Vorlesung Analysis I / Lehramt

TU Dortmund, Wintersemester 2017 / 18

Winfried Kaballo

Die Vorlesung *Analysis I für Lehramtsstudiengänge* im Wintersemester 2017/18 an der TU Dortmund basiert auf meinem Buch

Winfried Kaballo: Einführung in die Analysis I. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg-Berlin 2000 (2. Auflage),

auf das im folgenden unter [A1] oft verwiesen wird.

Erwartungen an Studierende

Spezielle Vorkenntnisse werden von Ihnen *nicht* erwartet. *Nützlich* ist aber eine gewisse Vertrautheit mit Grundlagen der Mathematik, wie sie in der Vorlesung *Lineare Algebra* vermittelt wird.

Für eine erfolgreiche Teilnahme an dieser Lehrveranstaltung wie auch für ein erfolgreiches Mathematik-Studium allgemein genügt es *nicht,* sich die Vorlesung nur anzuhören (und eventuell gleichzeitig im Buch einige Stellen farbig zu unterstreichen).

Unbedingt nötig ist **aktive Mitarbeit!**

Dazu bestehen mehrere Gelegenheiten:

Arbeiten Sie vor!
Arbeiten Sie den Stoff einer Vorlesung bereits vorher durch, etwa anhand des Buches. Versuchen Sie insbesondere, vor der Lektüre eines *Beweises* einen solchen selbst zu finden. Weiter werden regelmäßig *Probleme* formuliert, die erst später ohne weiteres gelöst werden können (oder auch gelöst werden). Ernsthafte Versuche (auch nicht erfolgreiche), diese Probleme selbst zu lösen oder Beweise selbst zu finden, sind für deren wirkliches Verständnis sehr hilfreich.

Arbeiten Sie nach!
Arbeiten Sie den Stoff einer Vorlesung anhand Ihrer Aufzeichnungen, des Buches und dieser Webseite später noch einmal durch.

Kommen Sie zu eigenen Erkenntnissen!
Jede Woche werden einige Übungsaufgaben gestellt. Versuchen Sie, diese zu lösen, vielleicht auch in Zusammenarbeit mit anderen Studierenden. Geben Sie Ihre Lösungen ab, auch wenn diese unvollständig sind oder Sie nicht sicher sind, inwieweit Ihre Lösungen richtig sind. Aufgaben und Lösungen werden in den *Übungsgruppen* besprochen. Können Sie einmal eine Aufgabe nicht lösen, so versuchen Sie, Ihre Schwierigkeit dabei genau zu lokalisieren, damit Sie gezielt fragen können und die Lösung dann besser verstehen.

Stellen Sie Fragen!
Bei allen oben vorgeschlagenen Aktivitäten können sich Fragen ergeben. Es gibt viele Gelegenheiten, solche zu stellen: vor und nach einer Vorlesung, in deren Pause, in den Übungsgruppen sowie in Sprechstunden.

Vorbemerkungen zur Vorlesung

Im Vergleich zum Analysis-Unterricht in der Schule ist eine Vorlesung an einer Universität sicher präziser, gründlicher und abstrakter. Ich bemühe mich aber, sie im ersten Semester möglichst konkret und nahe am Schulstoff zu gestalten und schwierige Begriffe möglichst spät und behutsam einzuführen. Dadurch soll die Vorlesung auch zeigen, wie der Analysis-Unterricht in der Schule aussehen könnte (und vor etwa 50 Jahren idealerweise auch ausgesehen hat, natürlich ohne vollständige Beweise).

In dieser Vorlesung wird die Analysis *systematisch* entwickelt; dadurch wird die Reihenfolge der wichtigen Begriffe im Vergleich zu deren historischer Entwicklung in etwa umgekehrt (vgl. die historischen Bemerkungen in der Einleitung von [A1]). Als Grundlage der Analysis dienen einige einleuchtende Eigenschaften der *reellen Zahlen,* die zu Beginn der Vorlesung als *Axiome* formuliert werden; alle anderen Aussagen werden dann daraus hergeleitet.

I. Reelle Zahlen und konvergente Folgen

Übersicht über den Inhalt von Kapitel I:

1. Elementare Eigenschaften von $\mathbb{R}$
2. Summenformeln und vollständige Induktion
3. Der binomische Satz
4. Gleichungen und Abbildungen
5. Sinus und Kosinus
6. Intervallschachtelungen und Vollständigkeit der reellen Zahlen
7. Konvergenzbegriff bei Folgen.
8. Dezimalbruchentwicklung reeller Zahlen und Fehlerfortpflanzung bei den arithmetischen Rechenoperationen

1 Reelle Zahlen

Lernziele:

- *Konzept:* Axiomatische Begründung der Analysis
- *Kompetenz:* Rechnungen mit Absolutbeträgen

Fragen: 1. Gibt es rationale Lösungen der Gleichungen $x^2 = 2$, $x^7 = 5$, $x^5 + x + 1 = 0$ *oder* $x^2 = -4$? *Gibt es reelle Lösungen dieser Gleichungen? Warum?*
2. Wie sind die Zahlen 2^{-3}, $2^{3/4}$, $2^{\sqrt{3}}$ *definiert?*
3. Versuchen Sie, die „Lückenlosigkeit“ *von* $\mathbb{R}$ *möglichst präzise zu formulieren!*

Wir besprechen (vgl. [A1], Abschnitt 1)

- Körperaxiome, die Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$
- Anordnungsaxiom
- Absolutbeträge: Definition, grundlegende Eigenschaften, Beispiel ([A1], 1.3-1.6)
- Beschränkte Mengen, Maxima und Minima, Beispiele
- Intervalle
- Unlösbarkeit der Gleichung $x^2 = 2$ in $\mathbb{Q}$ und „Unvollständigkeit“ von $\mathbb{Q}$

Fragen: Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen beschränkt sind:
1. $A := \{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$,
2. $B := \{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ *und*
3. $M := \{1 + x + x^2 + \cdots + x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *für eine gegebene Zahl* $x \in \mathbb{R}$.

2 Summenformeln und vollständige Induktion

Lernziele:

- *Konzepte:* Vollständige Induktion, rekursive Definitionen
- *Resultate:* geometrische, arithmetische und quadratische Summenformel
- *Methoden:* Teleskop-Summen, spezielle „Tricks"
- *Kompetenzen:* Anwendungen der Summenformeln,
  Durchführung von Beweisen mittels Induktion,
  eigene Herleitung von Formeln bzw. Resultaten (schwierig, eher ein Fernziel)

Fragen: 1. Berechnen Sie $1+3$, $1+3+5$ *und* $1+3+5+7$, *leiten Sie eine allgemeine Formel für* $1+3+\cdots+(2n-3)+(2n-1)$ *her und versuchen Sie, diese zu beweisen.*
2. Ein Darlehen wird in monatlichen Raten zu $0,3\%$ *Zinsen zurückgezahlt. Wann ist das Darlehen getilgt, wenn die Tilgung* $0,1\%$ *bzw.* $0,2\%$ *bzw.* $0,3\%$ *pro Monat beträgt ?*

Die arithmetische Summenformel nach C.F. Gauß lautet (vgl. [A1], S.14):

$$\sum_{k=1}^{n} k \;=\; 1+2+3+\cdots+n \;=\; \tfrac{1}{2}\,n\,(n+1)\,. \tag{1}$$

Eine weitere Herleitung der arithmetische Summenformel:
a) Die binomische Formel $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ für $x,y\in\mathbb{R}$ folgt sofort aus den Körperaxiomen. Als Spezialfall ergibt sich

$$(k+1)^2-k^2 \;=\; 2k+1 \quad \text{für} \quad k\in\mathbb{N}\,. \tag{2}$$

Diese Formel kann mit Quadraten veranschaulicht werden.
b) Addiert man die Differenzen in (2) über $k=1,\ldots,n$, so erhält man

$$((n+1)^2-n^2)+(n^2-(n-1)^2)+\cdots+(3^2-2^2)+(2^2-1^2) \;=\; (n+1)^2-1\,,$$

da alle Summanden bis auf den ersten und den letzten sich gegenseitig aufheben. Eine solche Summen nennt man eine *„Teleskopsumme."*
c) Die Summation der Gleichungen (2) liefert also

$$\begin{aligned} (n+1)^2-1 \;&=\; \sum_{k=1}^{n}(2k+1) \;=\; 2\sum_{k=1}^{n}k+n \quad \text{und somit} \\ 2\sum_{k=1}^{n}k \;&=\; (n+1)^2-1-n \;=\; n^2+n \;=\; n(n+1)\,. \end{aligned}$$

Die quadratische Summenformel. Mit einer Variante der obigen Methode berechnen wir nun auch die Summe

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \;=\; 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\,.$$

a) Aus der binomischen Formel für dritte Potenzen ergibt sich insbesondere die Formel

$$(k+1)^3 - k^3 \;=\; 3k^2 + 3k + 1 \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{N}\,. \tag{3}$$

Diese kann mit Würfeln veranschaulicht werden.

b) Wie oben addieren wir nun die Gleichungen (3) über $k = 1, \ldots, n$ und erhalten links wieder eine Teleskopsumme:

$$(n+1)^3 - 1 \;=\; 3 \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3 \sum_{k=1}^{n} k + n\,.$$

c) Mit (1) ergibt sich nach kurzer Rechnung die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \;=\; \tfrac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{4}$$

Diese verwenden wir später zur Berechnung des *Flächeninhalts von Parabelstücken.*

d) Entsprechend kann man auch die Summen höherer Potenzen nacheinander berechnen. Eine „geschlossene Formel“ unter Verwendung von *Bernoulli-Zahlen* findet man in [A1], Abschnitt 41*.

Die geometrische Summenformel lautet (vgl. [A1], (2.1)):

$$(1-q) \sum_{k=0}^{n} q^k \;=\; 1 - q^{n+1} \quad \text{für} \quad q \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{5}$$

Prinzip der vollständigen Induktion, vgl. [A1], 2.1 und 2.2.

Beispiele: Induktionsbeweise der arithmetischen Summenformel (1), der geometrischen Summenformel (5) und der *Dreiecks-Ungleichung*

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} a_k\Big| \;\le\; \sum_{k=1}^{n} |a_k| \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{6}$$

für *endlich viele Summanden* (vgl. [A1],2.3).

Im Gegensatz zur Herleitung von (1) oder (5) erfordert der Induktionsbeweis von (1) oder (5) keinen „Trick“, dafür aber bereits die Kenntnis des Ergebnisses. Dies gilt entsprechend auch für andere Formeln und Abschätzungen in dieser Vorlesung.

Wohlordnungssatz und Induktionsprinzip, [A1], 2.9 - 2.11.

Ratenzahlungen. a) Ein Darlehen D werde in monatlichen Raten $R = rD$ zurückgezahlt; meist liegt r zwischen $0,3\,\%$ und $0,8\,\%$. Die Rate $R = Z + T$ ist die Summe aus Zinsen Z und Tilgung T, wobei die Zinsen mittels eines festen Zinssatzes z, z. B. $z = 0,3\,\%$, aus dem aktuellen Darlehen berechnet werden.

b) Zunächst zahlt man $Z = zD$ Zinsen und $T = R - Z = (r - z)D = tD$ Tilgung. Danach beträgt das Darlehen nur noch $D_1 = D - tD$. Nach einem Monat zahlt man $Z_1 = zD_1 = zD - ztD$ Zinsen; die Tilgung beträgt also

$$T_1 \;=\; R - Z_1 \;=\; rD - zD + ztD \;=\; tD + ztD \;=\; tD(1 + z)\,.$$

c) Nun beträgt das Darlehen nur noch

$$D_2 \;=\; D_1 - T_1 \;=\; D - tD - tD(1 + z) \;=\; D - tD(2 + z)\,;$$

mit den Zinsen $Z_2 = zD_2$ erhält man für die Tilgung

$$\begin{aligned} T_2 &= R - Z_2 \;=\; rD - zD + ztD(2 + z) \;=\; tD\,(1 + 2z + z^2) \\ &= tD\,(1 + z)^2\,. \end{aligned}$$

d) Wir nehmen nun induktiv an, daß für $1 \le k \le n - 1$ nach k Monaten die Tilgung

$$T_k \;=\; tD\,(1 + z)^k \tag{7}$$

beträgt und daß das Darlehen nach n Monaten

$$\begin{aligned} D_n &= D_{n-1} - T_{n-1} \;=\; D_{n-2} - T_{n-2} - T_{n-1} \;=\; \ldots \\ &= D - T - T_1 - \cdots - T_{n-2} - T_{n-1} \end{aligned}$$

noch positiv ist. Nach (7) und der geometrischen Summenformel ist

$$T + T_1 + \cdots + T_{n-1} \;=\; tD \sum_{k=0}^{n-1} (1 + z)^k \;=\; tD\,\tfrac{(1+z)^n - 1}{(1+z) - 1}\,,$$

und daraus ergibt sich

$$D_n \;=\; D - \tfrac{tD}{z}((1 + z)^n - 1)\,. \tag{8}$$

Mit den Zinsen $Z_n = zD_n$ ist dann die nächste Tilgung

$$\begin{aligned} T_n &= R - Z_n \;=\; rD - zD + z\,\tfrac{tD}{z}((1 + z)^n - 1) \\ &= tD + tD((1 + z)^n - 1) \;=\; tD(1 + z)^n\,, \end{aligned}$$

d. h. Formel (7) gilt auch für n. Folglich sind T_n und D_n durch die Formeln (7) und (8) für alle $n \in \mathbb{N}$ gegeben, für die noch $D_{n+1} \ge 0$ gilt.

e) Oft sind Zinssätze nur für etwa 10 Jahre garantiert. Mit $z = 0,003$ und $t = 0,001$ hat man gemäß Formel (8) noch $D_{120} = 0,8558 \cdot D$, bei $t = 0,002$ dagegen $D_{120} = 0,7116 \cdot D$ und bei $t = 0,003$ nur $D_{120} = 0,5674 \cdot D$.

f) Ist der Zinssatz z für die gesamte Laufzeit des Darlehens fest, so läßt sich mittels (8) berechnen, wann dieses zurückgezahlt ist. Für $z = 0,003$ und $t = 0,001$ etwa ist $n = 462$ der maximale Exponent in (8), für den $D_n \ge 0$ gilt; als letzte Rate muß dann noch $D_{462} = 0,0032 \cdot D$ gezahlt werden. Diesen Wert von n kann man durch Ausprobieren finden; einfacher ist dies möglich durch Verwendung des *Logarithmus* (später). Für $t = 0,002$ hat man übrigens $n = 305$ und für $t = 0,003$ nur $n = 231$.

3 Der binomische Satz

Lernziele:

- *Resultate:* Der binomische Satz, eine Abschätzung für Fakultäten
- *Didaktische Kompetenzen:* Verwendung und Vermittlung des binomischen Satzes auf verschiedenen Niveaus

Frage: Ein zu 3% Zinsen pro Jahr angelegtes Kapital vermehrt sich in 12 Jahren um den Faktor $a = 1,03^{12}$. Versuchen Sie, eine möglichst gute Näherung für a im Kopf zu berechnen.

Binomische Formeln. a) Ausgehend von der bekannten binomischen Formel $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ für $x, y \in \mathbb{R}$ liefert weiteres Ausmultiplizieren

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= (x^2+2xy+y^2)(x+y) = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3,\\ (x+y)^4 &= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4,\\ (x+y)^5 &= x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5.\end{aligned}$$

b) Wir möchten für $n \in \mathbb{N}$ eine solche Formel für $(x+y)^n$ finden. Multipliziert man die Klammern aus, so erhält man eine Summe von n-fachen Produkten, wobei aus jeder Klammer der Faktor x oder der Faktor y zu wählen ist.

c) Wählt man aus jeder Klammer den Faktor x, so erhält man den Term x^n. Wählt man aus einer Klammer den Faktor y, aus allen anderen aber den Faktor x, so erhält man einen Term $x^{n-1}y$. Dieser tritt genau n mal auf, da es ja genau n Klammern gibt, aus denen man y wählen kann. Entsprechend hat man auch die Summanden y^n und nxy^{n-1}. Die gesuchte Formel wird also so aussehen:

$$(x+y)^n = x^n + n\,x^{n-1}\,y + \cdots + n\,x\,y^{n-1} + y^n\,, \tag{1}$$

wobei „$\cdots$" eine Summe von Termen $x^{n-k}y^k$ mit $2 \le k \le n-2$ ist.

d) Für $x = 1$ erhalten wir aus (1) sofort die *Bernoullische Ungleichung*

$$(1+y)^n \ \ge\ 1+ny \quad \text{für } \ y \ge 0 \ \text{ und } \ n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Diese gilt sogar für $y \ge -2$ (vgl. [A1], 4.1).

Die genaue Berechnung der „$+\cdots+$" in (1) führt zum *binomischen Satz* unten. Dieser ist in der Mathematik sehr wichtig, für viele Schüler eher schwierig. Wir verwenden ihn daher zunächst sparsam und begnügen uns, wo immer möglich, mit den speziellen Formeln (1) und (2) sowie eventuell (3) unten.

Binomialkoeffizienten und Fakultäten. a) Für $0 \le k \le n$ bezeichnet man die Anzahl der Terme $x^{n-k}y^k$ in (1) als *Binomialkoeffizienten* $\binom{n}{k}$. Offenbar ist $\binom{n}{k}$ die Anzahl der möglichen Ziehungen von k Exemplaren der Zahl y aus der Menge der n Klammern.

b) Im Fall $k = 2$ gibt es für die Wahl des ersten y n Möglichkeiten, für die des zweiten y dann noch $n-1$ Möglichkeiten, insgesamt also $n(n-1)$ Möglichkeiten für die Ziehung von 2 Exemplaren von y. Hierbei wurde aber jedes Ziehungsergebnis *doppelt gezählt,* da es ja bei der Ziehung auf die Reihenfolge nicht ankommt. Folglich gilt $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$, und aus Symmetriegründen ist auch $\binom{n}{n-2} = \binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$.

c) Für $x = 1$ ergibt sich nun aus (1) und b) die folgende Verschärfung der Bernoullische Ungleichung:

$$(1+y)^n \;\ge\; 1 + ny + \tfrac{1}{2}n(n-1)y^2 \quad \text{für} \;\; y \ge 0 \;\; \text{und} \;\; n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

d) Es ist $\binom{49}{6}$ die Anzahl der möglichen Ergebnisse bei der Ziehung der Lottozahlen. Für die Ziehung der 1. Zahl gibt es 49 Möglichkeiten, für die der 2. Zahl dann noch $48, \ldots,$ für die der 6. Zahl noch $49 - 5 = 44$ Möglichkeiten. Jedes solche Ziehungsergebnis, etwa $\{1, 2, \ldots, 6\}$, kann aber mit verschiedenen Reihenfolgen erreicht werden, so daß die Gesamtzahl an Möglichkeiten, $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$, noch durch die Zahl der möglichen Anordnungen einer 6-elementigen Menge dividiert werden muß.

e) Die Überlegungen aus d) gelten entsprechend auch allgemein. Für $1 \le k \le n-1$ hat man

$$\binom{n}{k} \;=\; \tfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\,,$$

wobei im Nenner die Anzahl der möglichen Anordnungen oder *Permutationen* einer k-elementigen Menge steht, die mit $k!$ *(„k-Fakultät")* bezeichnet wird.

3.1 Satz. *(vgl. [A1], 2.4). Für die* Fakultäten *natürlicher Zahlen gilt*

$$n! \;=\; \prod_{k=1}^{n} k \;=\; 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n\,. \tag{4}$$

Man setzt noch $0! = 1$. Die Fakultäten wachsen mit n sehr schnell an; so gilt z. B.

$$\begin{aligned} &2! = 2,\; 3! = 6,\; 4! = 24,\; 5! = 120,\; 6! = 720,\; 7! = 5040, \\ &8! = 40320,\; \ldots,\; 12! = 479001600,\; 16! = 2,09228\ldots \cdot 10^{13}, \\ &30! = 2,65253\ldots \cdot 10^{32},\; 100! = 9,33262\ldots \cdot 10^{157}\,. \end{aligned}$$

Die *exakte* Berechnung von $n!$ gemäß (4) ist für große n selbst für leistungsfähige Computer sehr langwierig. Für die Produkte der ersten n natürlichen Zahlen hat man keine einfache Formel wie (2.1) im Fall der entsprechenden Summen. In Satz 3.4 zeigen wir die grobe Abschätzung

$$(\tfrac{n}{3})^n \;\le\; n! \;\le\; (\tfrac{n}{2})^n \quad \text{für} \;\; n \ge 6\,. \tag{5}$$

Eine etwas bessere Abschätzung findet man in [A1], 6.5. Eine sehr genaue Näherungsformel ist die *Stirlingsche Formel* (vgl. [A1], Abschnitte 36 und 41*), die auch für theoretische Überlegungen der Analysis wichtig ist.

Für die *Binomialkoeffizienten* gilt also

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\ (n-k)!}\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,,\ k = 0,\ldots,n\,. \tag{6}$$

Für $k \in \mathbb{Z}$ mit $k < 0$ oder $k > n$ setzt man noch $\binom{n}{k} = 0$.
Die Anzahl der Ziehungsmöglichkeiten beim Lotto beträgt also

$$\binom{49}{6} = \frac{49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = 49\cdot 47\cdot 46\cdot 3\cdot 44 = 13\,983\,816\,.$$

3.2 Satz (Binomischer Satz). *Für* $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt:*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\, y^k\,. \tag{7}$$

In [A1], 2.7 wird ein Induktionsbeweis angegeben.

Näherungsrechnungen. a) Für $0 \le y < x$ und kleine $q := \frac{y}{x}$ hat man

$$(x+y)^n = x^n\,(1+\tfrac{y}{x})^n \approx x^n\,(1+nq+\tfrac{n(n-1)}{2}\,q^2) \sim x^n\,(1+nq)\,.$$

b) Ein zu 3% Zinsen pro Jahr angelegtes Kapital vermehrt sich in 12 Jahren um den Faktor $a = 1{,}03^{12} = 1{,}42576$. Die Näherungsrechnungen ergeben $a \sim 1 + 12\cdot 0{,}03 = 1{,}36$ und $a \approx 1 + 12\cdot 0{,}03 + 6\cdot 11\cdot 0{,}03^2 = 1{,}4194$.

