

Ideen und Aufgabenvorschläge
Analysis I für Lehramt
im Wintersemester 2021/22

Aufgabe 1)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $p_1, \dots, p_n \in [1, \infty)$ mit $\sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} = 1$. Zeigen Sie, dass

$$\prod_{k=1}^n x_k \leq \sum_{k=1}^n \frac{x_k^{p_k}}{p_k}$$

für beliebige $x_1, \dots, x_n \geq 0$ gilt.

Aufgabe 2)

Bestimmen Sie $\int_0^1 e^x \, dx$ mit Hilfe der Definition des Integrals.

Aufgabe 3)

Zeigen Sie die Linearität des Integrals mit Ober- und Untersummen, d.h. dass für ein Intervall $I = [a, b]$, Riemann-integrierbare $f, g \in \mathcal{R}(I)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ stets $\lambda f + g \in \mathcal{R}(I)$ und

$$\int_a^b (\lambda f(x) + g(x)) \, dx = \lambda \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx$$

gilt.

Aufgabe 4)

Sei $a < b$. Zeigen Sie mit Ober- und Untersummen:

- (a) Ist $f \in \mathcal{R}([a, b])$ stetig, nicht-negativ und gibt es $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) > 0$, so gilt $\int_a^b f(x) \, dx > 0$.
- (b) Ohne die Stetigkeit ist der Schluss in (i) falsch.
- (c) Die Abbildung

$$\|\cdot\| : \mathcal{R}([a, b]) \rightarrow [0, \infty) \quad \text{mit} \quad \|f\| := \int_a^b |f(x)| \, dx$$

ist

- (i) eine Norm auf dem Raum $C([a, b]) \cap \mathcal{R}([a, b])$.
- (ii) *keine* Norm auf dem Raum $\mathcal{R}([a, b])$.