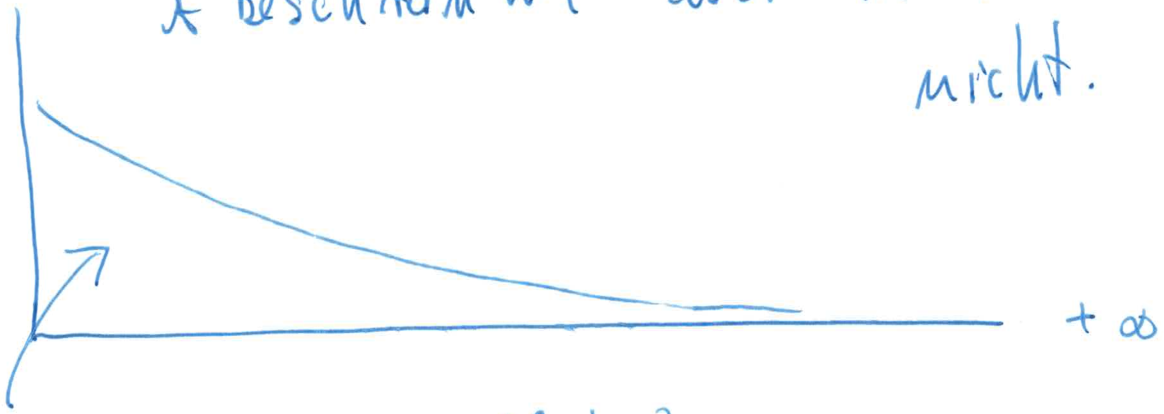


Frage: Ist diese Fläche endlich?

(β)* $|a|$ bzw $|b|$ unendlich:

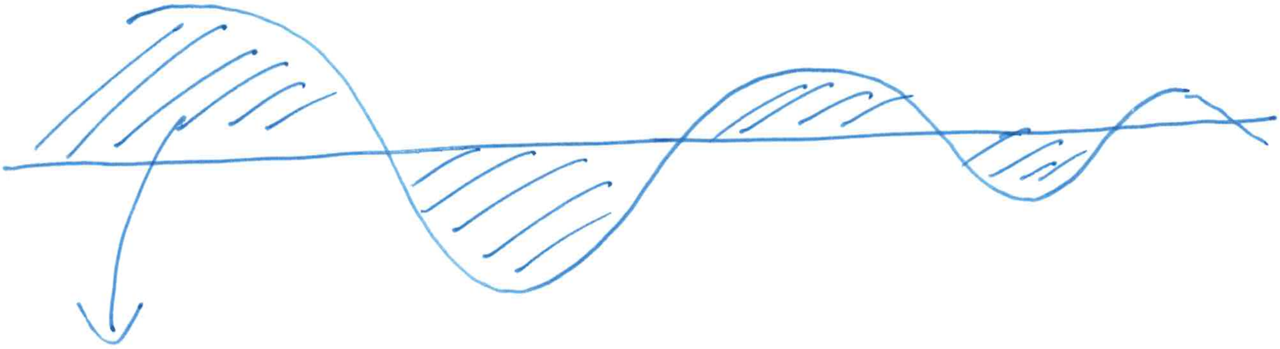
Singularität im Unendlichen:

f beschränkt, aber Intervall nicht.



ist Fläche endlich?