Pascalsches Dreieck erlaubt Veranschaulichung und rekursive Berechnung der Binomialkoeffizienten, vgl. [A1], 2.6:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}, \quad n \in \mathbb{N}_0\,,\ k = 0,\ldots,n+1\,. \tag{8}$$

Eine weitere Herleitung von Satz 3.1 Zur Berechnung der Anzahl $\binom{n}{k}$ der möglichen Ziehungen von k Zahlen aus der Menge $\{1,\ldots,n\}$ realisieren wir die „Ziehung“ so, daß nach einer Permutation

$$a_1\ \ldots\ a_k \quad a_{k+1}\ \ldots\ a_n$$

der Menge $\{1,\ldots,n\}$ die ersten k Zahlen $\{a_1,\ldots,a_k\}$ gezogen werden. Eine andere Permutation

$$b_1\ \ldots\ b_k \quad b_{k+1}\ \ldots\ b_n$$

der Menge $\{1,\ldots,n\}$ liefert genau dann das gleiche Resultat, wenn die Mengen $\{a_1,\ldots,a_k\}$ und $\{b_1,\ldots,b_k\}$ übereinstimmen; dann stimmen offenbar auch die Mengen $\{a_{k+1},\ldots,a_n\}$ und $\{b_{k+1},\ldots,b_n\}$ überein. Die beiden Permutationen dürfen sich also nur durch eine Vertauschung der Zahlen in der Menge $\{a_1,\ldots,a_k\}$ und eine solche in der Menge $\{a_{k+1},\ldots,a_n\}$ unterscheiden. Nun gibt es $n!$ Permutationen der Menge $\{1,\ldots,n\}$, und für die Vertauschungen innerhalb der beiden Blöcke gibt es $k!\cdot(n-k)!$ Möglichkeiten. Folglich gilt $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\ (n-k)!}$ in Übereinstimmung mit (6).

Wir kommen nun zum Beweis von Abschätzung (5).

3.3 Satz. *Es gilt* $2 \leq (1 + \frac{1}{n})^n \leq 3$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. a) Es ist $(1 + \frac{1}{n})^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2$ nach der *Bernoullischen Ungleichung* (2).
b) Mit dem *binomischen Satz* berechnen wir

$$\begin{aligned} (1 + \tfrac{1}{n})^n &= \sum_{k=0}^{n} \tfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \tfrac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{n}{n} \tfrac{n-1}{n} \cdots \tfrac{n-k+1}{n} \tfrac{1}{k!} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!} = 1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2\cdot 3} + \tfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots \tfrac{1}{2\cdot 3\cdots n} \\ &\leq 1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2\cdot 2} + \tfrac{1}{2\cdot 2\cdot 2} + \cdots \tfrac{1}{2^{n-1}} \leq 3 \end{aligned}$$

aufgrund der *geometrischen Summenformel.* ◇

3.4 Satz. *(vgl. [A1], 4.10): Es gilt Formel (5):* $(\frac{n}{3})^n \leq n! \leq (\frac{n}{2})^n$ *für* $\mathbb{N} \ni n \geq 6$.

Für $n = 100$ hat man $1,94033 \cdot 10^{152} \leq 9,33262 \cdot 10^{157} \leq 7,88861 \cdot 10^{169}$.

4 Abbildungen und Gleichungen

Lernziele:

- *Konzepte:* Abbildungen, Folgen, Gleichungen, abzählbare und überabzählbare Mengen
- *Resultat:* Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar.
- *Methode:* Diagonal-Abzählung
- *Kompetenzen:* Herleitung und Beweis einfacher Aussagen über Abbildungen

Frage: Welche Fragen sind für das Studium einer Gleichung $f(x) = y$ wichtig?

Definition. Es seien M, N Mengen. Unter einer **Abbildung** $f : M \mapsto N$ von M nach N versteht man eine Vorschrift, die jedem Element $x \in M$ genau ein Element $y = f(x) \in N$ zuordnet.

Beispiele, vgl. [A1], 3.2.

Definitionsbereich und Zielbereich. In obiger Definition heißt M *Definitionsbereich* $D(f)$, N *Zielbereich* $Z(f)$ von f. Zwei Abbildungen f, g werden nur dann als *gleich* betrachtet, wenn $D(f) = D(g)$, $Z(f) = Z(g)$ und $f(x) = g(x)$ für alle $x \in D(f)$ gilt.

Graphen dienen zur *Veranschaulichung* von Abbildungen, vgl. [A1], 3.3.

Funktionen sind Abbildungen mit Zielbereich $\mathbb{R}$. Für Funktionen f, g auf M lassen sich *Summe* und *Produkt* einfach *punktweise* definieren:

$$(f+g)(x) \ := \ f(x) + g(x), \quad x \in M; \tag{1}$$
$$(f \cdot g)(x) \ := \ f(x) \cdot g(x), \quad x \in M. \tag{2}$$

Die Menge $\mathcal{F}(M)$ aller Funktionen auf M bildet einen **Vektorraum,** sogar eine *Algebra.* Unter der *„punktweise $\leq$“* Beziehung

$$f \leq g \quad :\Leftrightarrow \quad \forall\, x \in M \ : \ f(x) \leq g(x) \tag{3}$$

wird $\mathcal{F}(M)$ ein *Verband;* die Funktionen $|\,f\,|$, $\max\{f, g\}$ und $\min\{f, g\}$ sind ebenfalls punktweise definiert. Ein *Quotient*

$$(\tfrac{f}{g})(x) \ := \ \tfrac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0, \tag{4}$$

ist nur auf der Menge $M \backslash \{x \in M \mid g(x) = 0\}$ erklärt.

Maxima und Minima von Funktionen und Beispiele, vgl. [A1], 3.8 - 3.9.

Monotonie von Funktionen und Beispiele, vgl. [A1], 3.10 - 3.11.

Folgen. a) Eine Funktion $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ heißt **Folge.** Die Funktionswerte $a_n := f(n)$ heißen *Folgenglieder,* und wir schreiben $f = (a_n)$. Statt $\mathbb{N}$ kann auch etwa $\mathbb{N}_0$ Definitionsbereich einer Folge sein. Obige *Beschränktheits-* und *Monotonie-Begriffe* sind natürlich insbesondere für Folgen erklärt.

Beispiele. a) Die Folge $(a_n) = (3n+1) = (4, 7, 10, 13, \ldots)$ ist monoton wachsend.

b) Die Folge $(a_n) = (\frac{1}{n}) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$ ist monoton fallend und beschränkt mit der unteren Schranke 0 und dem Maximum 1.

c) Die Folge $(a_n) = ((-1)^n) = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$ ist nicht monoton, aber beschränkt mit dem Minimum -1 und dem Maximum 1.

d) Für $0 \le q < 1$ ist die Folge $(a_n) = (q^n)_{n \ge 0} = (1, q, q^2, q^3, \ldots)$ monoton fallend und beschränkt mit der unteren Schranke 0 und dem Maximum 1.

e) Für $0 \le q < 1$ ist die Folge

$$(s_n) \;=\; (\sum_{k=0}^{n} q^k)_{n \ge 0} \;=\; (1, 1+q, 1+q+q^2, \ldots)$$

monoton wachsend und hat das Minimum 1. Sie ist auch nach oben beschränkt mit der oberen Schranke $\frac{1}{1-q}$.

f) Für $0 < q < 1$ betrachten wir die Folge $(a_n) = (nq^n) = (q, 2q^2, 3q^3, \ldots)$. Da die Folgen (n) und (q^n) sich „gegenläufig“ bewegen, ist nicht sofort klar, wie sich die Produktfolge (nq^n) verhält. Sie ist jedoch *beschränkt,* was man mittels der *Bernoullischen Ungleichung* (3.2) einsieht.

Gleichungen. a) Eine wesentliche Motivation für die Entwicklung der Mathematik war und ist die Untersuchung von **Gleichungen.** Diese können mittels einer Abbildung $f : M \mapsto N$ so formuliert werden:

$$f(x) \;=\; y \;. \tag{5}$$

Hierbei sind also eine Abbildung $f : M \mapsto N$ und $y \in N$ gegeben, und *Lösungen* $x \in M$ werden gesucht.

b) Die erste Frage ist natürlich die nach der *Existenz* einer Lösung von Gleichung (5). *Existiert für alle $y \in N$ mindestens eine Lösung $x \in M$,* so heißt die Abbildung $f : M \mapsto N$ *surjektiv.*

c) Die zweite Frage ist die nach der *Eindeutigkeit* von Lösungen der Gleichung (5), d. h. ob es vorkommen kann, daß zu einem $y \in N$ zwei *verschiedene* Lösungen $x \neq x'$ von (5) existieren. Ist dies nicht der Fall, so heißt die Abbildung $f : M \mapsto N$ *injektiv.*

d) Abbildungen, die gleichzeitig injektiv und surjektiv sind, heißen *bijektiv.* In diesem Fall hat die Gleichung (5) für alle $y \in N$ *genau* eine Lösung $x \in M$.

Definition. Eine Abbildung $f : M \mapsto N$ heißt
a) *injektiv*, falls gilt: $\forall\, x, x' \in M : \ f(x) = f(x') \ \Rightarrow \ x = x'$,

b) *surjektiv*, falls gilt: $\forall\, y \in N \ \exists\, x \in M : \ f(x) = y$, und

c) *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.

Definition. Für eine bijektive Abbildung $f : M \mapsto N$ wird die *Umkehrabbildung* $f^{-1} : N \mapsto M$ definiert durch $f^{-1}(y) := x$, wobei $x \in M$ die eindeutige Lösung der Gleichung (5) $f(x) = y$ für $y \in N$ ist.

Feststellungen (vgl. [A1], 3.15). Es seien $M \subseteq \mathbb{R}$ und $f : M \mapsto \mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

a) Dann ist f injektiv und somit $f : M \mapsto f(M)$ sogar bijektiv.

b) Die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(M) \mapsto \mathbb{R}$ ist ebenfalls streng monoton wachsend.

Dies gilt sinngemäß auch für streng monoton fallende Funktionen.

Beispiele, vgl. [A1], 3.16.

Komposition von Abbildungen, vgl. [A1], 3.17 - 3.18.

Mächtigkeit von Mengen, vgl. [A1], 3.19 - 3.26 und 3.28.

zum Abbildungsbegriff. Eine Abbildung $f : M \mapsto N$ ist durch ihren *Graphen*

$$\Gamma(f) := \{(x, y) \,|\, x \in M,\ y = f(x)\} \ = \ \{(x, f(x)) \,|\, x \in M\} \ \subseteq \ M \times N$$

eindeutig festgelegt. Dieser hat die Eigenschaft

$$\forall\, x \in M \ \exists_1\, y \in N \ : \ (x, y) \in \Gamma(f) \,; \tag{6}$$

umgekehrt ist jede Teilmenge von $M \times N$ mit (6) Graph der Abbildung $f : x \mapsto y$. Man identifiziert daher eine Abbildung einfach mit ihrem Graphen und erhält die folgende formale

Definition. Eine *Abbildung* $f : M \mapsto N$ ist eine Teilmenge $f \subseteq M \times N$, für die (6) gilt.

Wir werden allerdings weiterhin die mehr intuitive Vorstellung der ersten Definition beibehalten und f von seinem Graphen $\Gamma(f)$ unterscheiden.

5 Sinus und Kosinus

Lernziele:

- *Konzepte:* Die Funktionen Sinus und Kosinus (intuitiv)
- *Kompetenzen:* Rechnungen mit trigonometrischen Funktionen

Wir beginnen nun mit einer **intuitiven** *Einführung trigonometrischer Funktionen. Winkel* werden stets „im *Bogenmaß* gemessen". Dazu benötigt man die *„Länge eines Kreisbogens".* Dieser Begriff ist sicher sehr anschaulich; seine präzise Fassung ist aber nicht unkompliziert und verwendet u. a. die *Vollständigkeit von* $\mathbb{R}$. Sie wird erst später mit Hilfe der *Integralrechnung* erfolgen, natürlich ohne Verwendung vorher erzielter Erkenntnisse über trigonometrische Funktionen.

Sinus und Kosinus. a) In der elementaren Trigonometrie werden Sinus und Kosinus eines (orientierten) *Winkels* φ folgendermaßen definiert: Man realisiert φ als Winkel zwischen der positiven x-Achse und einer Strecke von $O = (0,0)$ zu einem Punkt $P = (x,y)$ auf der *Kreislinie* $S := \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 \mid \xi^2+\eta^2 = 1\}$ und setzt dann (vgl. Abb. 5a)

$$\sin\varphi := y\,, \quad \cos\varphi := x\,. \tag{1}$$

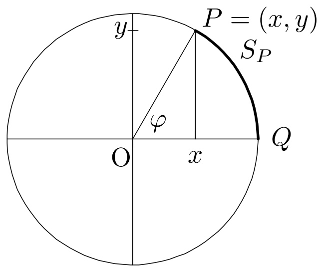

Abb. 5a

Die „Größe" eines Winkels wird durch die Konvention festgelegt, daß ein „voller Winkel" $360°$ beträgt, ein rechter Winkel dann $90°$ usw. Diese Konvention stammt wahrscheinlich aus Babylonien und wurde vermutlich deshalb so getroffen, weil die Zahl 360 nicht zu groß ist und viele ganzzahlige Teiler besitzt.

Bogenmaß und Kreiszahl π . a) In der Analysis möchte man als Definitionsbereich der Funktionen Sinus und Kosinus an Stelle dieser nicht exakt definierten „Winkel" reelle Zahlen verwenden. Zu diesem Zweck „mißt man die Winkel im *Bogenmaß"*, d. h. man ersetzt einen Winkel φ durch die dazu „offenbar" proportionale *Länge* s des *Kreisbogens* S_P zwischen den Punkten $Q := (1,0)$ und $P = (x,y)$. Die Länge eines Halbkreises $S_{(-1,0)}$ wird als **Kreiszahl** π bezeichnet; die Länge 2π der Kreislinie S entspricht dann dem „vollen Winkel" von $360°$.

b) Beachten Sie bitte, daß die *„Länge eines Kreisbogens"* zwar sehr anschaulich sein mag, aber noch nicht exakt definiert wurde. Näherungen für die *irrationale* Zahl π (vgl. **??**) konstruieren wir in 8 und in 17. Bessere Näherungsverfahren (vgl. dazu etwa [A1], Abschnitt 30*) liefern

$$\pi \;=\; 3,14159265358979323846264338327950288 4197\ldots .$$

Periodische Fortsetzung. Durch mehrfaches Umlaufen der Kreislinie, auch in negativer Richtung (d. h. im Uhrzeigersinn), kann man beliebige reelle Winkel bzw. Bogenlängen erhalten. Wie setzen daher

$$\sin(s+2\pi k) \;=\; \sin s \;\text{ und }\; \cos(s+2\pi k) \;=\; \cos s \;\text{ für }\; s \in [0,2\pi] \;\text{ und }\; k \in \mathbb{Z}\,. \qquad (2)$$

Die Funktionen Sinus und Kosinus (vgl. Abb. 5b) sind dann 2π *-periodisch* auf $\mathbb{R}$, d. h. es gilt

$$\sin(s+2\pi) \;=\; \sin s\,, \quad \cos(s+2\pi) \;=\; \cos s\,, \quad s \in \mathbb{R}\,. \qquad (3)$$

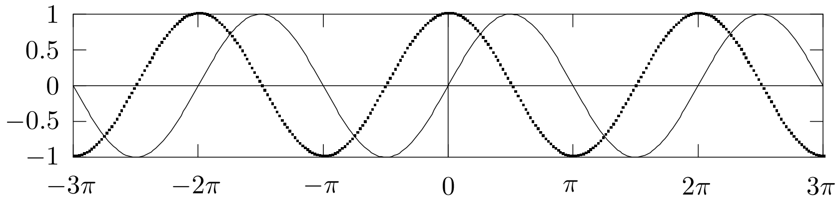

Abb. 5b: Sinus und Kosinus (gepunktet)

Weitere Eigenschaften. a) Nach Konstruktion gilt offenbar

$$\sin^2 s + \cos^2 s \;=\; 1 \quad \text{für} \quad s \in \mathbb{R}\,, \qquad (4)$$

insbesondere also

$$|\sin s\,|\,,\ |\cos s\,| \le 1 \quad \text{für} \quad s \in \mathbb{R}\,. \qquad (5)$$

b) Es ist Sinus eine *ungerade* Funktion, Kosinus eine *gerade* Funktion, d. h. man hat

$$\sin(-s) \;=\; -\sin s\,, \quad \cos(-s) \;=\; \cos s\,, \quad s \in \mathbb{R}\,. \qquad (6)$$

c) Den Definitionen und Abb. 5a entnimmt man leicht

$$\sin(s-\tfrac{\pi}{2}) \;=\; -\cos s\,, \quad \cos(s-\tfrac{\pi}{2}) \;=\; \sin s\,, \quad s \in \mathbb{R}\,, \qquad (7)$$

d. h. die Graphen von Sinus bzw. Kosinus gehen durch Verschiebung um $\pm\frac{\pi}{2}$ auseinander hervor (vgl. Abb. 5b).

5.1 Satz. *Für Sinus und Kosinus gelten die* Funktionalgleichungen

$$\sin(s+t) \;=\; \sin s\,\cos t \;+\; \cos s\,\sin t\,, \quad s,t \in \mathbb{R}\,, \qquad (8)$$
$$\cos(s+t) \;=\; \cos s\,\cos t \;-\; \sin s\,\sin t\,, \quad s,t \in \mathbb{R}\,. \qquad (9)$$

Diese sind für Rechnungen mit trigonometrischen Funktionen grundlegend; natürlich ist (7) ein Spezialfall von (8) und (9). Wir geben hier zunächst eine „geometrische Begründung“ für den Fall $0 < s,t$ und $s+t < \frac{\pi}{2}$. Ein exakter Beweis ist natürlich erst nach einer exakten Definition von Sinus und Kosinus möglich, kann dann aber mit Hilfe der Differential- und Integralrechnung recht leicht geführt werden.

6 Wurzeln und Intervallschachtelungen

Lernziele:

- *Konzepte:* Vollständigkeit von $\mathbb{R}$, monotone Nullfolgen
- *Resultate:* Existenz von Quadratwurzeln positiver reeller Zahlen,
  Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist überabzählbar.
- *Methode:* Intervallhalbierungsverfahren

Frage: Finden Sie eine rationale Zahl $c > 0$ mit $|\, c^2 - 2 \,| < 10^{-8}$.

Die *Existenz von Quadratwurzeln* wird durch den *Satz des Pythagoras* nahegelegt, allerdings ist die Gleichung $x^2 = 2$ in $\mathbb{Q}$ unlösbar. Allgemeiner gilt:

6.1 Satz. *Für $m \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{N}$ ist jede rationale Lösung der Gleichung $x^m = a$ eine* ganze *Zahl.*

Beweis. Man kann $x > 0$ annehmen und $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ als einen *gekürzten* Bruch mit $p, q \in \mathbb{N}$ schreiben. Aus $x^m = a$ folgt dann $p^m = aq^m$, und q ist ein Teiler von p^m. Da aber p und q *teilerfremd* sind, ist dies nur für $q = 1$ möglich. $\diamond$

Intervallhalbierungsverfahren. a) Es sei eine reelle Zahl $c > 0$ gegeben, z. B. $c = 2$. Man wählt Zahlen $0 \le a_0 < b_0$ mit $a_0^2 \le c \le b_0^2$ und betrachet das kompakte Intervall $J_0 := [a_0, b_0]$. Im Fall $c > 1$ kann man etwa $a_0 = 1$, $b_0 = c$ wählen, im Fall $c < 1$ etwa $a_0 = 0$, $b_0 = 1$.

b) Nun betrachtet man den Mittelpunkt $m_0 := \frac{1}{2}(a_0+b_0)$ von J_0. Ist $m_0^2 = c$, so ist eine Wurzel von c gefunden. Für $m_0^2 > c$ bzw. $m_0^2 < c$ definiert man $J_1 := [a_0, m_0]$ bzw. $J_1 := [m_0, b_0]$. Für $J_1 =: [a_1, b_1]$ gilt dann $J_1 \subseteq J_0$, $|\, J_1 \,| = \frac{1}{2} |\, J_0 \,|$ und $a_1^2 < c < b_1^2$.

c) Man wendet die Überlegungen aus b) auf J_1 statt J_0 an und fährt rekursiv entsprechend fort. Das Verfahren bricht ab, oder man erhält eine *Intervallschachtelung,* d. h. eine Folge

$$J_1 \supseteq J_2 \supseteq \ldots \supseteq J_n \supseteq J_{n+1} \supseteq \ldots \tag{1}$$

kompakter Intervalle $J_n = [a_n, b_n]$ mit $a_n^2 < c < b_n^2$ und $|\, J_n \,| = 2^{-n} |\, J_0 \,|$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

d) Für $c = 2$ und $J_0 = [1, 2]$ beispielsweise erhält man folgende Werte:

n	a_n	b_n
1	1	$1,5$
2	$1,25$	$1,5$
3	$1,375$	$1,5$
4	$1,375$	$1,4375$
5	$1,40625$	$1,4375$
6	$1,40625$	$1,421875$

e) Das Intervallhalbierungsverfahren liefert auch Näherungslösungen für m-te Wurzeln und kann auch in wesentlich allgemeineren Situationen benutzt werden.

In (1) hat man also eine absteigende Folge kompakter Intervalle, deren Längen in jedem Schritt halbiert werden. Da die reellen Zahlen die Zahlengerade „vollständig ausfüllen", also keine „Lücken" besitzen sollen, sollte es genau eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ geben, die in allen Intervallen J_n enthalten ist, und für diese sollte dann $x^2 = c$ gelten.

Diese **Vollständigkeit** oder „Lückenlosigkeit" der Zahlengeraden wird nun durch folgendes Axiom für $\mathbb{R}$ präzisiert:

Axiom I (Intervallschachtelungsprinzip)

Es sei $(J_n := [a_n, b_n])$ eine Folge kompakter Intervalle mit (1)

$$J_1 \supseteq J_2 \supseteq \ldots \supseteq J_n \supseteq J_{n+1} \supseteq \ldots .$$

Dann existiert eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in J_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir untersuchen nun, wann es nur *eine einzige* solche Zahl gibt. Die Intervallängen $\ell_n := |\,J_n\,|$ bilden eine *monoton fallende Folge.* Gibt es nun zwei verschiedene Zahlen im Durchschnitt der Intervalle J_n, etwa $x < y$, so gilt mit $\varepsilon := y - x > 0$ die Aussage

$$\exists\, \varepsilon > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ :\ \ell_n \geq \varepsilon\,. \tag{2}$$

Die Negation von (2) impliziert also, daß es *genau eine* Zahl im Durchschnitt der Intervalle J_n gibt. Dies liefert den folgenden wichtigen Begriff:

Definition. *Eine monoton fallende Folge (ℓ_n) positiver Zahlen heißt* Nullfolge, *falls folgendes gilt:*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n \in \mathbb{N}\ :\ \ell_n < \varepsilon\,. \tag{3}$$

Man schreibt dann $\lim\limits_{n\to\infty} \ell_n = 0$ oder $\ell_n \to 0$.

