technische universität dortmund

fakultät für mathematik

PROF. DR. IVAN VESELIĆ

M.SC. ALEXANDER DICKE

Ideen und Aufgabenvorschläge

Analysis I für Lehramt

im Wintersemester 2021/22

Aufgabe 1)

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie für $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

(a) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h^2)-f(x_0)}{h} = 0.$ (b) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0-\beta h)}{h} = (\alpha+\beta)f'(x_0).$

Aufgabe 2)

Sei $\alpha > 1$ und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so, dass $|f(x)| \le |x|^\alpha$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f im Nullpunkt differenzierbar ist und $f'(0) = 0$ gilt.

Aufgabe 3)

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen maximale Intervalle, auf denen diese konvex bzw. konkav sind:

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}.$ (b) $g\colon \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}.$

Hinweis: Sie dürfen die Charakterisierung von konvexen (bzw. konkaven) Funktionen aus Aufgabe 7 von Blatt 11 nutzen.

Aufgabe 4)

Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle.

(a) Seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ konvex. Zeigen Sie, dass $f + g$ konvex ist.

(b) Sei $f\colon I \to J$ konvex und $g\colon J \to \mathbb{R}$ konvex und isoton. Zeigen Sie, dass $g \circ f$ konvex ist.

(c) Gilt der Schluss in (b) auch dann noch, wenn man auf die Isotonie verzichtet?

Aufgabe 5)

Gegeben sei die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x \cdot (\ln(x) - 1)^2$ für $x \in D$.

(a) Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge $D \subset \mathbb{R}$. Betrachten Sie die Grenzwerte für das Verhalten von f an den Rändern von D.

(b) Bestimmen Sie das Monotonieverhalten und die Extrema von f.

(c) Bestimmen Sie das Konvexitätsverhalten und die Wendepunkte von f.

(d) Skizzieren Sie den Graphen von f *von Hand*.

Aufgabe 6)

Seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeigen Sie, dass $xy \le \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ für alle $x, y \ge 0$ gilt.