technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. Ivan Veselić — M.Sc. Alexander Dicke

Ideen und Aufgabenvorschläge

Analysis I für Lehramt

im Wintersemester 2021/22

Aufgabe 1)

Prüfen Sie, ob die nachstehenden Funktionen ein lokales/globales Minimum/Maximum besitzen.

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$.

(b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x + |\sin(x)|$.

Aufgabe 2)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es $L > 0$ gibt derart, dass für alle $x, y \in I$ stets $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ gilt. Zeigen Sie:

(a) Jede Lipschitz-stetige Funktion ist stetig.

(b) Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, so ist jede Funktion $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ Lipschitz-stetig auf $I = [a, b]$.

Aufgabe 3)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

(a) Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Konstruieren Sie eine stetige Fortsetzung von f auf ganz $\mathbb{R}$.

(b) Kann man jede stetige Funktion $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig auf $\mathbb{R}$ fortsetzen?

Aufgabe 4)

(a) Zeigen Sie, dass die Ableitung einer geraden (ungeraden) Funktion ungerade (gerade) ist.

(b) Sei $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom von Grad $n \in \mathbb{N}$, d.h. es sei $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ für $x \in \mathbb{R}$ und Koeffizienten $a_j \in \mathbb{R}$, $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Zeigen Sie, dass p genau dann gerade (ungerade) ist, wenn $a_j = 0$ für alle ungerade (geraden) Indizes j gilt.

Aufgabe 5)

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass genau dann $f' \equiv 0$ gilt, wenn f konstant ist.

Aufgabe 6)

Seien $f, g \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass

$$f(x) \cdot g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}} \big(f^{(k)}(x) \cdot g(x)\big).$$