Bedingung (3) bedeutet also, daß es zu jeder noch so kleinen, aber positiven Zahl $\varepsilon > 0$ einen Index $n \in \mathbb{N}$ gibt, für den $0 \leq \ell_n < \varepsilon$ ist. Wegen der Monotonie der Folge gilt dann sogar $0 \leq \ell_m < \varepsilon$ für alle Indizes $m \geq n$. Aus Axiom I ergibt sich nun sofort:

6.2 Satz (Intervallschachtelungsprinzip). *Es sei* $(J_n := [a_n, b_n])$ *eine Folge kompakter Intervalle mit*

$$J_1 \supseteq J_2 \supseteq \ldots \supseteq J_n \supseteq J_{n+1} \supseteq \ldots$$

und $|\, J_n \,| \to 0$. *Dann existiert genau eine Zahl* $x \in \mathbb{R}$ *mit* $x \in J_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Nun müssen wir klären, welche Folgen wirklich Nullfolgen sind; insbesondere sollte dies für die Folgen $|\, J_n \,| = 2^{-n} |\, J_0 \,|$ der Fall sein, die sich mittels Intervallhalbierungen ergeben. Es gilt $n \leq 2^n$ und somit $2^{-n} \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$; dies ergibt sich sofort induktiv oder auch aus der Bernoullischen Ungleichung (3.2). Für zunächst $|\, J_0 \,| \leq 1$ reicht es daher, $\frac{1}{n} \to 0$ zu zeigen. Für diese Folge ist (3) äquivalent zu

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n \in \mathbb{N} \ :\ \tfrac{1}{n} < \varepsilon$$

oder, mit $C = \frac{1}{\varepsilon}$, zu

$$\forall\, C > 0\ \exists\, n \in \mathbb{N} \ :\ n > C\,.$$

Es gilt also $\frac{1}{n} \to 0$ genau dann, wenn $\mathbb{N}$ *unbeschränkt* ist. Wegen $\frac{p}{q} < p + 1$ für $p, q \in \mathbb{N}$ hat $\mathbb{N}$ sicher keine obere Schranke in $\mathbb{Q}$, doch läßt sich mit Hilfe der bisherigen Axiome nicht beweisen, daß es auch in $\mathbb{R}$ keine solche obere Schranke gibt, daß es also in $\mathbb{R}$ *keine „unendlich großen Zahlen“* (und auch keine „unendlich kleinen Zahlen“) gibt. Es wird daher als letztes Axiom für $\mathbb{R}$ das *Axiom des Archimedes* postuliert:

Axiom A $\mathbb{N}$ *ist unbeschränkt.*

Damit ist dann also $(\frac{1}{n})$ wirklich eine Nullfolge.

Bemerkung: Präzise Definitionen wie (3) für Grenzprozesse wurden erst im 19. Jahrhundert von K. Weierstraß eingeführt. Zuvor waren intuitive Argumente mit „unendlich kleinen“ und „unendlich großen Zahlen“ üblich. Im Jahre 1960 konstruierte A. Robinson einen Erweiterungskörper $^*\mathbb{R}$ *von* $\mathbb{R}$, *in dem die Körperaxiome, das Anordnungsaxiom und Axiom I gelten, nicht aber Axiom A, der also auch „unendlich kleine“ und „unendlich große Zahlen“ enthält. Im Rahmen der darauf basierenden „Non-Standard Analysis“ sind viele der historischen intuitiven Argumente tatsächlich gültig; nach meiner Meinung ist die Non-Standard Analysis wegen der doch komplizierten Konstruktion von* $^*\mathbb{R}$ *für eine Anfängervorlesung (und erst recht für den Schulunterricht) allerdings nicht geeignet.*

6.3 Feststellung. *E sei* (ℓ_n) *eine monoton fallende Folge positiver Zahlen mit*

$$\exists\, C > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N} \ :\ 0 \leq \ell_n \leq C \cdot \tfrac{1}{n}\,. \tag{4}$$

Dann ist (ℓ_n) *eine Nullfolge.*

Beweis. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es nach Axiom A einen Index $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{C}{\varepsilon}$. Dann folgt sofort $\ell_n \leq C \cdot \frac{1}{n} < \varepsilon$ für dieses n. ◇

Quadratwurzeln. a) Es sei eine reelle Zahl $c > 0$ gegeben. Das obige Intervallhalbierungsverfahren liefert eine Folge kompakter Intervalle $J_n = [a_n, b_n]$ mit $a_n^2 \le c \le b_n^2$ und $|J_n| = 2^{-n}|J_0|$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wegen $2^{-n}|J_0| \le |J_0| \cdot \frac{1}{n}$ gilt $|J_n| \to 0$ nach Feststellung 1, und nach Satz 6.2 gibt es genau eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $a_n \le x \le b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Auch die Intervalle $I_n := [a_n^2, b_n^2]$ bilden eine Intervallschachtelung, und offenbar liegen sowohl x^2 wie auch c im Durchschnitt aller I_n. Wegen

$$b_n^2 - a_n^2 \;=\; (b_n + a_n)(b_n - a_n) \;\le\; 2b_1 |J_n| \;\le\; 2b_1 |J_0| \cdot \tfrac{1}{n}$$

gilt auch $|I_n| \to 0$. Folglich kann *nur eine* Zahl im Durchschnitt aller I_n liegen, und das impliziert nun $x^2 = c$. Wir haben somit gezeigt:

6.4 Satz. *Zu jeder reellen Zahl $c \ge 0$ gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $x \ge 0$ mit $x^2 = c$. Diese heißt* Quadratwurzel, *kurz* Wurzel *von c, Notation: $x = \sqrt{c}$.*

Beweis. Die Existenz der Quadratwurzel haben wir schon bewiesen. Diese ist eindeutig, da aus $0 \le x < y$ sofort $x^2 < y^2$ folgt. ◇

Wurzelfunktion. Die Potenzfunktion $p_2 : [0,\infty) \mapsto [0,\infty)$, $x \mapsto x^2$, ist also bijektiv. Ihre Umkehrfunktion ist die auf $[0,\infty)$ definierte *Wurzelfunktion* $w_2 : x \mapsto \sqrt{x}$. Nach Feststellung b) in Abschnitt 4 (vgl. [A1], 3.15) ist auch die Wurzelfunktion streng monoton wachsend.

Die mittels des Intervallhalbierungsverfahrens konstruierten Näherungen streben recht langsam gegen $\sqrt{c}$. Im nächsten Abschnitt wird ein wesentlich schneller konvergentes Verfahren zur Berechnung von Wurzeln vorgestellt.

Quadratische Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \ne 0$ können mittels Division durch a in die Form

$$x^2 + 2px + q \;=\; 0 \tag{5}$$

gebracht werden. Wegen

$$x^2 + 2px + q \;=\; 0 \;\Leftrightarrow\; (x+p)^2 \;=\; p^2 - q$$

ist (5) genau dann in $\mathbb{R}$ lösbar, wenn $p^2 \ge q$ ist. Die beiden Lösungen sind dann gegeben durch

$$x_\pm \;=\; -p \pm \sqrt{p^2 - q}\,; \tag{6}$$

im Fall $p^2 = q$ fallen sie zu einer Lösung zusammen. Man hat

$$x_+ + x_- \;=\; -2p \quad \text{und} \quad x_+ \cdot x_- \;=\; q\,, \tag{7}$$

und daraus ergibt sich die Faktorisierung

$$x^2 + 2px + q \;=\; (x - x_+)\,(x - x_-) \quad \text{für alle} \;\; x \in \mathbb{R}\,. \tag{8}$$

Die Unlösbarkeit etwa der Gleichung $x^2 + 1 = 0$ in $\mathbb{R}$ gibt Anlaß zur Erweiterung der Zahlengeraden $\mathbb{R}$ zur *Zahlenebene* $\mathbb{C}$ der *komplexen Zahlen.*

Nach Satz 6.1 gilt $\sqrt{2} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Aus der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ wird nun die Existenz von weit mehr *irrationalen Zahlen* gefolgert:

6.5 Satz. *(vgl. [A1], 6.21). Jedes offene Intervall* $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ *ist* überabzählbar.

Insbesondere ist $\mathbb{R}$ selbst überabzählbar. Da $I \cap \mathbb{Q}$ abzählbar ist, muß auch $I\backslash\mathbb{Q}$ überabzählbar sein. Es gibt also *„mehr“ irrationale als rationale Zahlen.* Jedes offene Intervall enthält irrationale Zahlen, diese *„liegen“* also *„dicht“* in $\mathbb{R}$. Dies gilt auch für die rationalen Zahlen:

6.6 Feststellung. *(vgl. [A1], 6.22). Zu* $x \in \mathbb{R}$ *gibt es genau eine ganze Zahl* $m \in \mathbb{Z}$ *mit* $m \leq x < m + 1$, *die* Gauß-Klammer $m =: [x]$ *von* x.

6.7 Satz. *(vgl. [A1], 6.23). Jedes offene Intervall* $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ *enthält sowohl rationale als auch irrationale Zahlen.*

7 Konvergente Folgen

Lernziele:

- *Konzepte:* Grenzwertbegriff bei Folgen,
  Wachstumsgeschwindigkeit von Folgen
- *Resultat:* Monotone beschränkte Folgen sind konvergent.
- *Methoden:* Heron-Verfahren,
  Erweiterung von Differenzen von Quadratwurzeln
- *Kompetenzen:* Herleitung und Beweis einfacher Aussagen über Folgen,
  Bestimmung von Grenzwerten

Konvergenz von Folgen. a) Wir wollen nun den im letzten Abschnitt im Hinblick auf Intervallschachtelungen definierten Begriff der Nullfolge auch auf nicht monotone Folgen erweitern. Dazu muß Bedingung (6.3)

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n \in \mathbb{N}\ :\ \ell_n < \varepsilon\,.$$

abgeändert werden; sie wird ja z. B. von der Folge

$$1,\ \tfrac{1}{2},\ 1,\ \tfrac{1}{3},\ 1,\ \tfrac{1}{4},\ 1,\ \tfrac{1}{5},\ 1,\ \tfrac{1}{6},\ \ldots$$

erfüllt, die aber offenbar keine Nullfolge ist. Im Fall einer *monoton fallenden* Folge *positiver* Zahlen impliziert $\ell_{n_0} < \varepsilon$ für einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ sogar $\ell_n < \varepsilon$ für alle Indizes $n \geq n_0$. Für eine *beliebige* Folge (a_n) *positiver* Zahlen muß diese Eigenschaft einfach zusätzlich gefordert werden:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_0\ :\ a_n < \varepsilon\,.$$

b) Eine Folge (a_n) in $\mathbb{R}$, die positive und negative Werte annehmen kann, heißt *Nullfolge,* falls $(|\,a_n\,|)$ eine Nullfolge ist, falls also gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_0\ :\ |\,a_n\,| < \varepsilon\,. \tag{1}$$

c) Schließlich heißt eine Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ *konvergent* gegen einen *Grenzwert* oder *Limes* $a \in \mathbb{R}$, falls $(a_n - a)$ eine Nullfolge ist:

Definition. *Eine Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ heißt* **konvergent** *gegen einen* **Grenzwert** *oder* **Limes** $a \in \mathbb{R}$, *falls folgendes gilt:*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_0\ :\ |\,a_n - a\,| < \varepsilon\,. \tag{2}$$

Man schreibt $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *oder* $a_n \to a$.
Nicht konvergente Folgen heißen divergent.

Die Konvergenz $a_n \to a$ bedeutet also, daß für jedes gegebene $\varepsilon > 0$ ab einem gewissen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ alle Folgenglieder in dem Intervall mit Länge 2ε um a liegen müssen. Der Index $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ hängt natürlich von ε (und von der Folge) ab.

7.1 Beispiele. a) Aufgrund von Axiom A gilt $\frac{1}{n} \to 0$. Weiter hat man auch $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$.

b) Die Folge $((-1)^n)$ ist divergent: Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt ja $|\, a - (-1)^n \,| \geq 1$ für alle geraden oder für alle ungeraden n.

7.2 Feststellung. *(vgl. [A1], 5.3). Eine Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ hat* höchstens *einen Grenzwert.*

7.3 Feststellung. *a) Es seien (c_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$. Es gebe eine* Nullfolge *(a_n) und eine Konstante $C \geq 0$ mit*

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_0 \ : \ |\, c_n - c \,| \ \leq \ C\,|\, a_n \,| \,. \tag{3}$$

Dann folgt $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$.

b) Es seien (a_n) eine Nullfolge und (b_n) eine beschränkte Folge. Dann ist auch $(a_n \cdot b_n)$ eine Nullfolge.

Beweis. a) Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|\, a_n \,| < \frac{\varepsilon}{C}$ für alle $n \geq n_1$. Für $n \geq n_2 := \max\{n_0, n_1\} \in \mathbb{N}$ gilt dann $|\, c_n - c \,| \leq C\,|\, a_n \,| < \varepsilon$.

b) Es gibt $C \geq 0$ mit $|\, b_n \,| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher ist $|\, a_n b_n \,| \leq C\,|\, a_n \,|$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und die Behauptung folgt sofort aus a). ◇

7.4 Beispiele. a) Für $k \in \mathbb{N}$ gilt $0 \leq \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $\frac{1}{n^k} \to 0$.

b) Man hat $|\, 3 + (-1)^n \,| \leq 4$ für alle $n \in \mathbb{N}$; folglich gilt $\frac{3+(-1)^n}{\sqrt{n}} \to 0$.

c) Zu einer Intervallschachtelung $(J_n = [a_n, b_n])$ kompakter Intervalle gibt es nach Axiom I eine reelle Zahle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in J_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Offenbar ist dann stets $|\, x - a_n \,| \leq |\, J_n \,| = b_n - a_n$ und auch $|\, b_n - x \,| \leq |\, J_n \,|$; gilt also $|\, J_n \,| \to 0$, so hat man

$$x \ = \ \lim_{n\to\infty} a_n \ = \ \lim_{n\to\infty} b_n \,. \tag{4}$$

Insbesondere folgt die Eindeutigkeitsaussage von Satz 5.2 auch aus Feststellung 7.2.

d) Aufgrund von Satz 5.5 gibt es zu jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ Folgen (r_n) in $\mathbb{Q}$ und (s_n) in $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ mit $r_n \to x$ und $s_n \to x$.

7.5 Feststellung. *(vgl. [A1], 5.6). Konvergente Folgen $a_n \to a$ sind beschränkt.*

7.6 Beispiele. a) Die Umkehrung von Feststellung 7.5 gilt natürlich nicht, wie etwa das Beispiel $(a_n) = ((-1)^n)$ zeigt. Ein anderes Beispiel ist die Folge $(\sin n)$, die zwischen -1 und 1 in unübersichtlicher Weise *oszilliert.* Man kann zeigen, daß die Folgenglieder jeder Zahl $x \in [-1, 1]$ „beliebig nahe kommen", d. h. zu jeder Zahl $x \in [-1, 1]$ und $\varepsilon > 0$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $|\, x - \sin n \,| < \varepsilon$ (vgl. dazu [A1], Satz 7.5*).

b) Nach Axiom A ist die Folge (n) unbeschränkt, also divergent. Dies gilt etwa auch für die Folgen $((-1)^n \cdot n)$, (n^2) oder $(n^3 - 5\,n\,\cos n)$.

c) Auch die Folge $(a_n := \sqrt{n})$ ist unbeschränkt. Trotzdem gilt für die Differenzen der Folgenglieder

$$0 \le \; a_{n+1} - a_n \; = \; \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \; = \; \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \; \le \; \frac{1}{2\sqrt{n}} \to 0\,.$$

Bemerkung: In Beispiel 3 c) wurde eine Differenz $\sqrt{A} - \sqrt{B}$ als Bruch mit Nenner 1 aufgefaßt und mit $\sqrt{A} + \sqrt{B}$ „erweitert". Dieser Trick ist auch in ähnlichen Situationen nützlich, z. B. im Beweis von Satz 7.12 unten.

7.7 Beispiele. a) Für $q \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Folge (q^n). Für $q = 1$ gilt $q^n \to 1$, für $q = -1$ ist $(q^n) = ((-1)^n)$ divergent. Für $|\,q\,| > 1$ schreibt man $|\,q\,| = 1 + h$ mit $h > 0$. Es folgt $|\,q^n\,| = |\,q\,|^n \ge 1 + nh$ nach der Bernoullischen Ungleichung (3.2); (q^n) ist also unbeschränkt und somit divergent.

b) Für $|\,q\,| < 1$ ist, wiederum nach der Bernoullischen Ungleichung, die Folge $(n \cdot q^n)$ *beschränkt* (vgl. Beispiel f) auf S. 11). Aufgrund von Feststellung 7.3 b) ist daher $(q^n) = (n \cdot q^n) \cdot (\frac{1}{n})$ eine Nullfolge.

c) Allgemeiner wird nun induktiv gezeigt, daß die Folge $(n^k\, q^n)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $q \in (-1,1)$ beschränkt ist:

Für $k = 0$ ist dies klar, für $k = 1$ nach b) richtig. Nun gelte die Behauptung für ein $k \in \mathbb{N}$, und es sei $q \in (-1,1)$ gegeben. Wir wählen $r \in \mathbb{R}$ mit $|\,q\,| < r < 1$, z. B. $r := \frac{|\,q\,|+1}{2}$, und setzen $p := \frac{q}{r}$. Dann gilt auch $p \in (-1,1)$, und es ist $q = p \cdot r$. Wegen

$$n^{k+1}\, q^n \quad = \quad (n\, r^n) \cdot (n^k\, p^n)$$

ist dann auch $(n^{k+1}\, q^n)$ als Produkt zweier beschränkter Folgen beschränkt.

d) Für $k \in \mathbb{N}_0$ und $q \in (-1,1)$ ist also die Folge $(n^{k+1}\, q^n)$ beschränkt; nach Feststellung 7.3 b) ist daher $(n^k\, q^n) \; = \; (n^{k+1}\, q^n) \cdot (\frac{1}{n})$ eine Nullfolge. Wir haben somit bewiesen:

$$\forall\, k \in \mathbb{N}_0 \; \forall\, q \in (-1,1) \; : \; \lim_{n\to\infty} n^k \cdot q^n \; = \; 0\,. \tag{5}$$

e) Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$. Zum Beweis wählt man $\ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell \ge |\,a\,|$ und erhält für alle $n > \ell$:

$$|\,\tfrac{a^n}{n!}\,| \; = \; \tfrac{|\,a\,|}{1} \cdot \tfrac{|\,a\,|}{2} \cdots \tfrac{|\,a\,|}{\ell} \cdot \tfrac{|\,a\,|}{\ell+1} \cdot \tfrac{|\,a\,|}{\ell+2} \cdots \tfrac{|\,a\,|}{n} \; \le \; \tfrac{|\,a\,|^\ell}{\ell!} \cdot \tfrac{|\,a\,|}{n} \to 0\,.$$

Aussage (5) bedeutet, daß für jede Zahl $a > 1$ und jede Potenz $k \in \mathbb{N}$ „die Folge (a^n) schneller gegen ∞ strebt als die Folge (n^k)"; in der Tat gilt ja $\frac{n^k}{a^n} \to 0$. Nach Beispiel 4 e) „strebt die Folge $(n!)$ noch schneller gegen ∞." Diese bequeme Sprechweise für gewisse divergente Folgen präzisieren wir so:

Definition. *a) Eine Folge* $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ strebt gegen $+\infty$, *falls* $a_n > 0$ *ab einem* $n_0 \in \mathbb{N}$ *ist und* $\frac{1}{a_n} \to 0$ *gilt. Ist dies der Fall, so schreiben wir* $a_n \to +\infty$.

b) Eine Folge $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ strebt gegen $-\infty$, *Notation* $a_n \to -\infty$, *falls die Folge* $(-a_n)$ *gegen* $+\infty$ *strebt.*

Die Symbole $\pm\infty$ sind *keine* reellen Zahlen. Manchmal ist es jedoch bequem, $\mathbb{R}$ durch sie zur Menge

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} \tag{6}$$

zu erweitern. Dann sollen einige einleuchtende Regeln gelten, etwa

$$-\infty < x < +\infty\,,\ x \pm \infty = \pm\infty\,,\ \frac{x}{\pm\infty} = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}\,,$$
$$x \cdot \pm\infty = \pm\infty \ \text{ für } x > 0\ ,\quad x \cdot \pm\infty = \mp\infty \ \text{ für } x < 0\,.$$

Beachten Sie, daß einige Ausdrücke, wie etwa $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^∞ oder $\infty - \infty$ *nicht definiert* sind.

Wachstumsgeschwindigkeit von Folgen. Es ist für die Analysis sehr wichtig, die *Wachstumsgeschwindigkeit* von Folgen $a_n \to +\infty$ zu erfassen. Eine Folge (b_n) strebt *schneller* gegen $+\infty$ als (a_n), falls $\frac{a_n}{b_n} \to 0$ gilt. In der folgenden Liste strebt jede Folge schneller nach $+\infty$ als die vorhergehende:

$$\text{a) } (n^k)\,,\ k \in \mathbb{N}\,;\quad \text{b) } (a^n)\,,\ a > 1\,;\quad \text{c) } (n!)\,;\quad \text{d) } (n^n)\,;\quad \text{e) } 2^{n^2}\,.$$

Die beiden ersten Behauptungen gelten aufgrund obiger Beispiele 7.7. Weiter hat man offenbar $\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n}{n} \le \frac{1}{n} \to 0$ sowie $\frac{n^n}{2^{n^2}} = \left(\frac{n}{2^n}\right)^n \le \frac{n}{2^n} \to 0$ nach (5).