(8) * Oszillation führt zu Auslöschungen bei Unendlich



Gesamtfläche $= +\infty$

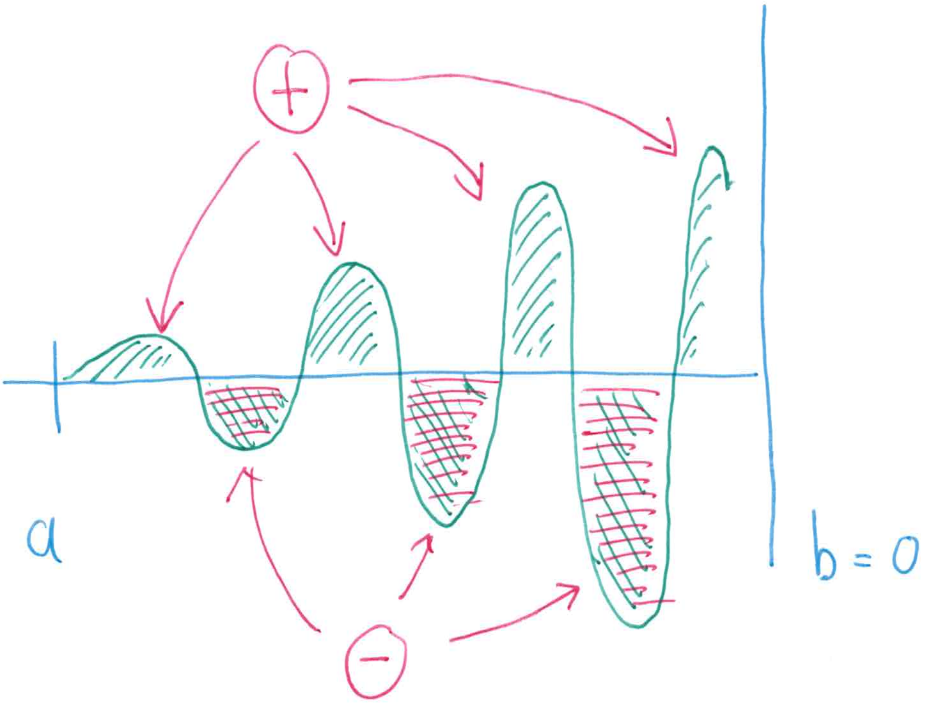
Differenz zw. Fläche oberhalb
- Fläche unterhalb: endlich.

$\boxed{*}$ Auf die approximierenden Integrale

$$\int_c^b f dx \quad \text{und} \quad \int_a^c f dx$$

wenden wir die bisherigen Rechenregeln an.

(δ)* Oszillationen bei lokaler Singularität bei $b \in \mathbb{R}$ führen zu Auslöschungen der Konvergenz



Bsp 15.3 zu Klassen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

(α) Sei $s > 0$, $f : (0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{-s}$

⇝ lokale Singularität bei $a = 0$.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx = \lim_{c \searrow 0} \int_c^1 \frac{dx}{x^s} \overset{s \neq 1}{=} \lim_{c \searrow 0} \frac{1}{1-s} x^{1-s} \Big|_c^1$$

$$= \lim_{c \searrow 0} \left(\frac{1}{1-s} - \frac{1}{1-s} \underbrace{c^{1-s}}_{\text{Limes für } c \to 0\ ?} \right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-s} & \text{falls } 0 < s < 1 \\ +\infty & s \geq 1 \end{cases}$$

da $c^{1-s} \xrightarrow[c\to 0]{} 0$

da $c^{1-s} \xrightarrow[c\to 0]{} \infty$

$$\int_c^1 \frac{dx}{x} = \ln(1) - \ln(c) = |\ln c| \to +\infty$$

für $c \to 0$

(β) Sei $s > 0$, $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{-s}$

$$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \lim_{c \nearrow \infty} \int_1^c \frac{dx}{x^s} \overset{s \neq 1}{=} \lim_{c \nearrow \infty} \frac{x^{1-s}}{1-s} \Big|_1^c$$

$$= \lim_c \left(\underbrace{\frac{c^{1-s}}{1-s}}_{} - \frac{1}{1-s} \right)$$

Limes für $c \to \infty$?

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{s-1} & \text{falls } s > 1, \text{ da } c^{1-s} \xrightarrow[c\to\infty]{} 0 \\ +\infty & \text{falls } 0 < s < 1, \text{ da } c^{1-s} \longrightarrow \infty \end{cases}$$

$\boxed{15-14}$ $\int_1^c \frac{dx}{x} = \ln c - \ln 1 = \ln c \longrightarrow \infty \ (c \to \infty)$

Fazit: Für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^s} = +\infty$$

(β) $f : [a, b) = [0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \to e^{-x}$

$$\int_0^\infty f\,dx = \lim_{c \nearrow \infty} \int_0^c e^{-x}\,dx = \lim_c \left(-e^{-x}\right)\Big|_0^c$$

$$= \lim_c \left(1 - e^{-c}\right) = 1 \Rightarrow \text{uneigentl. R-intbar.}$$

Bsp zu γ:

Das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \left| \frac{1}{x} \sin x \right| dx = \infty$, existiert also nicht in unserem Sinne.

