Analysis I für Lehramt, WiSe21/22

Lösungsskizze für Aufgabe 4, Blatt 6

(a). Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung von $a_n \to a$ gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon/2$ für alle $n \geq n_0$. Sei weiter $M := \max\{|a_k - a| \mid k = 1, \ldots, n_0\}$, und wähle $N > n_0$ mit $n_0 M/n < \varepsilon/2$ für alle $n \geq N$.

Für $n \geq N$ gilt dann

$$\begin{aligned}
|b_n - a| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k - a \right| = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{n} (a_k - a) \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |a_k - a| \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0} |a_k - a| + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0+1}^{n} |a_k - a| \\
&< \frac{1}{n} \cdot n_0 M + \frac{1}{n} \cdot (n - n_0) \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \frac{n_0 M}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dies zeigt $b_n \to a$.

(b). Betrachte die divergente Folge (a_n) mit $a_n = (-1)^{n+1}$. Dann gilt $\sum_{k=1}^{n} a_k \in \{0, 1\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und daher

$$0 \leq b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Somit gilt $b_n \to 0$ nach dem Sandwichlemma.

(c). Mittels Teleskopsumme beobachten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k d_k &= \sum_{k=1}^{n} k(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\big(k x_{k+1} - (k-1) x_k\big) - x_k \Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \Big(\big(k x_{k+1} - (k-1) x_k\big) - \sum_{k=1}^{n} x_k \\
&= n x_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} x_k = n x_{n+1} - n y_n.
\end{aligned}$$

Dividieren durch n liefert die behauptete Identität.

Sei nun $y_n \to y$ und $n d_n \to 0$. Nach Teil (a) gilt wir dann auch

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k d_k \to 0,$$

also

$$x_{n+1} = y_n + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k d_k \xrightarrow[n \to \infty]{} y + 0 = y$$

nach den Grenzwertsätzen. Damit gilt natürlich auch $x_n \to y$.