Konvergenz ist mit den *algebraischen Operationen verträglich* (vgl. [A1], 5.8):

7.8 Satz. *Es seien* (a_n), (b_n) *Folgen mit* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

a) Dann folgt $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.

b) Für $b \ne 0$ *ist auch* $b_n \ne 0$ *für große* n, *und es gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

7.9 Beispiele. a) Zur Berechnung eines Grenzwertes von Brüchen kürzt man durch den am schnellsten gegen ∞ strebenden Term:

$$\frac{2 - n\sqrt{n} + 3n^2}{4n + 7n^2} = \frac{\frac{2}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}} + 3}{\frac{4}{n} + 7} \to \frac{0 - 0 + 3}{0 + 7} = \frac{3}{7}\,,$$
$$\frac{n^5 2^n - 4n^9 + 8}{2n - 3^n} = \frac{n^5\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{4n^9}{3^n} + \frac{8}{3^n}}{\frac{2n}{3^n} - 1} \to \frac{0 - 0 + 0}{0 - 1} = 0\,,$$
$$\frac{7^n \sin n + 5\,n!}{n^n + n^3} = \frac{(\frac{7}{n})^n \sin n + 5\frac{n!}{n^n}}{1 + n^{3-n}} \to \frac{0 + 0}{1 + 0} = 0\,.$$

b) Im Fall $a = b = 0$ kann keine allgemeine Aussage über das Verhalten der Quotienten a_n/b_n gemacht werden. Als Beispiel diene etwa $b_n = 1/n^2 \to 0$. Für $a_n = 1/n^3$ gilt $a_n/b_n = 1/n \to 0$, für $a_n = c/n^2$ gilt $a_n/b_n = c \to c$, und für $a_n = 1/n$ ist $(a_n/b_n = n)$ divergent.

Unendliche Reihen. a) Wegen $q^n \to 0$ für $|\,q\,| < 1$ und Satz 7.8 ergibt sich aus der geometrischen Summenformel (2.5) die wichtige Aussage

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = \tfrac{1}{1-q}\,, \quad |\,q\,| < 1\,. \tag{7}$$

Die „Aufsummierung unendlich vieler positiver Zahlen“ liefert hier also einen *endlichen Wert,* die *Summe der geometrischen Reihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$.

b) Für eine Folge (a_k) in $\mathbb{R}$ betrachtet man die **unendliche Reihe,** kurz: **Reihe**

$$\sum_{k\geq 1} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\,. \tag{8}$$

Diese heißt **konvergent,** falls die Folge der *Partialsummen* $(s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k)$ konvergiert. In diesem Fall heißt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := s := \lim_{n\to\infty} s_n \tag{9}$$

die *Summe* der Reihe. Nicht konvergente Reihen heißen *divergent.* Unendliche Reihen behandeln wir später ausführlich.

7.10 Feststellung. *(vgl. [A1], 5.4). Für die Folgen* (a_n), (b_n), (c_n) *in* $\mathbb{R}$ *gelte*

$$\exists\; n_0 \in \mathbb{N}\; \forall\; n \geq n_0 : \; a_n \leq c_n \leq b_n \,. \tag{10}$$

Aus $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$ *folgt dann auch* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$.

Beachten Sie bitte, daß die Folgen in Feststellung 7.10 nicht monoton sein müssen.

Konvergenz ist auch mit *Absolutbetrag* und *Ordnung* auf $\mathbb{R}$ *verträglich:*

7.11 Feststellung. *(vgl. [A1], 5.10). a) Aus* $a_n \to a$ *folgt stets auch* $|\,a_n\,| \to |\,a\,|$.

b) Es seien (a_n), (b_n) *Folgen mit* $a_n \leq b_n$ *ab einem* $n_0 \in \mathbb{N}$. *Aus* $a_n \to a$ *und* $b_n \to b$ *folgt dann* $a \leq b$.

Das Beispiel $a_n := -\frac{1}{n} < b_n := +\frac{1}{n}$ zeigt, daß Aussage b) für „$<$“ nicht richtig ist.

7.12 Satz. *(vgl. [A1], 6.18). Es sei* $(a_n) \geq 0$ *eine konvergente Folge und* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. *Dann folgt auch* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

7.13 Beispiele. a) Wie in Beispiel 7.1 b) folgt aus $\frac{1}{n} \to 0$ auch $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$.

b) Man hat $\frac{\sqrt{3+4n^2}}{n} = \sqrt{\frac{3}{n^2}+4} \to \sqrt{0+4} = 2$.

c) $$\sqrt{n^4+3n^2} - n^2 = \frac{n^4+3n^2-n^4}{\sqrt{n^4+3n^2}+n^2} = \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}+1} \to \frac{3}{\sqrt{1}+1} = \frac{3}{2}.$$

Für eine Intervallschachtelung $(J_n = [a_n, b_n])$ mit $b_n - a_n \to 0$ existiert der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (vgl. Beispiel 7.4 c)). Offenbar ist die Folge (a_n) *monoton wachsend und nach oben beschränkt* (durch jede Zahl b_m). Diese Eigenschaft *allein* impliziert bereits die Existenz des Grenzwerts:

7.14 Theorem. *Monotone beschränkte Folgen sind konvergent.*

Beweis. a) Es sei (a_n) monoton wachsend und beschränkt. Mit

$$S := \{s \in \mathbb{R} \mid \forall\, n \in \mathbb{N} \;:\; a_n \le s\}$$

wird die Menge aller oberen Schranken der Folge (a_n) bezeichnet.

b) Wir wählen $b_0 \in S$ und $a \in \mathbb{R}$ mit $a < a_1$; mit $d := b_0 - a$ ist dann $b_0 - d = a$, also $b_0 - d \notin S$.

c) Es seien bereits Zahlen $b_0 \ge \ldots \ge b_{n-1}$ in S konstruiert, so daß $b_k - 2^{-k}\, d \notin S$ für $0 \le k \le n-1$ gilt. Wir setzen dann $b_n := b_{n-1} - 2^{-n}\, d$, falls diese Zahl in S liegt, andernfalls $b_n := b_{n-1}$. In jedem Fall gilt dann $b_{n-1} \ge b_n \in S$ und $b_n - 2^{-n}\, d \notin S$.

d) Die in c) rekursiv definierte Folge (b_n) ist monoton fallend, $(J_n := [a_n, b_n])$ also eine Intervallschachtelung. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $2^{-n}\, d < \varepsilon$. Wegen $b_n - 2^{-n}\, d \notin S$ gibt es einen Index $m \in \mathbb{N}$ mit $b_n - 2^{-n}\, d < a_m \le b_n$. Nun ist (a_n) monoton wachsend und (b_n) monoton fallend; für $k \ge \max\{m, n\}$ gilt daher

$$b_n - 2^{-n}\, d < a_m \le a_k \le b_k \le b_n\,,$$

also $b_k - a_k \le 2^{-n}\, d < \varepsilon$. Folglich ist $(b_n - a_n)$ eine Nullfolge.

e) Nach dem Intervallschachtelungsprinzip 6.2 existiert genau eine Zahl $a \in \mathbb{R}$, die im Durchschnitt aller Intervalle J_n liegt, und nach obiger Bemerkung 7.4 c) gilt dann $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

f) Für eine monoton fallende und beschränkte Folge (a_n) ist die Folge $(-a_n)$ monoton wachsend und beschränkt, nach a)-e) also konvergent.

Zur Axiomatik von $\mathbb{R}$. a) Theorem 7.14 wurde also mittels der Axiome I und A bewiesen. Umgekehrt impliziert Theorem 7.14 auch diese beiden Axiome:

b) Ist in der Tat $(J_n = [a_n, b_n])$ eine Intervallschachtelung, so ist die Folge (a_n) monoton wachsend und durch b_1 nach oben beschränkt. Nach Theorem 7.14 existiert $c := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, und man hat $a_m \le c$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Wegen $a_n \le b_m$ für alle n ist nach Feststellung 7.11 b) auch $c \le b_m$; es gilt also $c \in J_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

c) Ist die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen beschränkt, so trifft dies auch auf die monoton wachsende Folge (n) zu. Nach Theorem 7.14 existiert dann $c := \lim\limits_{n\to\infty} n$. Man hat aber auch $c = \lim\limits_{n\to\infty}(n+1) = \lim\limits_{n\to\infty} n + 1 = c + 1$ nach Satz 7.8, und das ist ein Widerspruch.

d) Im Axiomensystem von $\mathbb{R}$ kann man also die Axiome I und A durch die Aussage von Theorem 7.14 ersetzen. Ein weiteres äquivalentes Axiom folgt in Satz 26.

Beispiel. Die Folge $(e_n := (1+\frac{1}{n})^n)$ ist *beschränkt* nach Satz 3.3 und auch *monoton wachsend* (vgl. [A1], 4.7 a)). Nach Theorem 7.14 existiert der Limes

$$e := \lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{n})^n . \tag{11}$$

Wir gehen später auf diese *Eulersche Zahl* e und die *Exponentialfunktion* genauer ein.

Das babylonische Wurzelziehen. a) Wir behandeln nun ein schnell konvergentes Verfahren zur *Berechnung von Quadratwurzeln,* das *Heron-Verfahren* oder *„Babylonische Wurzelziehen“.* Dieses kann *geometrisch* motiviert werden:

b) Zu $a > 0$ wird ein *Quadrat* mit Seitenlänge $x > 0$ und Flächeninhalt $x^2 = a$ gesucht. Man startet mit einem *Rechteck* R_0 mit Flächeninhalt a und Seitenlängen $x_0 > 0$ und $y_0 = \frac{a}{x_0}$. Die Seitenlänge des gesuchten Quadrats ist das *geometrische Mittel* $\sqrt{x_0 y_0} = \sqrt{a} = x$ von x_0 und y_0. Da man dieses nicht (ohne weiteres) berechnen kann, berechnet man statt dessen das *arithmetische Mittel* $x_1 = \frac{1}{2}(x_0 + y_0)$ von x_0 und y_0 und damit das Rechteck R_1 mit den Seitenlängen x_1 und $y_1 = \frac{a}{x_1}$. Die Zahl

$$y_1 = \frac{2\,x_0\,y_0}{x_0+y_0} = \Big(\tfrac{1}{2}\,(\tfrac{1}{x_0}+\tfrac{1}{y_0})\Big)^{-1} \tag{12}$$

heißt *harmonisches Mittel* von x_0 und y_0.

c) Wir hoffen, daß R_1 eine bessere Annäherung an das gesuchte Quadrat ist als R_0. Dies ist in der Tat der Fall, und die *Iteration* der Methode aus b) führt zum Heron-Verfahren.

Das geometrische Mittel ist *höchstens so groß* wie das arithmetische Mittel:

7.15 Feststellung. *Für* $x, y \ge 0$ *gilt* $\sqrt{xy} \le \frac{1}{2}(x+y)$.

Beweis. Aus $0 \le (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ ergibt sich durch Addition von $4xy$ sofort $4xy \le x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$ und somit

$$xy \le \Big(\tfrac{1}{2}\,(x+y)\Big)^2 . \quad \diamond \tag{13}$$

Im folgenden Satz wird nun das Heron-Verfahren präzise angegeben. Sein Beweis (vgl. [A1], 6.15) liefert auch einen weiteren, von Satz 5.3 unabhängigen Beweis für die Existenz der Quadratwurzeln positiver Zahlen, da die Ungleichung in Feststellung 7.15 nur in der Form (13) verwendet wird.

7.16 Satz. *Es sei $a > 0$ gegeben. Für einen* beliebigen Startwert $x_0 > 0$ *wird durch*

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \tag{14}$$

rekursiv *eine Folge (x_n) in $(0, \infty)$ definiert. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend, und für den Grenzwert $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ gilt $x^2 = a$.*

Quadratische Konvergenz. Die in (14) definierte Folge (x_n) konvergiert *sehr schnell* gegen $\sqrt{a}$. Für $a = 2$ etwa ergeben sich folgende Werte mit dem Startwert $x_0 = 2$:

n	x_n
1	$1,5$
2	$1,41667$
3	$1,414215686$
4	$1,4142135623746899$
5	$1,41421356237309504880168896$
6	$1,4142135623730950488016887242096980785 70$

Man erhält mit jedem Iterationsschritt etwa doppelt soviele gültige Stellen wie zuvor, d. h. der *Fehler* $d_n := x_n - \sqrt{a}$ *fällt quadratisch.* Dies läßt sich auch allgemein beweisen:

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_n}\left(x_n^2 + a - 2x_n\sqrt{a}\right) \\ &= \frac{1}{2x_n}\left(x_n - \sqrt{a}\right)^2 \le \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(x_n - \sqrt{a}\right)^2, \qquad \text{also} \\ d_{n+1} &\le \frac{1}{2\sqrt{a}}\, d_n^2 . \end{aligned} \tag{15}$$

Man spricht von *quadratischer Konvergenz.* Für $a \ge 1$ (andernfalls berechnet man zuerst $\sqrt{1/a}$) fällt der Fehler sehr schnell gegen 0, sobald $d_n < 1$ erreicht ist (dies ist um so eher der Fall, je näher der Startwert an $\sqrt{a}$ lag). Da $x_0 > 0$ beliebig wählbar ist, spielen eventuelle Rundungsfehler (vgl. den folgenden Abschnitt 8) bei der Rechnung keine Rolle. Ist $a \in \mathbb{Q}$ und wählt man $x_0 \in \mathbb{Q}$, so gilt auch $x_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d. h. man kann *rational* rechnen.

Harmonische Mittel. a) Die Anwendung von Feststellung 7.15 auf $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{y}$ liefert

$$\left(\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{x} + \tfrac{1}{y}\right)\right)^{-1} \le \sqrt{xy} \quad \text{für } x, y > 0; \tag{16}$$

das *harmonische* Mittel ist also *kleiner oder gleich dem geometrischen.*

b) Harmonische Mittel treten etwa bei Fonds-Sparplänen auf: Zu Zeitpunkten t_j investiert man eine feste Summe S in ein Wertpapier. Zum Kurs K_j kauft man $A_j = \frac{S}{K_j}$ Anteile. Durchschnittlich kauft man somit

$$A = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} A_j = \frac{S}{r}\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{K_j}$$

Anteile; der *Durchschnittskurs* $K = \frac{S}{A}$ ist also das *harmonische* Mittel der Einzelkurse K_j. Bei starken Kursschwankungen kann dieses erheblich niedriger als das arithmetische Mittel der K_j sein.

Frage: Zeigen Sie die Existenz dritter Wurzeln in $\mathbb{R}$ *und versuchen Sie, das Heron-Verfahren auf die Berechnung dritter Wurzeln zu erweitern.*

8 Dezimalzahlen und Fehlerfortpflanzung

Lernziele:

- *Konzepte:* Dezimalzahlen und Runden
- *Methoden:* spezielle Umrechungen
- *Kompetenzen:* Einschätzen von Fehlerfortpflanzungen

Frage: Lösen Sie mittels Taschenrechner das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1,2969 & 0,8648 \\ 0,2161 & 0,1441 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

mit den rechten Seiten $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8642 \\ 0,1440 \end{pmatrix}$ *und* $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,86419999 \\ 0,14400001 \end{pmatrix}$.

Daten konkreter Probleme sind meist *nicht exakt,* sondern nur *ungefähr* gegeben, etwa aufgrund von Meßfehlern. Selbst mit exakt gegebenen reellen Zahlen lassen sich Rechnungen i.a. nicht exakt durchführen, da man mit geeigneten *Approximationen* dieser Zahlen durch *rationale Zahlen* arbeiten muß. Üblicherweise bricht man dazu einfach die Dezimalbruchentwicklungen der gegebenen Zahlen an einer gewissen Stelle ab, wodurch sich natürlich *Rundungsfehler* ergeben, selbst bei manchen rationalen Zahlen wie etwa $\frac{1}{3}$. Daten- und Rundungsfehler können sich bei längeren Rechnungen „aufschaukeln" und in ungünstigen Fällen das Ergebnis erheblich verfälschen.

In diesem Abschnitt besprechen wir die Dezimalbruchentwicklung reeller Zahlen sowie die Fehlerfortpflanzung bei den arithmetischen Rechenoperationen; als Beispiel dient eine Berechnung von Näherungen für π. Eine genauere Untersuchung von Fehlerfortpflanzungen ist ein wichtiges Thema der Numerischen Mathematik.

Beispiele. Reelle Zahlen werden, wie in den vorherigen Abschnitten bereits geschehen, meist als Dezimalzahlen dargestellt, etwa

$$17,304 \;=\; 1 \cdot 10 + 7 \cdot 1 + 3 \cdot \tfrac{1}{10} + 0 \cdot \tfrac{1}{100} + 4 \cdot \tfrac{1}{1000}\,.$$

Endliche Dezimalzahlen sind offenbar nur solche Zahlen, die als Bruch mit einer Zehnerpotenz im Nenner geschrieben werden können. Dies trifft etwa auf die rationale Zahl $\frac{1}{3}$ nicht zu:

$$\tfrac{1}{3} \;=\; 0,3333333\ldots \;=\; 0,\bar{3} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} 3 \cdot 10^{-k}\,. \tag{1}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt also

$$0,3\ldots 33 \;\leq\; \tfrac{1}{3} \;<\; 0,3\ldots 34 \quad (n \;\text{ Ziffern})\,; \tag{2}$$

ersetzt man $\frac{1}{3}$ durch die *endliche* Dezimalzahl

$$0,3\ldots3 \;=\; 3\cdot 10^{-1}+\ldots+3\cdot 10^{-n}\,,$$

so liegt der *Fehler* zwischen 0 und 10^{-n}.

Dezimalbruchentwicklungen. a) Es sei $x\in(0,\infty)$ gegeben. Man bestimmt zunächst die kleinstmögliche Zehnerpotenz 10^{m+1} oberhalb von x mittels

$$m := \min\{n\in\mathbb{Z} \mid x<10^{n+1}\} \tag{3}$$

und erhält dann $10^m \le x < 10^{m+1}$. Es folgt $1\le \frac{x}{10^m} < 10$, und daher ist $x_0 := [x/10^m]$ eine *Ziffer* in $\{1,\ldots,9\}$. Wegen $x_0 \le \frac{x}{10^m} < x_0+1$ gilt

$$0 \;\le\; r_0 := \; x - x_0\cdot 10^m \;<\; 10^m\,. \tag{4}$$

b) Für $x=\frac{155}{11}$ etwa ist $10\le x<100$ und somit $m=1$. Weiter ist $x_0 = [x/10] = \left[\frac{155}{110}\right] = 1$ und $r_0 = x - x_0\cdot 10 = \frac{155}{11}-10 = \frac{45}{11}$.

c) Nun wenden wir die Überlegungen aus a) auf die Zahl r_0 aus (4) an. Mit der Ziffer $x_1 := [r_0/10^{m-1}] \in \{0,1,\ldots,9\}$ folgt dann

$$0 \;\le\; r_1 := r_0 - x_1\cdot 10^{m-1} \;=\; x - x_0\cdot 10^m - x_1\cdot 10^{m-1} \;<\; 10^{m-1}\,.$$

d) Für das Beispiel aus b) erhält man zunächst $x_1 = [r_0/10^0] = [\frac{45}{11}] = 4$ und für den Rest dann $r_1 = r_0 - x_1\cdot 10^0 = \frac{45}{11} - 4 = \frac{1}{11}$.

e) Nun wenden wir die Überlegungen aus a) bzw. c) auf die Zahl r_1 an. Rekursiv definieren wir für $k\in\mathbb{N}$ durch

$$x_k := \left[\frac{r_{k-1}}{10^{m-k}}\right]\,, \quad r_k := \; r_{k-1} - x_k\cdot 10^{m-k} \tag{5}$$

Ziffern $x_k\in\{0,1,\ldots,9\}$ und Reste r_k, für die analog zu (2) gilt:

$$0 \;\le\; x - \sum_{k=0}^{n} x_k\cdot 10^{m-k} \;=\; r_n \;<\; 10^{m-n}\,, \quad n\in\mathbb{N}_0\,. \tag{6}$$

f) Wegen $10^{m-n}\to 0$ für $n\to\infty$ folgt aus (6)

$$x \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} x_k\cdot 10^{m-k}\,. \tag{7}$$

Für diese *Dezimalbruchentwicklung* (6) oder (7) von x schreibt man

$$x \;=\; x_0\,,\, x_1\, x_2\, x_3\, \ldots \cdot 10^m\,. \tag{8}$$

g) Für das Beispiel aus b) und d) folgt weiter

$$\begin{aligned}
x_2 &= \left[\tfrac{r_1}{10^{-1}}\right] = [\tfrac{10}{11}] = 0 \quad, & r_2 &= r_1 - x_2\cdot 10^{-1} = \tfrac{1}{11}\,,\\
x_3 &= \left[\tfrac{r_2}{10^{-2}}\right] = [\tfrac{100}{11}] = 9 \quad, & r_3 &= r_2 - x_3\cdot 10^{-2} = \tfrac{1}{11}\cdot 10^{-2}\,,\\
x_4 &= \left[\tfrac{r_3}{10^{-3}}\right] = [\tfrac{10}{11}] = 0 \quad, & r_4 &= r_3 - x_4\cdot 10^{-3} = \tfrac{1}{11}\cdot 10^{-2}\,,\\
x_5 &= \left[\tfrac{r_4}{10^{-4}}\right] = [\tfrac{100}{11}] = 9 \quad, & r_5 &= r_4 - x_5\cdot 10^{-4} = \tfrac{1}{11}\cdot 10^{-4}\,,
\end{aligned}$$

usw., also die Dezimalbruchentwicklung

$$\tfrac{155}{11} \;=\; 1{,}4090909\ldots \cdot 10\,. \tag{9}$$

Andere Beispiele sind etwa $\frac{1}{4} = 2{,}5 \cdot 10^{-1}$ oder $\frac{1}{30} = 3{,}333\ldots \cdot 10^{-2}$.

g) Umgekehrt seien nun $m \in \mathbb{Z}$ und eine Folge $(x_k)_{k\geq 0} \subseteq \{0,1,\ldots,9\}$ von Ziffern mit $x_0 > 0$ gegeben. Die Folge

$$\Big(\, s_n := \sum_{k=0}^{n} x_k \cdot 10^{m-k} \,\Big)$$

ist monoton wachsend und wegen

$$s_n \leq \sum_{k=0}^{n} 9 \cdot 10^{m-k} = 9 \cdot 10^m \sum_{k=0}^{n} 10^{-k} \;\leq\; 9 \cdot 10^m \cdot \frac{1}{1-10^{-1}} = 10^{m+1}$$

auch beschränkt. Nach Theorem 7.14 existiert also

$$x := \lim_{n\to\infty} s_n \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} x_k \cdot 10^{m-k} \;\in\; (0, 10^{m+1}]\,. \tag{10}$$

h) An Stelle von 10 läßt sich auch jede andere natürliche Zahl $g \in \mathbb{N}$ als *Basis der g-adischen Entwicklung* verwenden (vgl. [A1], Abschnitt 7*); interessant ist vor allem der Fall $g = 2$.