Das uneigentliche Int. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ exist.

Bw: part. Int.

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{x} (- \cos x) \Big|_1^\infty - \int_1^\infty \left(\frac{-1}{x^2} \right) (- \cos x) dx$$

$$= \underbrace{0 + 1 \cdot \cos 1}_{\in \mathbb{R}} - \underbrace{\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx}_{= A}$$

Δ-Ungl. für Intg:

$$A \leq \int_1^\infty \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| dx \overset{\text{Monotonie}}{\leq} \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$$

$$= \frac{-1}{3} x^{-3} \Big|_1^\infty = 0 - \left(- \frac{1}{3} \right) 1^{-3} = \frac{1}{3} \in \mathbb{R}.$$

Satz 15.4 (Integrationskriterien für uneigentliche Integrale)

Seien $f, g : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ Fkt, die auf jedem Intervall $[a,c] \subset [a,b)$ (eigentlich) integrierbar sind.

(I) Äquivalent sind ((Cauchykriterium)

(a) Uneigentliches Integ. $\int_a^b f\,dx$ existiert

(b) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; c \in (a,b)$, sodass für alle $y \in (c,b)$ gilt $\left|\int_x^y f\,dx\right| < \varepsilon$

(II) Majorantenkriterium:

Gilt $\forall \; x \in [a,b)$: $|f(x)| \leq g(x)$ und exist. das uneigentliche Integ. $\int_a^b g(x)\,dx$, so exist auch die uneig. Int. $\int_a^b f\,dx$ und $\int_a^b |f|\,dx$.

(III) Minorantenkriterium.

Gilt $\forall \; x \in [a,b)$: $0 \leq g(x) \leq f(x)$ und $\int_a^b g\,dx = +\infty$

15-17 (Insbes ex. uneig. Int. nicht), so auch $\int_a^b f\,dx = +\infty$.

① Reelle Zahlen

körper & Anornungsaxiome:

z.B. Warum gelten

$$2x+3>-y \Rightarrow -2x-3<y$$

$$-(-1)=1$$

Mengen, Σ, Π , Min, Max, Sup, Inf.

Betrag

② Induktion & Summenformel

sprinzip

$$(e-q)\sum_{j=0}^{m} q^j = e-q^{m+1}$$

Binomialkoeffizienten , Binomischer Lehr

③ Vollständige Körper $\mathbb{K}$

beschränktes $A \subset \mathbb{K}$ angeordneter körper

Supremumsvollstöngkeit

$\Leftrightarrow$ $\cap$- Axiom

$\Leftrightarrow$ Cauchyfolgen konvergieren auch in $\mathbb{C}$

sinnvoll

arhimedische körper

$\mathbb{Q}$ nicht vollständig.

Arithm - geom Mittel Ungl

④ komplexe Zahlen $\mathbb{C} \ni z$

$\bar{z}$, Re z, Im z, $|z|$

⑤ Folgen & Konvergenz

verschiedene Formulierungen.

geometrische Folge → exp(x)

Grenzwertsätze → Stet. Diffb.

⑥ Monotone Folgen → Kurvendiskussion

Riemann - Integral

m. & beschr ⇒ konv.

Heronverf. für $\sqrt{a}$

Exponentialfunktion mittels approx. zweier monot. Folgen

Intervallschachtelung ⇔ Vollständigkeit

$\neq \emptyset$

$\mathbb{R} \supset A \ni x_n \nearrow a = \sup A$

⑦ Häufungspkte & Cauchyf. A beschr ⊃ konv. Folge

HP, Limesmenge, Teilfolgen, Satz v. Bolzano W

Charakterisierungen von sup A

Cauchyf. $\Leftrightarrow$ konvergent in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

[vieles in $\mathbb{Q}$ falsch]

⑧ Funktionen

Dfn., Funktionengraph

Funktionalgl. von exp(·)

Verkettung

Urbildmenge, Umkehrabb, inj/surj/bij

monotone Fkt.

