technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. Ivan Veselić M.Sc. Alexander Dicke

Ideen und Aufgabenvorschläge

Analysis I für Lehramt

im Wintersemester 2021/22

Aufgabe 1)

Angenommen Sie legen 1000€ mit einer jährlichen Verzinsung von 4% an, wobei die jährlichen Zinsen wieder angelegt werden.

(a) Berechnen Sie händisch (d.h. ohne Taschenrechner etc.), dass Sie nach

- 25 Jahren mindestens 2000€,
- 250 Jahren mindestens 11000€ und nach
- 500 Jahren mindestens 21000€

ausgezahlt bekommen. Nutzen Sie dazu die Bernoulli Ungleichung.

(b) Bestimmen Sie den exakten Auszahlungsbetrag nach 25, 250 und nach 500 Jahren.

(c) Finden Sie eine Zahl $C \in \mathbb{R}$ derart, dass für die Schätzung $S(n)$ des Auszahlungsbetrags nach n Jahren mittels der Bernoulli Ungleichung aus Teil (a) und für den tatsächlichen Auszahlungsbetrag $T(n)$ nach n Jahren aus Teil (b) stets

$$T(n) - S(n) \geq Cn^2$$

gilt.

Aufgabe 2)

Sei K ein Körper und seien $a, b, x \in K$ und $y \in K \setminus \{n\}$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

(a) $a + x = b + x \Rightarrow a = b$ (b) $ay = by \Rightarrow a = b$

Aufgabe 3)

Sei K ein angeordneter Körper. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass dann $\Phi\colon \mathbb{N} \to K$ mit $\Phi(n) = ne$ injektiv ist. Wir setzen $\Phi(\frac{1}{n}) := (ne)^{-1}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\Phi(p)\Phi(\frac{1}{q}) = \Phi(\frac{1}{q})\Phi(p)$ für $p, q \in \mathbb{N}$.

Damit besitzt Φ eine eindeutige Fortsetzung $\Phi\colon \mathbb{Q} \to K$ mit $\Phi(\frac{p}{q}) := \Phi(p)\Phi(\frac{1}{q}) = \Phi(\frac{1}{q})\Phi(p)$. Für $a \in K$ und $p, q \in \mathbb{N}$ setzen wir $\frac{p}{q}a := \Phi(\frac{p}{q})a \in K$

(b) Verifizieren Sie, dass für alle $p, q, n, m \in \mathbb{N}$ und $a, b \in K$ gilt:

(i) $\frac{p}{q}a \cdot \frac{n}{m}b = \frac{pn}{qm}(ab)$.

(ii) $\frac{p}{q}a + \frac{n}{m}a = \frac{pm+nq}{mq}a$.

bitte wenden

Aufgabe 4)

Zeigen Sie: Es gibt kein $r \in \mathbb{Q}$ mit $r^2 = 2$.

Aufgabe 5)

Zeigen Sie, dass

$$(1+x)^n > \frac{n^2 x^2}{4}$$

für alle $x \geq 0$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ gilt.

Hinweis: Binomischer Lehrsatz.