Periodische Dezimalzahlen. a) Die unendliche Dezimalentwicklung von $\frac{1}{3}$ oder auch $\frac{155}{11}$ ist *periodisch;* dies gilt allgemein für die Entwicklung jeder rationalen Zahl $\frac{p}{q}$. In der Tat sind die Ziffern x_k Reste von Divisionen natürlicher Zahlen durch q; da als Reste aber nur $0,\ldots,q-1$ möglich sind, muß spätestens beim q-ten Schritt eine Wiederholung auftreten.

b) Umgekehrt ist jede periodische Dezimalzahl rational. Als Beispiel diene die Zahl $a = 1{,}1\overline{345}$. Wir multiplizieren mit 1000 und ziehen a wieder ab:

$$\begin{aligned} 1000a &= 1134{,}5345\overline{345} \\ a &= \quad\;\; 1{,}1345345\overline{345} \\ 999a &= 1133{,}4\,, \end{aligned}$$

also $a = \frac{11334}{9990} = \frac{1889}{1665}$.

c) Zahlen mit nicht periodischer Dezimalbruchentwicklung wie etwa

$$\begin{aligned} a &= 1{,}01001000100001000001\ldots \quad \text{oder} \\ b &= 1{,}12123123412345123456\ldots\,, \end{aligned}$$

deren Existenz nach Theorem 7.14 gesichert ist, sind also irrational.

Gleitkommazahlen und Rundungen. a) Da bei konkreten Rechnungen stets nur *endlich* viele Ziffern manipuliert werden können, werden Zahlen

$$x \;=\; \pm\, x_0\,,\, x_1\, x_2\, x_3\, \ldots \cdot 10^m \tag{11}$$

auf r Stellen *gerundet,* d. h. ersetzt durch

$$x^* \;=\; \pm\, x_0\,,\, x_1\, x_2\, \ldots\, x_{r-1}^* \cdot 10^m \tag{12}$$

mit $x_{r-1}^* = x_{r-1}$ oder $x_{r-1}^* = x_{r-1} + 1$.

b) Bei Verwendung einer maximalen Anzahl $r \in \mathbb{N}$ von Ziffern oder *Stellen* spricht man von *r-stelliger Arithmetik;* der *Exponent $m \in \mathbb{Z}$* ist dabei auf ein gewisses Intervall $[\mu, M] \subseteq \mathbb{Z}$ beschränkt.

c) Bei Rechnungen in r-stelliger Arithmetik wird nach jedem Schritt gerundet; dabei gelten *Assoziativ-* und *Distributivgesetz nicht!* Als Beispiel diene

$$1 + 0,1 + 0,1 + \cdots + 0,1 \quad \text{(101 Summanden)}$$

in einstelliger Arithmetik. Beginnt man die Addition links mit der 1, so ist die Summe 1. Beginnt man jedoch rechts, so erhält man nach 10 Schritten als Zwischensumme 1 und nach der letzten Addition die Summe 2. Durch Vertauschung und Klammerung kann man als Summe jede Zahl in $\{1, 2, \ldots, 10\}$ erhalten.

Absolute und relative Fehler. a) Ist $x^* \in \mathbb{R}$ eine Näherung an den exakten Wert $x \in \mathbb{R}$, so bezeichnen wir mit

$$\Delta(x) :=\; x^* - x \in \mathbb{R} \tag{13}$$

den dabei auftretenden *absoluten Fehler.* Für $x \neq 0$ heißt

$$\rho(x) :=\; \tfrac{\Delta(x)}{x} \in \mathbb{R} \tag{14}$$

der entsprechende *relative Fehler.*

b) Geht eine Waage bis auf $10\,g$ genau, so ist der Betrag des absoluten Fehlers beim Wiegen $\leq 10\,g$. Der relative Fehler beim Wiegen eines Menschen von $100\,kg$ ist also höchstens $\frac{10\,g}{100\,kg} = 10^{-4}$, beim Wiegen eines Briefes von $20\,g$ aber maximal $\frac{10\,g}{20\,g} = 0,5$.

c) Wird die Zahl $x = 381,53$ zu $x^* = 382$ auf 3 Stellen gerundet, so ist der absolute Fehler $\Delta(x) = 0,47 \leq 5 \cdot 10^{-1}$ und der relative Fehler $\rho(x) = \frac{0,47}{381,53} \leq 5 \cdot 10^{-3}$.

d) Allgemein gilt für x aus (11) bei r-stelliger Arithmetik für den absoluten Fehler

$$|\,\Delta(x)\,| \;\leq\; 5 \cdot 10^{m-r}\,, \tag{15}$$

und für den relativen Fehler hat man

$$|\,\rho(x)\,| \;\leq\; 5 \cdot 10^{-r}\,. \tag{16}$$

Fehlerfortpflanzung bei der Multiplikation. Sind $x^*, y^* \in \mathbb{R}$ Näherungen an $x, y \in \mathbb{R}$, so hat man für die Produkte

$$x^*\, y^* \;=\; (x + \Delta(x))\,(y + \Delta(y)) \;=\; x\,y + x\,\Delta(y) + y\,\Delta(x) + \Delta(x)\,\Delta(y)\,, \text{ also}$$

$$\Delta(x\,y) \;=\; x^*\,y^* - x\,y \;=\; x\,\Delta(y) + y\,\Delta(x) + \Delta(x)\,\Delta(y) \;\sim\; x\,\Delta(y) + y\,\Delta(x) \tag{17}$$

für die absoluten Fehler. Am Ende von (17) haben wir den „quadratisch kleinen" Fehlerterm $\Delta(x)\,\Delta(y)$ weggelassen. Im Fall $xy \neq 0$ folgt daraus sofort

$$\rho(x\,y) \;=\; \tfrac{\Delta(x\,y)}{x\,y} \;=\; \rho(y) + \rho(x) + \rho(x)\,\rho(y) \;\sim\; \rho(y) + \rho(x)\,; \tag{18}$$

die *relativen Fehler* werden also im wesentlichen *addiert.*

Fehlerfortpflanzung bei der Addition. a) Sind wieder $x^*, y^* \in \mathbb{R}$ Näherungen an $x, y \in \mathbb{R}$, so hat man für die Summen

$$x^* + y^* \;=\; x + \Delta(x) + y + \Delta(y)\,, \quad \text{also}$$

$$\Delta(x+y) \;=\; x^* + y^* - (x+y) \;=\; \Delta(x) + \Delta(y)\,; \tag{19}$$

es werden also die *absoluten Fehler addiert.* Für $x + y \neq 0$ ergibt sich für die relativen Fehler

$$\rho(x+y) \;=\; \tfrac{\Delta(x+y)}{x+y} \;=\; \tfrac{x}{x+y}\,\rho(x) \;+\; \tfrac{y}{x+y}\,\rho(y)\,. \tag{20}$$

c) Haben x und y das gleiche Vorzeichen, so gilt offenbar $|\,x\,|, |\,y\,| \leq |\,x+y\,|$, und auch die relativen Fehler werden höchstens addiert. In diesem Fall ist also die Fehlerfortpflanzung bei der Addition unproblematisch.

c) Haben jedoch x und y unterschiedliche Vorzeichen, so werden die *relativen Fehler drastisch verstärkt,* wenn $|\,x+y\,|$ wesentlich kleiner als $|\,x\,|$ oder $|\,y\,|$ ist. Bei einer Rechnung mit einer festen Anzahl von Stellen können dann einige dieser Stellen *ausgelöscht* werden. Dieser Effekt wird bei der folgenden Berechnung von Näherungen für π illustriert.

Quotienten und Wurzeln. a) Die Fehlerfortpflanzung bei der *Division* ist unproblematisch; in der Tat hat man für $x \neq 0$ stets $|\,\rho(\frac{1}{x})\,| \sim |\,\rho(x)\,|$ bis auf einen „quadratisch kleinen" Fehlerterm.

b) Auch bei der Berechnung von *Quadratwurzeln* positiver Zahlen ist die Fehlerfortpflanzung unproblematisch. Dies ergibt sich aus der Iterationsformel (7.14) des Heron-Verfahrens, da dort nur positive Terme addiert werden.

Quadratische Gleichungen. Für $p^2 \geq q$ sind die Lösungen der quadratische Gleichung $x^2 + 2px + q = 0$ gemäß (6.6) gegeben durch

$$x_\pm \;=\; -p \pm \sqrt{p^2 - q}\,.$$

Ist $p^2 - q$ sehr klein, so tritt eine Stellenauslöschung auf, die sich nicht vermeiden läßt. Ist andererseits $|\,q\,|$ sehr klein und etwa $p > 0$, so hat man auch Stellenauslöschung bei der Berechnung von x_+, nicht jedoch bei der von x_-. In diesem Fall berechnet man daher zuerst x_- und anschließend die andere Lösung mittels $x_+ = \frac{q}{x_-}$ (vgl. (6.7)).

Kreisumfang und Kreisfläche. a) Die *Kreiszahl* π wurde bereits in Abschnitt 5 diskutiert. Sie wurde als halbe *Länge des Umfangs* eines Kreises K mit Radius 1 „definiert“. Wir besprechen nun *Approximationen* von π „zeigen“, dass π auch mit dem *Flächeninhalt* dieses Kreises übereinstimmt:

b) Die Punkte $\{(\pm 1, 0)\,,\, (\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})\}$ bilden die Ecken eines regelmäßigen Sechsecks P_0 mit $P_0 \subseteq K$ (vgl. Abb. 7a). Dessen Kanten haben die Länge $s_0 = 1$, da etwa das Dreieck $0AB$ gleichseitig ist. Offenbar ist $\pi_0 := 3 \cdot s_0 = 3$ eine erste untere Schranke für den halben Kreisumfang π. Nun ersetzen wir P_0 durch ein regelmäßiges Zwölfeck P_1, indem wir eine Kante AB durch die beiden Strecken AC und CB der Länge s_1 ersetzen; $\pi_1 := 6 \cdot s_1$ ist dann die nächste untere Schranke für π. Anschließend konstruieren wir entsprechend ein regelmäßiges 24-Eck P_2 der Kantenlänge s_2 mit der Approximation $\pi_2 := 12 \cdot s_2$ für π und fahren so fort. Wir erhalten $2^{n+1} \cdot 3$-Ecke P_n mit Kantenlängen s_n. Die Zahlen

$$(\pi_n := \; 2^n \cdot 3 \cdot s_n) \tag{21}$$

der halben Umfänge von P_n sind untere Schranken für π, und die Folge (π_n) wächst monoton.

c) Wir betrachten die Höhen $h_n = OM$ der Dreiecke gemäß Abb. 7a. Die Anwendung des Satzes des Pythagoras auf das Dreieck OMB liefert die Aussage

$$h_n^2 + (\tfrac{s_n}{2})^2 \;=\; 1 \quad\Leftrightarrow\quad h_n \;=\; \sqrt{1 - (\tfrac{s_n}{2})^2}\,, \tag{22}$$

die auf das Dreieck MCB die Aussage

$$s_{n+1}^2 \;=\; (1 - h_n)^2 + (\tfrac{s_n}{2})^2\,. \tag{23}$$

Es folgt

$$s_{n+1}^2 \;=\; (1 - h_n)^2 + (1 - h_n^2)\,, \quad \text{also}$$

$$s_{n+1}^2 \;=\; 2 - 2\,h_n\,. \tag{24}$$

Mit $s_0 = 1$ lassen sich die Zahlen s_n^2, h_n und π_n gemäß den Formeln (22), (24) und (21) rekursiv berechnen.

d) Es ist $p_n := \pi_n \cdot h_n = 2^n \cdot 3 \cdot s_n \cdot h_n$ der Flächeninhalt von P_n, und daher gilt $p_n \leq 4$.

Wegen $h_n \geq h_0 > 0$ ist daher die Folge (π_n) *beschränkt,* und der Limes $\pi := \lim\limits_{n\to\infty} \pi_n$ existiert nach Theorem 7.14. Insbesondere folgt $s_n \to 0$ und dann $h_n \to 1$ mittels (22). Somit gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \pi$.

e) Durch Streckung der Dreiecke in P_n um den Faktor $\frac{1}{h_n}$ konstruieren wir nun ein neues Polygon Q_n . Die Kanten von Q_n berühren dann den Kreis tangential in ihren Mittelpunkten (vgl. Abb. 7a), und man hat $K \subseteq Q_n$. Für die Flächeninhalte gilt $q_n = \frac{1}{h_n^2} p_n$ und somit ebenfalls $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \pi$. Somit ist π auch als *Flächeninhalt des Einheitskreises* anzusehen.

Numerische Rechnungen. a) Wir berechnen nun die Zahlen s_n^2 , h_n und π_n gemäß den Formeln (22), (24) und (21) in 3-stelliger Arithmetik, d. h. alle Zahlen werden bis auf 3 Stellen gerundet.

n	s_n^2	h_n	π_n
0	1	0,866	3
1	0,27	0,966	3,12
2	0,07	0,991	3,18
3	0,02	0,997	3,38
4	0,01	0,999	4,80
5	0	1,00	0

Bei der Berechnung von $s_{n+1}^2 = 2 - 2\,h_n$ wird bei $n = 0$ eine Stelle gelöscht, bei $n = 1$ eine weitere und schließlich bei $n = 4$ auch die dritte, so daß jegliche Information verloren geht. Dementsprechend sind die Zahlen π_n aus der letzten Spalte *keine* vernünftigen Approximationen für π .

b) Die Auslöschung von Stellen bei Rechnung gemäß Formel (24) tritt natürlich auch bei Verwendung von mehr Stellen auf. Das Problem läßt sich aber durch eine einfache Umrechnung von (24) mittels (22) umgehen:

$$s_{n+1}^2 \;=\; 2 - 2\,h_n \;=\; \frac{4 - 4\,h_n^2}{2 + 2\,h_n} \;=\; \frac{s_n^2}{2 + 2\,h_n}\,. \tag{25}$$

Da im Nenner nun ein Pluszeichen steht, werden keine Stellen ausgelöscht. Die folgende Tabelle zeigt die Berechnung der s_n^2 und π_n gemäß der letzten Formel in (25) in 3-stelliger Arithmetik:

n	s_n^2	h_n	π_n
0	1	$0,866$	3
1	$0,268$	$0,966$	$3,11$
2	$0,0682$	$0,991$	$3,13$
3	$0,0171$	$0,998$	$3,14$
4	$0,00428$	$1,00$	$3,14$
5	$0,00107$	$1,00$	$3,14$

Ab $n = 4$ wird einfach $s_{n+1}^2 = \frac{s_n^2}{4}$ gerechnet, so daß die Näherungen $\pi_{n+1} = 2^{n+1} \cdot 3 \cdot s_{n+1} = 2^n \cdot 3 \cdot s_n = \pi_n$ konstant bleiben.

II. Differentialrechnung

Übersicht über den Inhalt von Kapitel II:

9 Momentangeschwindigkeiten und Tangenten

Lernziele:

- *Konzept:* Der Ableitungsbegriff

Ausgangspunkte der Differentialrechnung sind das *physikalische* Problem der Bestimmung von *Momentangeschwindigkeiten* und das *geometrische* Problem der Bestimmung von *Tangenten* an (zunächst) ebene Kurven.

Physikalische Diskussion. a) Ein Massenpunkt bewege sich auf einer Geraden. Ist $f(t) \in \mathbb{R}$ sein Ort zur Zeit $t \in \mathbb{R}$, so ist die *mittlere Geschwindigkeit* oder *Durchschnittsgeschwindigkeit* im Zeitintervall $[a,t]$ der Quotient aus dem in diesem Zeitintervall zurückgelegten Weg und der Länge dieses Zeitintervalls, der *Differenzenquotient*

$$\Delta f(a;t) := \frac{f(t)-f(a)}{t-a} \,. \tag{1}$$

Als *Momentangeschwindigkeit* zur Zeit a möchte man gerne diesen Ausdruck für $t=a$ betrachten. Da dies nicht unmittelbar möglich ist, sucht man einen *Grenzwert* $f'(a)$ von $\Delta f(a;t)$ für $t \to a$; dieser heißt dann *Ableitung* der Funktion f im Punkt a.

Geometrische Diskussion. Der Differenzenquotient aus (1) gibt auch die *Steigung* der *Geraden* G durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(t, f(t))$ an, einer *Sekanten* an den Graphen der Funktion f. Man hat

$$G \;=\; \{(\tau,s) \in \mathbb{R}^2 \mid s - f(a) \;=\; \Delta f(a;t)\,(\tau - a)\} \,.$$

Bei Annäherung von t an a „sollten" die Steigungen $\Delta f(a;t)$ gegen die Steigung $f'(a)$ einer gewissen *Grenzgeraden* streben; diese interpretieren wir dann als **Tangente**

$$T_{(a,f(a))}(\Gamma(f)) \;=\; \{(\tau,s) \in \mathbb{R}^2 \mid s - f(a) \;=\; f'(a)\,(\tau - a)\} \tag{2}$$

in $(a, f(a))$ an den Graphen von f.

Beispiele. a) Wir betrachten die Potenzfunktion $p_2 : x \mapsto x^2$. Für einen festen Punkt $a \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\Delta p_2(a;x) \;=\; \tfrac{x^2-a^2}{x-a} \;=\; x + a \,.$$

Bei Annäherung von x an a „erhält man"

$$p_2'(a) \;=\; 2a \,, \tag{3}$$

und die Tangente in (a, a^2) an den Graphen von p_2 ist gegeben durch

$$T_{(a,a^2)}(\Gamma(p_2)) \;=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - a^2 = 2a\,(x-a)\}\,.$$

b) Nun betrachten wir die Wurzelfunktion $w_2 : x \mapsto \sqrt{x}$ und einen festen Punkt $b \geq 0$. Für $x > 0$ ist

$$\Delta w_2(b;x) \;=\; \tfrac{\sqrt{x}-\sqrt{b}}{x-b} \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{b}}\,.$$

Im Fall $b > 0$ „erhält man“

$$w_2'(b) \;=\; \tfrac{1}{2\sqrt{b}}\,, \tag{4}$$

und die Tangente in $(b, \sqrt{b})$ an den Graphen von w_2 ist gegeben durch

$$T_{(b,\sqrt{b})}(\Gamma(w_2)) \;=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - \sqrt{b} = \tfrac{1}{2\sqrt{b}}\,(x-b)\}\,.$$

c) Die Funktionen $p_2 : [0,\infty) \mapsto [0,\infty)$ und $w_2 : [0,\infty) \mapsto [0,\infty)$ sind *Umkehrfunktionen* voneinander; ihre Graphen gehen durch *Spiegelung* an der Winkelhalbierenden $\{(x,y) \mid y = x\}$ auseinander hervor. Dies trifft auch auf die Tangenten zu: Für $a > 0$ und $b = p_2(a) = a^2$ gilt

$$w_2'(b) \;=\; \tfrac{1}{2\sqrt{b}} \;=\; \tfrac{1}{2a} \;=\; \tfrac{1}{p_2'(a)} \tag{5}$$

für die Tangentensteigungen sowie

$$\begin{aligned}(x,y) \in T_{(a,a^2)}(\Gamma(p_2)) \;&\Leftrightarrow\; y - a^2 = 2a\,(x-a) \;\Leftrightarrow\; x - \sqrt{b} = \tfrac{1}{2\sqrt{b}}\,(y-b)\\ &\Leftrightarrow\; (y,x) \in T_{(b,\sqrt{b})}(\Gamma(w_2))\,.\end{aligned}$$

Der Zusammenhang (5) zwischen den Tangentensteigungen einer Funktion und ihrer Umkehrfunktion gilt ganz allgemein (vgl. Beispiel 11 d) und Satz 14.4).

d) Im Fall $b = 0$ ist die Sekantensteigung $\Delta w_2(0;x) = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ bei Annäherung von $x > 0$ an 0 *unbeschränkt,* sie *„strebt gegen* ∞ *“.* Somit *existiert die Tangentensteigung in* 0 *nicht.* Die Tangente an den Graphen von w_2 im Nullpunkt ist jedoch die y-Achse, entsprechend der x-Achse als Tangente an den Graphen von p_2 im Nullpunkt.

Zum Ableitungsbegriff. a) Bisher haben wir Ableitungen bzw. Momentangeschwindigkeiten oder Tangentensteigungen *„intuitiv ermittelt“,* wie dies auch in Schulbüchern üblich ist. Wir haben Differenzenquotienten $\Delta f(a;x)$ so umgeformt, daß wir die Annäherung von x an a durch Einsetzen von $x = a$ in den umgeformten Ausdruck vornehmen konnten. Dies bedarf einer genaueren Begründung; bei der Wurzelfunktion haben wir z. B. einfach benutzt, dass für $x \to b$ $(b > 0)$ auch $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{b}} \to \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{b}}$ gilt.

b) Umformung des Differenzenquotienten funktioniert nur bei „schönen“ Beispielen, jedoch keineswegs immer. Wollen wir etwa die Ableitung der *Sinusfunktion* in 0 ermitteln, so müssen wir

$$\Delta \sin(0;x) \;=\; \tfrac{\sin x - \sin 0}{x-0} \;=\; \tfrac{\sin x}{x} \tag{6}$$

untersuchen. Dieser Ausdruck läßt sich jedoch *nicht* (ohne weiteres) in einen Ausdruck umformen, in dem man $x = 0$ einsetzen kann. Statt dessen müssen wir mittels geeigneter *Abschätzungen* die Annäherung von x an 0 als wirklichen *Grenzübergang* realisieren (vgl. dazu 11).

c) Zuvor müssen wir den *Grenzwertbegriff bei Funktionen* präzise fassen, was ein Thema des nächsten Abschnitts ist.