⑨ Grenzw / Stetigk. von Fkt.

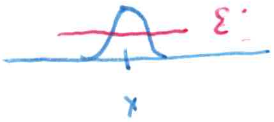
↓ ↘

Dfn & Rechenreg.

Folgen
$\varepsilon-\delta$ Dfn

$2\varepsilon = f(x) > 0$

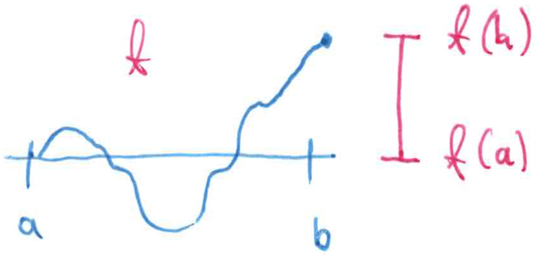
Vorz. stabil in kl. Umgeb.



Stetigk v.: $f \circ g$, $f+g$, λg, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$

$\min_A f$, $\max_A f$, $\sup_A f$, $\inf_A f$ [

stetiges f nimmt Min & Max auf [a,b] an.



ZWS

$$\begin{tikzcd}
\text{injektiv} \arrow[r, Leftrightarrow] & \text{monoton.} \arrow[r, leftrightarrow] & \text{ex } f^{-1} \\
& \text{stetig} \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[u, Rightarrow] \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

$x \mapsto \exp x$ stetig & Eigensch

Logarithmus, allg. Potenz

exp: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig

sin, cos Eulersche Formel

Additionsth.

$\pi = 2x_0$, $x_0 \in [0,2]$ eind. Nullst. v. cos

⟶ Kurvendiskussion.

Periodizität, Symmetrie, Werte

tan, cot

⑪ Diffbare Fkt

Differenzenquotient, Ableitung

Geometrie: Sekante, Tangente

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)\varepsilon(x)$

Diffbarkeit von $f+\lambda g,\ f\cdot g,\ \frac{f}{g},\ f\circ g,\ f^{-1}$

$C^1([a,b]),\ C^2([a,b]),\ C^\infty([a,b])$

⑫ Kurvendiskussion

x_0 globales / lok. Min / Max ⇒ Vorzeichenwechs. d. Differenzen-Q. in x_0

f diffb.
⇒ $f'(x_0)=0$ (notwend. Bed. f Extrema)

hinreichende Bed:

Extremum ⟷ sgn f' ⟷ Konvexität.

f konvex auf $[a,d]$ ⇒ f Lipschitz auf $[b,c]\subset(a,d)$ ⇒ f glm st. auf $[b,c]$ ⇒ $f\in R[b,c]$

Umformulierungen d. Konvexität

$f\in C^2$: konvex $\Leftrightarrow$ f' isoton $\Leftrightarrow$ $f''\geq 0$

Asymptoten.

Mittelwertsatz ⟶ L'Hospital
$\cup$
S.v. Rolle
⟶ $f'=\alpha f \Rightarrow f=e^{\alpha x}$

⑬ Weitere trig Fkt

arcsin, arccos, arctan, arccot Kurvendiskussio

Hyperbelfkt, explizite Darst, Ableitungen,

⑭ Riemann Integral

Obersumme O_Z, Unters. U_Z, Riemanns $S_{Z,\xi}$

Charak. d. R-Integrierbkeit (Äquivalenz)

$\Uparrow$

f monoton o. stetig o. Treppe

$I : \mathcal{R}[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ best. Integral.

linear, monoton, Δ-Ungl., additiv bzgl. $[a,c] \cup [c,b]$

f glm stet. $\Rightarrow f \in \mathcal{R}[a,b]$

$\Uparrow$

f stet. auf $[a,b]$

$f+g$, fg, $f|_{[a,c]}$, $\max\{f,g\}$, $|f|$ intbar.

Stammfkt $F' = f \Rightarrow F = \int f + c$

Mittelwerts. d. Integralr., Hauptsatz d. D&I Rechnung.