10 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

Lernziele:

- *Konzepte:* Grenzwertbegriff bei Funktionen, Stetigkeit
- *Kompetenzen:* Untersuchung der Existenz von Grenzwerten, Bestimmung von Grenzwerten

Wir definieren nun den *Grenzwertbegriff bei Funktionen,* insbesondere für Differenzenquotienten, mit Hilfe des in Kapitel I bereits eingeführten *Konvergenzbegriffs für Folgen:*

Definition. *Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a \in I$ und $f : I\backslash\{a\} \mapsto \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine Zahl $\ell \in \mathbb{R}$ heißt* **Grenzwert** *oder* **Limes** *von f in a, falls für jede Folge (x_n) in $I\backslash\{a\}$ aus $x_n \to a$ stets $f(x_n) \to \ell$ folgt. Man schreibt $\ell = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ oder $f(x) \to \ell$ für $x \to a$.*

Bemerkungen. a) Nach Feststellung 7.2 sind Grenzwerte von Folgen *eindeutig bestimmt;* daher kann eine Funktion f in einem Punkt $a \in I$ nur *höchstens einen* Grenzwert haben.

b) In obiger Definition braucht die Funktion f in a nicht definiert zu sein. Ist dies doch der Fall, so spielt der Funktionswert $f(a)$ für die Grenzwertbetrachtung keine Rolle. So hat man etwa für die Funktion $f : x \mapsto 0$ offenbar $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$, und dies bleibt auch richtig, wenn man den Wert $f(1)$ von f in 1 irgendwie abändert.

c) Die Existenz eines Grenzwertes $\ell = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ kann von der Wahl des Intervalls I abhängen. Ist etwa a der linke Endpunkt von I, so sind in obiger Definition nur Folgen (x_n) mit $x_n > a$ zu betrachten; man nennt dann ℓ auch den *rechtsseitigen Limes* von f in a und schreibt auch

$$\ell \;=\; f(a^+) := \lim_{x\to a^+} f(x)\,. \tag{1}$$

Entsprechend sind *linksseitige Grenzwerte* definiert:

$$\ell \;=\; f(b^-) := \lim_{x\to b^-} f(x)\,. \tag{2}$$

Für innere Punkte a von I existiert $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ genau dann, wenn $f(a^-)$ und $f(a^+)$ existieren und gleich sind.

d) Als Beispiel betrachten wir die *Heaviside-Funktion.* Diese wird auf $\mathbb{R}$ definiert durch $H(x) := \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$. Sie modelliert etwa das Einschalten elektrischen Stroms ohne Zeitverzögerung. Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} H(x)$ existiert offenbar nicht, es gilt aber $H(0^+) = 1$ und $H(0^-) = 0$.

10.1 Satz. *(vgl. [A1], 8.5). Gegeben seien ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, $a \in I$ und eine Funktion $f : I \backslash \{a\} \mapsto \mathbb{R}$. Für $\ell \in \mathbb{R}$ gilt genau dann $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, falls folgendes erfüllt ist:*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in I\ :\quad 0 < |\, x - a\,| < \delta\ \Rightarrow\ |\, f(x) - \ell\,| < \varepsilon\,. \tag{3}$$

10.2 Satz. *(vgl. [A1], 8.6). Gegeben seien ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, $a \in I$ und Funktionen $f, g : I \backslash \{a\} \mapsto \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ und $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$.*
a) Dann folgt $\lim\limits_{x \to a} (f + g)(x) \;=\; \ell + m$ und $\lim\limits_{x \to a} (fg)(x) \;=\; \ell m$.
b) Für $m \neq 0$ gilt auch $\lim\limits_{x \to a} \frac{f}{g}(x) \;=\; \frac{\ell}{m}$.

„Unendliche“ Grenzwerte. a) Wir diskutieren die auf $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ definierte Inversion $j : x \mapsto \frac{1}{x}$. Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} j(x)$ existiert nicht; in der Tat gilt $j(x_n) \to +\infty$ für jede Folge $(x_n) \subseteq (0, \infty)$ mit $x_n \to 0$ sowie $j(x_n) \to -\infty$ für jede Folge $(x_n) \subseteq (-\infty, 0)$ mit $x_n \to 0$. Bei Annäherung von x an 0 von *rechts* bzw. *links* strebt also $j(x)$ gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$; dafür schreiben wir

$$j(x) \to +\infty \;\text{ für }\; x \to 0^+\,, \quad j(x) \to -\infty \;\text{ für }\; x \to 0^-\,. \tag{4}$$

b) Strebt x gegen $+\infty$ oder $-\infty$, so strebt $j(x)$ gegen 0, d. h. man hat $\lim\limits_{n \to \infty} j(x_n) = 0$ für jede Folge $x_n \to +\infty$ und auch für jede Folge $x_n \to -\infty$. Dafür schreiben wir

$$j(x) \to 0 \;\text{ für }\; x \to +\infty\,, \quad j(x) \to 0 \;\text{ für }\; x \to -\infty \tag{5}$$

oder auch

$$\lim_{x \to +\infty} j(x) \;=\; \lim_{x \to -\infty} j(x) \;=\; 0\,. \tag{6}$$

c) Analog zu a) und b) erklären wir für $a, \ell \in \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ und geeignete Funktionen f die Aussagen

$$f(x) \to \ell \;\text{ für }\; x \to a\,,\quad x \to a^+ \;\text{ oder }\; x \to a^- \tag{7}$$

(vgl. [A1], 8.8). Satz 10.2 gilt dann sinngemäß unter Beachtung der auf S. 23 formulierten Regeln für das „Rechnen mit ∞“.

Beispiele. a) Für die auf $(0, \infty)$ definierten Funktionen $K : x \mapsto ax + \frac{b}{x}$ mit $a, b > 0$ gilt $K(x) \to +\infty$ für $x \to 0^+$ und $K(x) \to +\infty$ für $x \to +\infty$. Die letztere Aussage kann noch präzisiert werden: Man hat $K(x) - ax = \frac{b}{x} \to 0$ für $x \to +\infty$; die Gerade $y = ax$ ist eine *Asymptote* für den Graphen von K.

b) Für $x \to +\infty$ hat man $\dfrac{3x^2 - 2\sin x}{x\sqrt{x} + 5x + 1} = \dfrac{3\sqrt{x} - {}^{2\sin x}\!/_{x\sqrt{x}}}{1 + {}^{5}\!/_{\sqrt{x}} + {}^{1}\!/_{x\sqrt{x}}} \to +\infty\,.$

Definition. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : I \mapsto \mathbb{R}$ heißt* **stetig** in einem Punkt $a \in I$, *falls*

$$\lim_{x \to a} f(x) \;=\; f(a) \tag{8}$$

gilt, falls also $f(a)$ der Limes von f in a bezüglich I ist. Sie heißt stetig auf I, *falls dies in jedem Punkt von I der Fall ist. Mit $\mathcal{C}(I)$ oder $\mathcal{C}^0(I)$ wird die Menge aller stetigen Funktionen auf I bezeichnet.*

Beispiele. Die Potenzfunktionen $p_n : x \mapsto x^n$ sind nach Satz 7.8 auf $\mathbb{R}$ stetig; dies gilt auch für die Betragsfunktion $A : x \mapsto |\,x\,|$ aufgrund von Feststellung 7.11 a). Nach Satz 7.12 ist auch die Wurzelfunktion $w_2 : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ stetig.

Bemerkungen. a) Eine Funktion $f : I \mapsto \mathbb{R}$ heißt *rechts-* bzw. *linksseitig stetig* in einem *inneren* Punkt $a \in I$, falls $f(a^+) = f(a)$ bzw. $f(a^-) = f(a)$ gilt.

b) Die Stetigkeit einer Funktion kann von der *Wahl des Definitionsbereichs abhängen.* So sind etwa für obige Heaviside-Funktion $H : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ und $H : (-\infty, 0) \mapsto \mathbb{R}$ stetig, nicht aber $H : (-\infty, 0] \mapsto \mathbb{R}$ oder $H : (-1, 1) \mapsto \mathbb{R}$. Die letzte Funktion ist in 0 rechtsseitig stetig.

10.3 Satz. *(vgl. [A1], 8.11). Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a \in I$. Eine Funktion $f : I \mapsto \mathbb{R}$ ist genau dann in a stetig, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:*

(a) Für jede Folge $(x_n) \subseteq I$ gilt: $\quad x_n \to a \;\Rightarrow\; f(x_n) \to f(a)$.

(b) Es gilt die folgende Aussage:

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, x \in I \;:\; |\,x - a\,| < \delta \;\Rightarrow\; |\,f(x) - f(a)\,| < \varepsilon\,. \tag{9}$$

10.4 Satz. *Es seien $f, g : I \mapsto \mathbb{R}$ in $a \in I$ stetig. Dann sind auch $f + g$, fg und, für $g(a) \neq 0$, ${}^{f}\!/_{g}$ in a stetig.*

Dies folgt sofort aus Satz 10.2 bzw. Satz 7.8. Für die *Komposition* stetiger Funktionen gilt:

10.5 Satz. *(vgl. [A1], 8.13). Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle, $f : I \mapsto J$ in $a \in I$ und $h : J \mapsto \mathbb{R}$ in $f(a) \in J$ stetig. Dann ist auch $h \circ f : I \mapsto \mathbb{R}$ in a stetig.*

Beispiele. Für eine stetige Funktion $f : I \mapsto [0, \infty)$ sind auch die Funktionen $|\,f\,| = A \circ f$ und $g := \sqrt{f} = w_2 \circ f$ stetig, z. B. $g : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ auf $\mathbb{R}$.

Stetigkeit von Sinus und Kosinus. Aufgrund der Definition auf S. 13 gilt

$$|\sin s| \le |s| \quad \text{für alle} \quad s \in \mathbb{R} \tag{10}$$

und somit $\lim\limits_{s\to 0} \sin s = 0$. Es folgt $\cos^2 s = 1 - \sin^2 s \to 1$ für $s \to 0$ und somit auch $\lim\limits_{s\to 0} \cos s = 1$. Aus den Funktionalgleichungen (5.8) und (5.9)

$$\begin{aligned} \sin(s+h) &= \sin s \cos h + \cos s \sin h \,, \\ \cos(s+h) &= \cos s \cos h - \sin s \sin h \end{aligned}$$

ergibt sich somit sofort $\sin(s+h) \to \sin s$ und $\cos(s+h) \to \cos s$ für $h \to 0$ aufgrund von Satz 10.2, also die Stetigkeit von Sinus und Kosinus in $s \in \mathbb{R}$.

Wir stellen zwei Typen von Unstetigkeiten vor:

Sprungstellen. a) Die *Heaviside-Funktion* $H : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ aus Beispiel d) auf S. 41 hat eine *Sprungstelle* bei 0 wegen $H(0^-) \ne H(0^+)$.

b) Die *Gauß-Klammer-Funktion* $G : x \mapsto [x]$ (vgl. S. 19) ist auf $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ stetig und hat Sprungstellen in allen Punkten aus $\mathbb{Z}$, wo sie offenbar *rechtsseitig* stetig ist.

Oszillationen. a) Durch die Inversion $j : x \mapsto \frac{1}{x}$ werden die unendlich vielen Oszillationen des Kosinus (oder des Sinus) auf kleine Intervalle um 0 transformiert. Die auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ stetige Funktion

$$u : x \mapsto \cos\tfrac{1}{x} \tag{11}$$

„schwankt“ auf jedem Intervall $(0,\delta)$ und $(-\delta,0)$ $(\delta > 0)$ „unendlich oft zwischen -1 und 1 “ (vgl. [A1], Abb. 24f). Wegen $u(\pm\frac{1}{k\pi}) = (-1)^k$ für $k \in \mathbb{N}$ existieren die einseitigen Grenzwerte $u(0^+)$ und $u(0^-)$ *nicht.* Mit jeder Festsetzung von $u(0)$, z. B. mit $u(0) := 0$, ist u daher *unstetig* in 0.

b) Durch *Dämpfung der Oszillation* entstehen *stetige* Funktionen, z. B. (vgl. [A1], Abb. 24g für $n = 2$)

$$u_n : x \mapsto x^n\, u(x)\,, \quad n > 0\,; \tag{12}$$

in der Tat gilt dann $|u_n(x)| \le |x|^n \to 0$ für $x \to 0$.

Frage: Es seien $J \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f : J \mapsto \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, daß f auf J ein Maximum und ein Minimum besitzt.

11 Differenzierbare Funktionen

Lernziele:

- *Kompetenzen:* Rechnungen mit Ableitungen
- *Resultat:* Kettenregel

Definiton. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : I \mapsto \mathbb{R}$ heißt* **differenzierbar** *im Punkt $a \in I$, falls der Grenzwert*

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \Delta f(a;x) \; = \; \lim_{x \to a} \tfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \tag{1}$$

existiert. $f'(a)$ heißt dann die **Ableitung** *von f an der Stelle $a \in I$.*

Beispiele. a) Für eine *affine* Funktion $f : x \mapsto cx + d$ hat man

$$\Delta f(a;x) \; = \; \tfrac{(cx+d)-(ca+d)}{x-a} \; = \; \tfrac{cx-ca}{x-a} \; = \; c$$

und somit $f'(a) = c$ für alle $a \in \mathbb{R}$. In der Tat ist der Graph von f eine *Gerade,* die natürlich in jedem Punkt ihre eigene Tangente ist.

b) Für die Potenzfunktion $p_2 : x \mapsto x^2$ gilt also $p_2'(a) = 2a$ für $a \in \mathbb{R}$.

c) Für die Wurzelfunktion $w_2 : x \mapsto \sqrt{x}$ gilt $w_2'(b) = \frac{1}{2\sqrt{b}}$ für $b > 0$ nach (10.4); in 0 dagegen ist w_2 *nicht differenzierbar.*

Bemerkungen. a) Obige Definition erfaßt auch *rechtsseitige Ableitungen $f_+'(a)$* und *linksseitige Ableitungen $f_-'(a)$* (vgl. Bemerkung c) auf S. 41).

b) Der Differenzenquotient in (1) wird mit $\Delta x := x - a$ oft in der Form $\Delta f(a;x) = \frac{\Delta f}{\Delta x}$ geschrieben; für seinen Limes $f'(a) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ ist daher auch die folgende Bezeichnung üblich:

$$f'(a) \; =: \tfrac{df}{dx}(a) \; =: (\tfrac{d}{dx} f)(a)\,. \tag{2}$$

11.1 Feststellung. *Eine in $a \in I$ differenzierbare Funktion ist dort auch stetig.*

Beispiel. Die Umkehrung von Feststellung 11.1 gilt i. a. *nicht.* So ist etwa die Betragsfunktion $A : x \mapsto |\, x \,|$ auf $\mathbb{R}$ stetig, in 0 jedoch nicht differenzierbar. In der Tat gilt $A_-'(0) = -1$ und $A_+'(0) = +1$.

Ableitung der Potenzfunktionen. Für die Bestimung der Ableitung der *Potenzfunktionen* $p_n : x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$, geben wir zwei Methoden an; eine weitere folgt in Beispiel b) auf S. 47.

a) In der *geometrischen Summenformel* (2.5)

$$(1-q)\,(1+q+\cdots+q^{n-1}) \;=\; 1-q^n \quad \text{für } \; n \in \mathbb{N}$$

setzen wir für $a \in \mathbb{R}$ und $x \neq 0$ einfach $q = \frac{a}{x}$ ein und erhalten nach Multiplikation mit x^n die Formel

$$(x-a)\,(x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-1}) \;=\; x^n - a^n \quad \text{für } \; n \in \mathbb{N}\,. \tag{3}$$

Offenbar ist diese auch für $x = 0$ richtig. Damit ergibt sich nun mittels Satz 10.2 a)

$$\Delta p_n(a;x) \;=\; \tfrac{x^n-a^n}{x-a} \;=\; x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-1} \;\to\; na^{n-1}$$

für $x \to a$. Somit gilt $p_n'(a) = na^{n-1}$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$; nach obigem Beispiel a) ist dies auch für $n = 0$ richtig. Mit der Bezeichnung aus (2) gilt also

$$\tfrac{d}{dx}\,(x^n) \;=\; nx^{n-1} \quad \text{für alle } \; x \in \mathbb{R} \; \text{ und } \; n \in \mathbb{N}_0\,. \tag{4}$$

b) Mit $h := x - a$ gilt für den Limes in (1) auch

$$f'(a) \;=\; \lim_{h \to 0} \tfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad . \tag{5}$$

Nun liefert der *binomische Satz* 3.2

$$(a+h)^n - a^n \;=\; n\,a^{n-1}\,h + \tbinom{n}{2}\,a^{n-2}\,h^2 + \cdots + n\,a\,h^{n-1} + h^n\,,$$

und mittels Satz 10.2 folgt daraus für $h \to 0$:

$$\tfrac{p_n(a+h)-p_n(a)}{h} \;=\; n\,a^{n-1} + \tbinom{n}{2}\,a^{n-2}\,h + \cdots + h^{n-1} \to n\,a^{n-1}\,.$$

Beachten Sie bitte, daß für dieses Argument die genaue Kenntnis der Binomialkoeffizienten nicht erforderlich ist; es genügt die vorläufige Variante (3.1) des binomischen Satzes.

Ableitung von Sinus und Kosinus. a) Wir zeigen zunächst die Aussage

$$\lim_{s \to 0} \tfrac{\sin s}{s} \;=\; 1\,. \tag{6}$$

Offenbar gilt die Abschätzung

$$\sin s \;\leq\; s \quad \text{für } \; 0 < s < \tfrac{\pi}{2}\,. \tag{7}$$

Andererseits gilt auch

$$s \;\leq\; \tfrac{\sin s}{\cos s} \quad \text{für } \; 0 < s < \tfrac{\pi}{2}\,. \tag{8}$$

In der Tat ist $\frac{\sin s}{\cos s}$ die Länge der Strecke $\overline{QA}$ in Abb. 11a, und $\frac{1}{2}\frac{\sin s}{\cos s}$ ist der Flächeninhalt des Dreiecks OQA. Entsprechend ist $\frac{1}{2}s$ der Flächeninhalt des *Kreissektors* OQP (vgl. 17 und **??**), und damit ist (8) offensichtlich. Aus (7) und (8) folgt

$$\cos s \ \le\ \frac{\sin s}{s} \ \le\ 1 \quad \text{für} \quad 0 < s < \frac{\pi}{2}\,. \tag{9}$$

Aus $\lim\limits_{s\to 0} \cos s \,=\, 1$ (vgl. S. 44) ergibt sich nun $\frac{\sin s}{s} \to 1$ für $s \to 0^+$, und wegen $\sin(-s) = -\sin s$ folgt dies auch für $s \to 0^-$. Damit ist (6) gezeigt.

b) Für $0 < |\,s\,| < \frac{\pi}{2}$ gilt weiter

$$\frac{\cos s - 1}{s} \ =\ \frac{1}{\cos s + 1}\cdot\frac{\cos^2 s - 1}{s} \ =\ \frac{-\sin s}{\cos s + 1}\cdot\frac{\sin s}{s}\,,$$

nach (6) also

$$\lim_{s\to 0} \frac{\cos s - 1}{s} \ =\ 0\,. \tag{10}$$

c) Aus den *Funktionalgleichungen* (5.8) und (5.9) sowie (6) und (10) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \frac{\sin x\,\cos h + \cos x\,\sin h - \sin x}{h}\\
&= \frac{\cos h - 1}{h}\,\sin x + \frac{\sin h}{h}\,\cos x \to \cos x\,,\\
\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} &= \frac{\cos x\,\cos h - \sin x\,\sin h - \cos x}{h}\\
&= \frac{\cos h - 1}{h}\,\cos x - \frac{\sin h}{h}\,\sin x \to -\sin x \quad \text{für} \quad x\in\mathbb{R}\,, \quad \text{also}
\end{aligned}$$

$$\sin' x \ =\ \cos x\,, \quad \cos' x \ =\ -\sin x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{11}$$

11.2 Satz. *Sind $f, g : I \mapsto \mathbb{R}$ in $a \in I$ differenzierbar, so gilt dies auch für die Funktionen $f+g$, $f\cdot g$ und, im Fall $g(a) \ne 0$, für $\frac{f}{g}$. Es gelten die Regeln*

$$(f+g)'(a) \ =\ f'(a) + g'(a)\,, \tag{12}$$

$$(f\cdot g)'(a) \ =\ f'(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot g'(a) \quad \textit{(Produktregel)}\,, \tag{13}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) \ =\ \frac{f'(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g'(a)}{g(a)^2} \quad \textit{(Quotientenregel)}\,. \tag{14}$$

Beweis s. [A1], 19.6.

Beispiele. a) Wir geben einen Induktionsbeweis für Formel (4): Für $n = 0$ und $n = 1$ ist $\frac{d}{dx}(x^n) = n\,x^{n-1}$ offenbar richtig. Gilt dies für n, so folgt mit (13)

$$\frac{d}{dx}(x^{n+1}) \ =\ \frac{d}{dx}(x\cdot x^n) \ =\ 1\cdot x^n + x\cdot n\,x^{n-1} \ =\ (n+1)\,x^n\,.$$

b) Für $x \ne 0$ und $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich die Ableitung von $x \mapsto x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ zu

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}) \ =\ -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} \ =\ -n\,x^{-n-1}$$

aufgrund der Quotientenregel. Formel (4) gilt also für alle ganzen Zahlen $n \in \mathbb{Z}$.

c) Für $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich aufgrund von (10.4) und der Produktregel die Ableitung der Funktion $x \mapsto x^{n+\frac{1}{2}} := x^n\,\sqrt{x}$ zu

$$\frac{d}{dx}(x^{n+\frac{1}{2}}) \ =\ n\,x^{n-1}\cdot\sqrt{x} + x^n\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} \ =\ (n+\tfrac{1}{2})\,x^{n-\frac{1}{2}}\,. \tag{15}$$

Tangens. a) Der *Tangens* wird außerhalb der Nullstellen des Kosinus als Quotient von Sinus und Kosinus erklärt, also

$$\tan x := \tfrac{\sin x}{\cos x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi + \tfrac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Wegen $\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$ und $\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$ ist der Tangens auf seinem Definitionsbereich eine ungerade und π- periodische Funktion.

b) Nach der Quotientenregel hat man für $x \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\begin{aligned} \tan' x &= \tfrac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \tfrac{1}{\cos^2 x} && (16)\\ &= \tfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x\,. && (17) \end{aligned}$$

11.3 Satz (Kettenregel). *Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $f : I \mapsto J$ sowie $h : J \mapsto \mathbb{R}$ Funktionen. Ist f differenzierbar in einem Punkt $a \in I$ und h differenzierbar im Punkt $b := f(a) \in J$, so ist auch $h \circ f : I \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar in a, und es gilt*

$$(h \circ f)'(a) = h'(f(a)) \cdot f'(a)\,. \tag{18}$$

Beweis. Wir unterscheiden zwei Fälle:

a) Es gibt $\delta > 0$ mit $f(x) \neq f(a)$ für alle $x \in I$ mit $0 < |x - a| < \delta$. Für eine Folge $I\backslash\{a\} \ni x_n \to a$ gilt dann $f(x_n) \to f(a)$ aufgrund der Stetigkeit von f sowie $f(x_n) \neq f(a)$ für große n. Für diese n gilt dann

$$\Delta(h \circ f)(a; x_n) = \tfrac{h(f(x_n)) - h(f(a))}{x_n - a} = \tfrac{h(f(x_n)) - h(f(a))}{f(x_n) - f(a)}\ \tfrac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}\,, \tag{19}$$

und es folgt $\Delta(h \circ f)(a; x_n) \to h'(f(a)) \cdot f'(a)$.

b) Gilt die Voraussetzung von a) nicht, so gibt es zu $n \in \mathbb{N}$ Punkte $z_n \in I$ mit $0 < |z_n - a| < \frac{1}{n}$ und $f(z_n) = f(a)$. Dies impliziert offenbar

$$f'(a) = \lim_{n\to\infty} \tfrac{f(z_n) - f(a)}{z_n - a} = 0\,.$$

Wir zeigen, daß dann auch $(h \circ f)'(a) = 0$ gelten muß, (18) also erfüllt ist: Wegen $\Delta h(b; y) \to h'(b)$ gilt

$$\exists\, \delta > 0\ \forall\, y \in J\ :\ 0 < |y - b| < \delta \ \Rightarrow\ \left|\tfrac{h(y) - h(b)}{y - b}\right| \leq |h'(b)| + 1\,. \tag{20}$$

Nun sei (x_n) eine Folge in $I\backslash\{a\}$ mit $x_n \to a$. Für Indizes $n \in \mathbb{N}$ mit $f(x_n) \neq f(a)$ gilt dann (19), wegen (20) also

$$|\Delta(h \circ f)(a; x_n)| \leq (|h'(b)| + 1) \cdot \left|\tfrac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}\right| \tag{21}$$

für große n. Für alle anderen Indizes ist aber sogar $\Delta(h \circ f)(a; x_n) = 0$, (21) also erst recht erfüllt. Aus $\Delta f(a; x_n) \to 0$ folgt somit $\Delta(h \circ f)(a; x_n) \to 0$, und dies zeigt $(h \circ f)'(a) = 0$. ◇

Beispiele. a) Für $g : x \mapsto (x^2+1)^n$, $n \in \mathbb{Z}$, hat man $g = h \circ f$ mit $f : x \mapsto x^2+1$ und $h : y \mapsto y^n$. Aus (18) und (4) folgt also

$$g'(x) \;=\; n\,(x^2+1)^{n-1} \cdot 2x\,.$$

b) Die Wurzelfunktion $w_2 : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ ist nach Satz 7.12 stetig und nach Beispiel c) auf S. 45 auf $(0,\infty)$ differenzierbar. Für eine differenzierbare Funktion $f : I \mapsto [0,\infty)$ ist somit $g := \sqrt{f}$ auf I stetig und außerhalb der Nullstellen von f differenzierbar, und dort gilt

$$g'(x) \;=\; \tfrac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x) \quad (\text{für} \;\; f(x) \neq 0)\,. \tag{22}$$

c) Speziell für $f : x \mapsto r^2 - x^2$ ist die Funktion $g : x \mapsto \sqrt{r^2-x^2}$ auf $[-r,r]$ stetig und auf $(-r,r)$ sogar differenzierbar mit

$$g'(x) \;=\; -\tfrac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}\,, \qquad |\,x\,| < r\,.$$

d) Sind in der Situation von Satz 11.3 die Funktionen h und f *Umkehrfunktionen* voneinander, gilt also $(h \circ f)(x) = x$ für alle $x \in I$, so impliziert (18) sofort

$$h'(f(a)) \cdot f'(a) \;=\; 1 \tag{23}$$

(vgl. S. 38), insbesondere also $f'(a) \neq 0$ und $h'(f(a)) \neq 0$.

Definitionen. a) Eine Funktion $f : I \mapsto \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar* auf dem Intervall I, wenn f in jedem Punkt von I differenzierbar ist.

b) Ist $f : I \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar auf I und die durch $f' : x \mapsto f'(x)$ definierte *Ableitungsfunktion* von f *stetig,* so heißt f *stetig differenzierbar* auf I. Mit $\mathcal{C}^1(I)$ wird die Menge aller stetig differenzierbaren Funktionen auf I bezeichnet.

c) Ist $f : I \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar auf I und $f' : I \mapsto \mathbb{R}$ ebenfalls differenzierbar auf I, so heißt f *zweimal differenzierbar* auf I. Die Ableitung $f'' := (f')' : I \mapsto \mathbb{R}$ von f' heißt *zweite Ableitung* von f.

Zweite Ableitungen. a) Wie auf S. 38 bezeichne $s(t)$ den Ort eines Massenpunktes auf einer Geraden zur Zeit $t \in \mathbb{R}$. Ist die Funktion s zweimal differenzierbar, so ist ihre Ableitung $v = \dot{s}$ die *Geschwindigkeit,* ihre *zweite Ableitung* $b = \dot{v} = \ddot{s}$ die *Beschleunigung* des Massenpunktes. In der Physik werden Ableitungen nach der Zeit meist durch einen Punkt „ $\dot{} = \frac{d}{dt}$ “ bezeichnet. Auch für andere zeitabhängige Größen ist deren Ableitung als *Änderungsgeschwindigkeit* zu interpretieren.

b) Die *geometrische Bedeutung* zweiter Ableitungen wird in Abschnitt **??** diskutiert.

Beispiele. a) Die Ableitung einer differenzierbaren Funktion ist i. a. *nicht stetig.* Ein solches Beispiel ist gegeben durch die oszillierende Funktion (vgl. S. 44)

$$u_2 : x \mapsto x^2\, u(x) \;=\; \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Es ist u stetig auf $\mathbb{R}$, und für $x \neq 0$ berechnen wir

$$u_2'(x) \;=\; 2x \cos \tfrac{1}{x} + x^2 \cdot (-\sin \tfrac{1}{x}) \cdot (-\tfrac{1}{x^2}) \;=\; 2x \cos \tfrac{1}{x} + \sin \tfrac{1}{x}\,. \tag{24}$$

Weiter gilt

$$\Delta u_2(x;0) \;=\; \tfrac{u_2(x)-u_2(0)}{x} \;=\; x \cos \tfrac{1}{x} \to 0 \quad \text{für} \quad x \to 0\,,$$

und somit existiert $u_2'(0) = 0$. Wegen (24) existieren aber die einseitigen Grenzwerte $u_2'(0^+)$ und $u_2'(0^-)$ *nicht;* folglich ist u_2 auf $\mathbb{R}$ differenzierbar, u_2' in 0 aber *unstetig.*

b) Die Funktion $f : x \mapsto x\,|\,x\,| = \begin{cases} x^2 & , \quad x \geq 0 \\ -x^2 & , \quad x < 0 \end{cases}$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $f'(x) = 2\,|\,x\,|$ für $x \neq 0$. Weiter hat man

$$\Delta f(0;x) \;=\; \tfrac{x\,|\,x\,|-0}{x-0} \;=\; |\,x\,| \to 0 \quad \text{für} \quad x \to 0\,,$$

also $f'(0) = 0$. Somit gilt $f'(x) = 2\,|\,x\,|$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und daher $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Da aber f' in 0 nicht differenzierbar ist, ist f nicht zweimal differenzierbar.

11.4 Definition. *a) Für* $2 \leq m \in \mathbb{N}$ *definieren wir rekursiv*

$$\mathcal{C}^m(I) := \;\{f \in \mathcal{C}^1(I) \mid f' \in \mathcal{C}^{m-1}(I)\}$$

und setzen $f^{(m)} := (f')^{(m-1)}$ *für* $f \in \mathcal{C}^m(I)$.
b) Funktionen, die in jedem $\mathcal{C}^m(I)$ *liegen, heißen* unendlich oft differenzierbar *auf dem Intervall* I, *Notation:* $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$.

Für $f \in \mathcal{C}^m(I)$ heißt $f^{(m)} \in \mathcal{C}(I)$ die *m-te Ableitung* von f. Wir schreiben auch $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)} = f'''$, allgemein $f^{(m)}(x) = \frac{d^m f}{dx^m}(x) = ((\frac{d}{dx})^m f)(x)$, und für $m = 0$ auch $f^{(0)} := f$.

Beispiele. a) Für die Potenzfunktion $p_n : x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ hat man

$$p_n'(x) \;=\; n\,x^{n-1}\,,\; p_n''(x) \;=\; n\,(n-1)\,x^{n-2}\,,\; p_n'''(x) \;=\; n\,(n-1)\,(n-2)\,x^{n-3}\,,$$

$$p_n^{(n)}(x) \;=\; n! \quad \text{und} \quad p_n^{(k)}(x) \;=\; 0 \quad \text{für} \quad k > n\,. \tag{25}$$

Insbesondere gilt $p_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
b) Für die Inversion $j : x \mapsto {}^1\!/_x$ gilt über $\mathbb{R}\backslash\{0\}$:

$$j'(x) = -\tfrac{1}{x^2}\,,\; j''(x) = \tfrac{2}{x^3}\,,\; \ldots\,,\; j^{(m)}(x) = (-1)^m\,\tfrac{m!}{x^{m+1}}\,,\; \ldots\,, \tag{26}$$

wie man leicht induktiv bestätigt. Also ist $j \in \mathcal{C}^\infty(0,\infty)$ und $j \in \mathcal{C}^\infty(-\infty,0)$.

c) Aus (11) ergibt sich sofort $\sin \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ und $\cos \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Da die Differentiationsregeln 11.2 und 11.3 sinngemäß auch für $\mathcal{C}^m$ - Funktionen gelten (vgl. den folgenden Satz 11.5), ist auch der Tangens eine $\mathcal{C}^\infty$ - Funktion auf seinem Definitionsbereich.

Aus den Sätzen 11.2 und 11.3 ergibt sich:

11.5 Satz. *Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $0 \le m \le \infty$.*

a) Aus $f \in \mathcal{C}^m(I)$ und $g \in \mathcal{C}^m(I)$ folgt auch $f+g \in \mathcal{C}^m(I)$.

b) Aus $f \in \mathcal{C}^m(I)$ und $g \in \mathcal{C}^m(I)$ folgt auch $f \cdot g \in \mathcal{C}^m(I)$.

c) Es seien $f \in \mathcal{C}^m(I)$ mit $f(I) \subseteq J$ und $h \in \mathcal{C}^m(J)$. Dann folgt auch $h \circ f \in \mathcal{C}^m(I)$.

d) Ist $f \in \mathcal{C}^m(I)$ und $f(x) \neq 0$ für $x \in I$, so folgt auch $\frac{1}{f} \in \mathcal{C}^m(I)$.

Beweis s. [A1], 19.12.

Die Mengen $\mathcal{C}^m(I)$ sind also *Vektorräume,* sogar *Algebren.* Der Raum $\mathcal{C}(I) = \mathcal{C}^0(I)$ ist auch ein *Vektorverband,* da aus $f \in \mathcal{C}(I)$ auch $|f| \in \mathcal{C}(I)$ folgt. Letzteres gilt *nicht* für $\mathcal{C}^m(I)$ und $m \ge 1$.

Fragen: 1. Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \mapsto \mathbb{R}$ in jedem Punkt $x \in I$ differenzierbar mit $f'(x) > 0$. Zeigen Sie, daß f streng monoton wachsend ist.

2. Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \mapsto \mathbb{R}$ in jedem Punkt $x \in I$ differenzierbar mit $f'(x) = 0$. Zeigen Sie, daß f konstant ist.

3. Versuchen Sie, Funktionen $f \in \mathcal{C}^1(0,\infty)$ zu finden mit

$f'(x) = 5\,x^2 - \frac{3}{x^2}$, $f'(x) = \cos^2 x \, \sin x$, $f'(x) = \frac{4}{1+x^2}$, $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f'(x) = \frac{\sin x}{x}$.

12 Extremwerte und Monotonie

Lernziele:

- *Resultate:* Existenz von Maxima und Minima stetiger Funktionen auf kompakten Intervallen, Monotoniesatz
- *Kompetenzen:* Bestimmung lokaler Extrema

Die Differentialrechnung kann zur Bestimmung von *Extremwerten* differenzierbarer Funktionen verwendet werden. Wir starten mit zwei Beispielen:

12.1 Beispiel. a) Ein nach oben offener Kanal mit rechteckigem Querschnitt und gegebener Querschnittsfläche A (z. B. $A = 3\ m^2$) soll unter minimalen Kosten gebaut werden. Wir bezeichnen die Breite des Querschnitts mit x, seine Höhe mit y; die Kosten des Kanals nehmen wir als proportional zu $K(x,y) = x + 2y$ an. Wegen $xy = A$ können wir $y = \frac{A}{x}$ einsetzen und müssen die *Kostenfunktion*

$$K(x) := x + \tfrac{2A}{x}, \quad x > 0, \tag{1}$$

auf dem Intervall $I := (0, \infty)$ minimieren.

b) Für $A = 3$ berechnet man $K(1) = 7$, $K(2) = 4$, $K(3) = 5$ und $K(4) = 5{,}5$. Dies und eine Abbildung suggerieren, daß K irgendwo zwischen $x = 2$ und $x = 3$ minimal sein sollte.

12.2 Beispiel. a) Eine Insel Q liege vor einer geradlinigen Küste; ihre Entfernung zum nächstgelegenen Küstenpunkt P betrage $q > 0$, z. B. $q = 3\ km$. Ein Mensch möchte von der Insel aus so schnell wie möglich einen Punkt Z an der Küste erreichen, dessen Entfernung von P mit $d > 0$ bezeichnet wird, z. B. $d = 4\ km$. Dazu rudert er zunächst mit einer Geschwindigkeit $v_1 > 0$, z. B. $v_1 = 4\ km/h$, über das Meer zu einem Küstenpunkt L zwischen P und Z und läuft anschließend mit einer Geschwindigkeit $v_2 > 0$, z. B. $v_2 = 6\ km/h$, von L nach Z. Die Frage ist, bei welcher Wahl von L die Reisezeit minimal wird.

b) Im Fall $v_1 \geq v_2$ wird die Reisezeit natürlich für $L = Z$ minimal; wir nehmen daher ab jetzt $v_1 < v_2$ an.

c) Wir bezeichnen den Abstand von P zu L mit $x \geq 0$. Die Distanz von Q zu L beträgt nach dem Satz des Pythagoras $\sqrt{q^2 + x^2}$, die Reisezeit von Q nach L also $T_1(x) = \frac{1}{v_1}\sqrt{q^2 + x^2}$. Weiter ist die Reisezeit von L nach Z offenbar $T_2 = \frac{1}{v_2}(d - x)$, die gesamte Reisezeit also

$$T(x) = \tfrac{1}{v_1}\sqrt{q^2 + x^2} + \tfrac{1}{v_2}(d - x). \tag{2}$$

d) Mit den obigen Zahlenwerten hat man etwa $T(0) = 1{,}4167\,h$, $T(1) = 1{,}2906\,h$, $T(2) = 1{,}2347\,h$, $T(3) = 1{,}2273\,h$ und $T(4) = 1{,}25\,h$. Dies suggeriert, daß der optimale Landepunkt irgendwo zwischen $x = 2$ und $x = 3$ liegen sollte.

Lokale Extrema. Wir zeigen nun, dass in *Minimalstellen* oder *Maximalstellen differenzierbarer* Funktionen im *Innern* eines Intervalls die *Ableitung verschwinden* muß.

Dazu genügt es natürlich, daß a eine Extremalstelle von f bezüglich eines kleinen *offenen* Intervalls um a ist; in dieser Situation heißt a **lokale Extremalstelle** von f. Eine Funktion $f : I \mapsto \mathbb{R}$ besitzt also ein *lokales Maximum [Minimum]* in $a \in I$, falls es $\delta > 0$ gibt, so daß gilt:

$$\forall\, x \in I : \ |\, x - a\,| < \delta \ \Rightarrow \ f(x) \le f(a) \ \ [f(x) \ge f(a)]\,. \tag{3}$$

Dieses heißt *isoliert,* falls $f(x) \neq f(a)$ für alle $x \in I$ mit $0 < |\, x - a\,| < \delta$ gilt.

12.3 Satz. *(vgl. [A1], 20.2). Eine Funktion $f : I \mapsto \mathbb{R}$ habe in einem* inneren *Punkt $a \in I$ des Intervalls I ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum. Ist f in a differenzierbar, so folgt*

$$f'(a) = 0\,. \tag{4}$$

Warnungen. a) Die Aussage von Satz 12.3 gilt *nur für innere Punkte* und wird für *Randpunkte i.a. falsch!* So hat z. B. die Funktion $p_1 : x \mapsto x$ auf $[0, 1]$ ihr Minimum im Punkt 0 und ihr Maximum im Punkt 1, aber es gilt $p_1'(0) = p_1'(1) = 1$.

b) Die Umkehrung von Satz 12.3 ist i.a. falsch, wie das einfache Beispiel $p_3 : x \mapsto x^3$ in 0 bereits zeigt: Trotz $p_3'(0) = 0$ ist p_3 streng monoton wachsend, besitzt also keine lokalen Extrema. (4) ist also nur eine *notwendige*, keine hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Extremums.

c) Punkte $a \in I$ mit $f'(a) = 0$ heißen *kritische Punkte* einer Funktion $f : I \mapsto \mathbb{R}$.

12.4 Beispiele. a) Gegeben sei die Kostenfunktion $K : x \mapsto x + \frac{2A}{x}$ aus (1). Wegen $K'(x) = 1 - \frac{2A}{x^2}$ gilt für $x > 0$ offenbar

$$K'(x) \;=\; 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 \;=\; 2A \;\Leftrightarrow\; x \;=\; \sqrt{2A}\,. \tag{5}$$

In dem kritischen Punkt $x = a = \sqrt{2A}$ gilt $y = \frac{A}{a} = \sqrt{\frac{A}{2}}$, also $x = 2y$; die beiden Summanden der Kosten $K(a) = x + 2y$ sind dann gleich. Im Fall $A = 3$ hat man $a = \sqrt{6} = 2,4494\ldots$.

b) Für die Zeitfunktion $T : x \mapsto \frac{1}{v_1}\sqrt{q^2 + x^2} + \frac{1}{v_2}(d - x)$ aus (2) gilt

$$T'(x) \;=\; \frac{x}{v_1\sqrt{q^2+x^2}} - \frac{1}{v_2}\,; \tag{6}$$

für $x \ge 0$ hat man daher

$$T'(x) \;=\; 0 \;\Leftrightarrow\; v_2^2\, x^2 \;=\; v_1^2\,(q^2 + x^2) \;\Leftrightarrow\; x \;=\; \frac{q\, v_1}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}} \;=: a\,. \tag{7}$$

Für die Zahlen aus Beispiel 12.2 a) hat man $a = \frac{6}{\sqrt{5}} = 2,6832\ldots \in [0, 4]$.

Die Funktionen K und T aus den Beispielen 12.1 und 12.2 haben also jeweils nur einen kritischen Punkt in ihrem Definitionsintervall. Wir möchten nun gern schließen, daß es sich in beiden Fällen um eine Minimalstelle handelt. Dazu verwenden wir das folgende wichtige Resultat:

12.5 Theorem. *Es seien $J \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f : J \mapsto \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f* beschränkt *und besitzt ein* Maximum *und ein* Minimum.

Bemerkungen. a) Theorem 12.5 ist für andere Intervalltypen nicht richtig: Die Inversion $j : x \mapsto \frac{1}{x}$ ist auf $(0,1)$ oder $(0,\infty)$ nicht nach oben beschränkt. Auf $(0,\infty)$ oder $[1,\infty)$ ist j durch 0 nach unten beschränkt, besitzt allerdings dort kein Minimum.

b) In Theorem 12.5 ist die Voraussetzung der Stetigkeit wesentlich. So ist etwa die auf $[-1,1]$ durch $f(x) := \frac{1}{1-x^2}$ für $|\,x\,| < 1$ und $f(\pm 1) := 0$ definierte Funktion unbeschränkt; die durch $g(x) := x$ für $|\,x\,| < 1$ und $f(\pm 1) := 0$ ist zwar beschränkt, hat aber weder ein Maximum noch ein Minimum auf $[-1,1]$.

c) Es ist nicht ganz leicht, Theorem 12.5 zu *beweisen;* versuchen Sie es bitte einmal selbst! Wir geben einen Beweis mittels Intervallschachtelungen am Ende des Abschnitts und führen mit Hilfe neuer Konzepte weitere Beweise in Abschnitt 15.

12.6 Beispiel. Die Zeitfunktion $T : x \mapsto \frac{1}{4}\sqrt{9+x^2} + \frac{1}{6}(4-x)$ aus Beispiel 12.2 a) besitzt also ein Maximum und ein Minimum auf $[0,4]$. Nach Satz 12.3 werden diese am Rand oder in einem kritischen Punkt angenommen. Nun ist aber $a = \frac{6}{\sqrt{5}}$ der einzige kritische Punkt von T, und es ist $T(a) = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{5}}{4} = 1{,}22568\ldots$. Somit ist $T(a) < T(4) < T(0)$, und daher ist a die Minimalstelle und 0 die Maximalstelle von f auf $[0,4]$.

12.7 Beispiel. In Beispiel 12.1 läßt sich Theorem 12.5 nicht unmittelbar anwenden, da ja die Funktion K auf dem offenen Intervall $(0,\infty)$ definiert ist (wo sie kein Maximum besitzt). Nun hat aber K den einzigen kritischen Punkt $a = \sqrt{2A}$ auf $(0,\infty)$, und es gilt $K(x) \mapsto +\infty$ für $x \to 0^+$ und auch für $x \to +\infty$. Analog zu Satz 10.3 gibt es daher Zahlen

$$0 < \delta < D \;\text{ mit }\; K(x) > K(a) + 1 \;\text{ für }\; x \le \delta \;\text{ und }\; x \ge D\,. \tag{8}$$

Nach Theorem 12.5 hat K ein Minimum auf dem kompakten Intervall $[\delta, D]$, und nach Satz 12.3 wird dieses am Rand oder in dem kritischen Punkt a angenommen. Wegen $K(a) < K(\delta)$ und $K(a) < K(D)$ muß dann a die Minimalstelle von K auf $[\delta, D]$ und somit auch $K(a) = 2\sqrt{2A}$ das Minimum von K auf $(0,\infty)$ sein.

Die Minimal- oder Maximaleigenschaft kritischer Punkte kann oft auch ohne (explizite) Verwendung von Theorem 12.5 gezeigt werden. Dazu bemerkt man zunächst folgendes: Ist eine Funktion f links von a monoton fallend und rechts von a monoton wachsend, so wird sie offenbar in a minimal (die *Umkehrung* dieser Aussage gilt allerdings *nicht,* vgl. etwa Beispiel 16 e)). *Monotonie-Eigenschaften* von f können aber mit Hilfe der *Ableitung* charakterisiert werden:

12.8 Feststellung. *Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar und monoton wachsend. Dann gilt $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$.*

Beweis. Es sei $a \in I$ fest. Dann ist $\Delta f(a;x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$ für alle $x \in I \backslash \{a\}$, also auch $f'(a) \geq 0$.

Das Beispiel $p_3 : x \mapsto x^3$ zeigt, daß aus der *strengen* Monotonie von f *nicht* die stärkere Aussage „$f'(x) > 0$ für alle $x \in I$" folgt. Umgekehrt gilt jedoch das wichtige

12.9 Theorem (Monotoniesatz). *Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar.*

a) Gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$, so ist f streng monoton wachsend.

b) Gilt $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$, so ist f monoton wachsend.

Bemerkungen. a) Im Fall $f'(x) < 0$ bzw. $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I$ ist f natürlich *streng monoton fallend* bzw. *monoton fallend,* was sich sofort durch Anwendung von Theorem 12.9 auf $-f$ ergibt.

b) Der Monotoniesatz ist sicher anschaulich einleuchtend, vor allem bei physikalischer Interpretation der Ableitung: Bei positiver Geschwindigkeit in eine gewisse Richtung bewegt man sich in dieser Richtung *vorwärts.*

c) Trotzdem ist ein Beweis des Monotoniesatzes nicht ganz leicht. Versuchen Sie bitte, selbst einen zu finden! Ein Beweis mittels Intervallschachtelungen folgt unten; später in Abschnitt 16 wird der Monotoniesatz eine einfache Konsequenz aus dem *Mittelwertsatz der Differentialrechnung* sein, der wiederum auf Satz 12.3 und Theorem 12.5 beruht.

12.10 Folgerung. *Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$. Dann ist f konstant.*

Beweis. Nach Theorem 12.9 ist f monoton wachsend und monoton fallend, also konstant.

Aus dem Monotoniesatz ergibt sich nun leicht eine *hinreichende Bedingung* für das Vorliegen eines *Extremums*:

12.11 Satz. *Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a \in I$ und $f : I \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar.*

a) Gilt $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I$ mit $x \leq a$ und $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ mit $x \geq a$, so ist a eine Minimalstelle für f auf I.

b) Gilt zusätzlich $f'(x) \neq 0$ für $x \in I \backslash \{a\}$, so ist a die einzige Minimalstelle von f auf I.

Beweis. a) Nach Theorem 12.9 b) ist f monoton fallend für $x \leq a$ und monoton wachsend für $x \geq a$.

b) Für $a < x \in I$ wählt man $a < y < x$. Nach Theorem 12.9 a) wächst nun f auf

$[y, x]$ *streng* monoton, und mit a) folgt $f(a) \le f(y) < f(x)$. Genauso zeigt man auch $f(x) > f(a)$ für für $I \ni x < a$.

Satz 12.11 gilt natürlich entsprechend für Maxima.

12.12 Beispiel. Für die Zeitfunktion $T : x \mapsto \frac{1}{v_1}\sqrt{q^2+x^2} + \frac{1}{v_2}(d-x)$ aus (2) gilt wegen (6) analog zu der Rechnung in (7) stets $T'(x) < 0$ für $0 \le x < a = \frac{q\,v_1}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}$ und $T'(x) > 0$ für $x > a$. Für $0 < a \le d$ ist daher a die einzige Minimalstelle von T auf $[0, d]$; im Fall $a > d$ liegt die einzige Minimalstelle von T in d.

Die Voraussetzungen von Satz 12.11 lassen sich oft mit Hilfe von *zweiten* Ableitungen verifizieren:

12.13 Satz. *Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : I \mapsto \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und $a \in I$ mit $f'(a) = 0$.*

a) Gilt $f''(x) \ge 0$ für alle $x \in I$, so ist a eine Minimalstelle von f auf I.

b) Gilt $f''(a) > 0$, so hat f in a ein isoliertes lokales Minimum.

c) Gilt $f''(a) > 0$ und $f''(x) \ge 0$ für alle $x \in I$, so ist a die einzige Minimalstelle von f auf I.

Beweis. a) Nach Theorem 12.9 b) ist f' monoton wachsend auf I; wegen $f'(a) = 0$ sind also die Voraussetzungen von Satz 12.11 a) erfüllt.

b) Nun sei $f''(a) > 0$. Wegen $\Delta f'(a; x) = \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} \to f''(a) > 0$ und $f'(a) = 0$ gibt es $\delta > 0$ mit $\frac{f'(x)}{x-a} > 0$ für alle $x \in I_\delta := I \cap [a - \delta, a + \delta]$ (vgl. Satz 10.1). Daraus folgt sofort $f'(x) > 0$ für $a < x \le a + \delta$ und $f'(x) < 0$ für $a - \delta \le x < a$, und die Anwendung von Satz 12.11 über dem Intervall I_δ liefert die Behauptung.

c) Nach b) ist a die einzige Minimalstelle von f auf I_δ. Wegen $f'' \ge 0$ auf I ist f' dort monoton wachsend. Daraus folgt $f(x) \ge f(a+\delta) > f(a)$ für $x \in I$ mit $x \ge a+\delta$ sowie $f(x) \ge f(a - \delta) > f(a)$ für $x \in I$ mit $x \le a - \delta$.

Für $f \in \mathcal{C}^2(I)$ ist der Beweis von b) einfacher.

Bemerkungen. a) Auch Satz 12.13 gilt entsprechend für Maxima, wie man etwa durch Übergang zu $-f$ sieht.

b) Im Fall $f'(a) = f''(a) = 0$ kann f'' sein Vorzeichen in a wechseln, so daß keine allgemeine Aussage über lokale Extrema getroffen werden kann. Die Potenzfunktionen $p_n : x \mapsto x^n$ etwa haben für gerade n ihr einziges Minimum in 0, für ungerade n aber kein lokales Extremum in 0. Satz 12.13 b) wird in 29.4 mit Hilfe der *Taylor-Formel* für den Fall verallgemeinert, daß $f^{(k)}(a) \neq 0$ für ein $k \ge 2$ gilt; für Polynome zeigen wir dieses Resultat bereits in Satz 13.9. Es gibt allerdings auch nahe a nicht konstante $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen mit $f^{(k)}(a) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ (vgl. Beispiel 29.11).

c) Zweimal differenzierbare Funktionen $f : I \mapsto \mathbb{R}$ mit $f''(x) \ge 0$ für alle $x \in I$ heißen *konvex,* solche mit $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in I$ *konkav.* Konvexe und konkave Funktionen werden in Abschnitt **??** genauer besprochen.

12.14 Beispiele. a) Die Kostenfunktion $K : x \mapsto x + \frac{2A}{x}$ aus (1) ist wegen $K'(x) = 1 - \frac{2A}{x^2}$ und $K''(x) = \frac{4A}{x^3} > 0$ für alle $x \in (0, \infty)$ konvex. Nach Satz 12.13 nimmt K genau im kritischen Punkt $a = \sqrt{2A}$ sein Minimum $K(a) = 2\sqrt{2a}$ an.

b) Auch die Zeitfunktion T aus (2) ist wegen

$$T''(x) \;=\; \frac{q^2}{v_1 \sqrt{q^2+x^2}^3} > 0 \quad \text{für } x \geq 0 \tag{9}$$

konvex, und nach Satz 12.13 ist der kritische Punkt $a = \frac{q\,v_1}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}$ die einzige Minimalstelle von T auf $[0, \infty)$. Für $a \leq d$ nimmt T sein Minimum auf dem Intervall $[0, d]$ also in a an, im Fall $a > d$ jedoch in d.

Als erste Anwendung von Folgerung 12.10 leiten wir *Galilei's Fallgesetz* aus *Newtons Grundgesetz der Mechanik* her:

Freier Fall. a) Wir betrachten die Höhe $y = H(t)$ eines Massenpunktes im Schwerefeld der Erde. Die auf diesen wirkende konstante Schwerkraft $-mg$ stimmt nach Newtons Grundgesetz der Mechanik mit $m\,\ddot{H}$ überein; für die Beschleunigung gilt also

$$\ddot{H}(t) \;=\; -g\,. \tag{10}$$

Es ist (10) eine *Differentialgleichung* zweiter Ordnung für die gesuchte Funktion H.

b) Eine Lösung der Differentialgleichung erster Ordnung

$$\dot{v}(t) \;=\; -g \tag{11}$$

ist offenbar $v(t) := -gt$. Ist w eine weitere Lösung von (11), so gilt $\frac{d}{dt}(v - w) = 0$, und nach Folgerung 12.10 ist $v - w$ konstant. Folglich ist

$$v(t) \;=\; v_0 - gt\,, \quad v_0 \in \mathbb{R}\,, \tag{12}$$

die allgemeine Lösung von (11), und durch Einsetzen von $t = 0$ sieht man, daß v_0 die Anfangsgeschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ sein muß.

c) Somit bleibt

$$\dot{H}(t) \;=\; v(t) \;=\; v_0 - gt \tag{13}$$

zu lösen, und wie in b) erhält man als allgemeine Lösung

$$H(t) \;=\; y_0 + v_0\,t - \tfrac{1}{2}\,g\,t^2\,, \quad y_0\,, v_0 \in \mathbb{R}\,. \tag{14}$$

Durch Einsetzen von $t = 0$ sieht man sofort, daß y_0 die Anfangshöhe zur Zeit $t = 0$ sein muß.

Ein Beweis von Theorem 12.5. Es seien also $J = [a, b]$, $f : J \mapsto \mathbb{R}$ stetig und $c = \frac{1}{2}(a + b)$ der Mittelpunkt von J. Gilt die Aussage

$$\forall\, x \in [a, c]\ \exists\, y \in [c, b]\ :\ f(x) \le f(y) \tag{15}$$

nicht, so hat man statt dessen

$$\exists\, x \in [a, c]\ \forall\, y \in [c, b]\ :\ f(x) > f(y)\,. \tag{16}$$

Folglich gilt für $J_1 = [a, c]$ oder $J_1 = [c, b]$ die Aussage

$$\forall\, x \in J\ \exists\, y \in J_1\ :\ f(x) \le f(y)\,. \tag{17}$$

Nun argumentiert man auf J_1 genauso und fährt so fort; dadurch erhält man eine Intervallschachtelung

$$J \supseteq J_1 \supseteq \ldots \supseteq J_n \supseteq J_{n+1} \supseteq \ldots$$

mit $|\, J_n \,| = 2^{-n}\,|\, J \,| \to 0$, für die die folgende Aussage gilt:

$$\forall\, x \in J\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, y_n \in J_n\ :\ f(x) \le f(y_n)\,. \tag{18}$$

Nach dem Intervallschachtelungsprinzip gibt es $\xi \in \mathbb{R}$ mit $\xi \in J_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach (18) gibt es zu jedem $x \in J$ Zahlen $y_n \in J_n$ mit $f(x) \le f(y_n)$. Nun hat man aber $|\, \xi - y_n \,| \le |\, J_n \,| \to 0$ und somit $f(y_n) \to f(\xi)$ aufgrund der Stetigkeit von f. Folglich ist ist $f(x) \le f(\xi)$, und somit hat f ein Maximum in $\xi \in J$. ◇

Nun folgt ein Beweis des Monotoniesatzes. Wir stellen ein Lemma voran, das wie im Beweis von Satz 12.13 b) gezeigt wird:

12.15 Lemma. *Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \mapsto \mathbb{R}$ in $a \in I$ differenzierbar mit $f'(a) > 0$. Dann gibt es $\delta > 0$ mit*

$$f(x) < f(a) < f(y) \quad \text{für } x, y \in I \quad \text{mit } a - \delta < x < a < y < a + \delta\,. \tag{19}$$

Beweis. Wegen $\Delta f(a; x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \to f'(a) > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$ für alle $x \in I \cap (a - \delta, a + \delta)$. Daraus folgt sofort (19). ◇

Ein Beweis des Monotoniesatzes 12.9. a) Es seien also $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$. Ist f nicht streng monoton wachsend, so gibt es $a < b \in I$ mit $f(a) \ge f(b)$. Wir setzen $J = [a, b] \subseteq I$ und $c = \frac{1}{2}(a + b)$. Offenbar gilt $f(a) \ge f(c)$ oder $f(c) \ge f(b)$; im ersten Fall sei $J_1 := [a, c]$, im zweiten Fall sei $J_1 := [c, b]$. So fortfahrend erhalten wir eine Intervallschachtelung

$$J = [a, b] \supseteq J_1 = [a_1, b_1] \supseteq \ldots \supseteq J_n = [a_n, b_n] \supseteq \ldots$$

mit $|\, J_n \,| = 2^{-n}\,|\, J \,| \to 0$, so daß stets $f(a_n) \ge f(b_n)$ gilt. Nach dem Intervallschachtelungsprinzip gibt es $\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$. Zu $\xi \in I$ wählt man nun $\delta > 0$ gemäß (19). Für

$|J_n| < \delta$ gilt dann $\xi - \delta < a_n \leq \xi \leq b_n < \xi + \delta$, und somit liefert $f(a_n) \geq f(b_n)$ einen Widerspruch zu (19).

b) Wegen $f'(x) + \frac{1}{n} > 0$ für $x \in I$ und $n \in \mathbb{N}$ ist nach a) die Funktion $f_n : x \mapsto f(x) + \frac{1}{n}x$ streng monoton wachsend. Für $a < b$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt also $f(a) + \frac{a}{n} < f(b) + \frac{b}{n}$, und mit $n \to \infty$ folgt $f(a) \leq f(b)$.

13 Polynome und Nullstellen

Lernziele:

- *Resultat:* Zwischenwertsatz
- *Methoden:* „Raten“ von Nullstellen, Euklidischer Algorithmus, Horner-Schema
- *Kompetenzen:* Bestimmung von Nullstellen von Polynomen

Frage: Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung $x^3 - 15x - 4 = 0$.

Polynome. a) Eine auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion der Form

$$P : x \mapsto \sum_{k=0}^{m} a_k x^k \ = \ a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{1}$$

heißt *Polynom;* $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_m \in \mathbb{R}$ sind die *Koeffizienten* von P .

b) Die Menge aller Polynome wird mit $\mathbb{R}[x]$ bezeichnet.

c) Gilt $a_m \neq 0$ in (1), so heißt $\deg P := m$ der *Grad* von P.

Beispiele und Bemerkungen. a) Die Polynome vom Grad 0 sind die *konstanten* Funktionen $\neq 0$. Es ist bequem, $\deg 0 := -\infty$ zu setzen. Für $m \in \mathbb{N}_0$ setzt man noch $\mathbb{R}_m[x] := \{P \in \mathbb{R}[x] \mid \deg P \leq m\}$.

b) Für $P(x) = 3x^4 - x^2$ und $Q(x) = x^2 + 2$ hat man $\deg P = 4$, $\deg Q = 2$. Weiter gilt $(P+Q)(x) = 3x^4 + 2$, $(P \cdot Q)(x) = 3x^6 + 5x^4 - 2x^2$ sowie $\deg(P+Q) = 4$, $\deg(P \cdot Q) = 6$. Mit $S(x) := -3x^4 + 5x$ dagegen ist $(P+S)(x) = -x^2 + 5x$ und $\deg(P+S) = 2$. Allgemein gilt:

c) Für $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ ist stets auch $P + Q,\ P \cdot Q \in \mathbb{R}[x]$, und man hat

$$\deg(P+Q) \ \leq \ \max\{\deg P,\ \deg Q\}\,, \tag{2}$$

$$\deg(P \cdot Q) \ = \ \deg P + \deg Q\,. \tag{3}$$

d) Aufgrund von (11.4) und Satz 11.2 sind Polynome $\mathcal{C}^\infty$ -Funktionen auf $\mathbb{R}$; für das Polynom $P \in \mathbb{R}[x]$ aus (1) gilt

$$P'(x) \ = \ \sum_{k=1}^{m} k\, a_k x^{k-1} \ = \ m\, a_m x^{m-1} + \cdots + a_2\, x + a_1 \tag{4}$$

und insbesondere $\deg P' = \deg P - 1$. Weiter ist $P^{(m)}(x) = m!\, a_m$ konstant und $P^{(k)}(x) = 0$ für $k > m$.

Nullstellen von Polynomen. a) Eine wichtige Rolle in der Mathematik spielen *Nullstellen von Polynomen;* nach Satz 12.3 sind beispielsweise lokale Extremalstellen eines Polynoms P stets Nullstellen der Ableitung P'.

b) Ein Polynom $P(x) = ax + b$ vom Grad 1 hat natürlich genau eine Nullstelle $x_0 = -{}^b/_a$; die Nullstellen quadratischer Polynome wurden auf den Seiten 18 und 34 diskutiert.

c) Polynome *ungeraden* Grades besitzen stets *reelle Nullstellen:*

Das *Intervallhalbierungsverfahren* (vgl. S. 15) liefert das folgende wichtige Resultat über stetige Funktionen (vgl. [A1], 10.8):

13.1 Theorem (Zwischenwertsatz). *Es seien* $a < b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ *stetig und* $f(a) < c < f(b)$. *Dann gibt es* $\xi \in (a, b)$ *mit* $f(\xi) = c$.

Der Zwischenwertsatz gilt auch im Fall $f(a) > c > f(b)$, wie man durch Übergang zu $-f$ einsieht. Es werden also *alle Zahlen* zwischen zwei gegebenen Funktionswerten von der stetigen Funktion f *angenommen.*

13.2 Satz. *(vgl. [A1], 10.7). Es sei* $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k x^k$ *ein Polynom vom Grad* m. *Ist* m ungerade, *so gibt es* $x_0 \in \mathbb{R}$ *mit* $P(x_0) = 0$.

Beispiel. a) Für das Polynom $P(x) := \frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{10}$ wird eine Nullstelle näherungsweise bestimmt (vgl. [A1], 10.9).

b) Die Nullstellen von P können auch exakt bestimmt werden. Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner 10 der Koeffizienten erhält man das Polynom $Q(x) = 2x^3 + 5x^2 - 1$ mit *ganzzahligen* Koeffizienten. Für das *Erraten* eventueller *rationaler* Nullstellen von Q verwendet man die folgende Verallgemeinerung von Satz 6.1:

13.3 Satz („Raten von Nullstellen"). *Es sei*

$$P : x \mapsto \sum_{k=0}^{m} a_k x^k \;=\; a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

ein Polynom mit ganzzahligen *Koeffizienten* $a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}$. *Für jede* rationale Nullstelle $x_0 \in \mathbb{Q}$ *von* P *gilt dann* $x_0 = \frac{p}{q}$, *wobei* $p \in \mathbb{Z}$ *ein Teiler von* a_0 *und* $q \in \mathbb{N}$ *ein Teiler von* a_m *ist.*

Beweis. Man kann $x_0 = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ als einen *gekürzten* Bruch mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ schreiben. Aus $P(x_0) = 0$ folgt durch Multiplikation mit q^m sofort

$$a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} q + \cdots + a_1 p q^{m-1} + a_0 q^m \;=\; 0\,.$$

Somit ist p ein Teiler von $a_0 q^m$ und q ein Teiler von $a_m p^m$; da aber p und q teilerfremd sind, folgt daraus die Behauptung.

13.4 Folgerung. *Es sei*

$$P : x \mapsto x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

ein Polynom mit dem höchsten Koeffizienten 1 *und* ganzzahligen *Koeffizienten* $a_0\,,\, a_1\,,\, \ldots\,,\, a_{m-1} \in \mathbb{Z}$. *Jede* rationale Nullstelle $x_0 \in \mathbb{Q}$ *von* P *ist dann* ganzzahlig *und ein Teiler des konstanten Terms* a_0.

Beispiel. a) Mögliche rationale Nullstellen des Polynoms $Q(x) = 2x^3 + 5x^2 - 1$ aus obigem Beispiel sind also ± 1 und $\pm\frac{1}{2}$. Durch Einsetzen sieht man, daß $x_0 = -\frac{1}{2}$ in der Tat eine Nullstelle von Q ist.
b) Wir zeigen nun, daß Q den Linearfaktor $(x - x_0)$ enthält, also in der Form

$$Q(x) \;=\; (x - x_0)\, R(x) \quad \text{mit} \quad R \in \mathbb{R}_2[x] \tag{5}$$

geschrieben werden kann. Mit $R(x) = ax^2 + bx + c$ ist in der Tat

$$(x + \tfrac{1}{2})\, R(x) \;=\; a\, x^3 + (\tfrac{a}{2} + b)\, x^2 + (\tfrac{b}{2} + c)\, x + \tfrac{c}{2}\,,$$

und somit gilt (5) mit $a = 2$, $c = -2$ und $b = 4$.
c) Die Nullstellen des quadratischen Polynoms $R(x) = 2x^2 + 4x - 2$ sind

$$x_\pm \;=\; -1 \pm \sqrt{2}\,;$$

insbesondere ist also $\xi = -1 + \sqrt{2}$ die in obigem Beispiel a) näherungsweise gefundene Nullstelle des Polynoms P.

Wie in (5) kann ein Polynom P stets ohne Rest durch $(x - x_0)$ dividiert werden, wenn x_0 eine Nullstelle von P ist. Allgemeiner ist bei Polynomen die *Division mit Rest* möglich, ähnlich wie bei ganzen Zahlen. Im folgenden Satz entspricht in dem Beispiel $\frac{25}{7} = \frac{3\cdot 7 + 4}{7} = 3 + \frac{4}{7}$ das Polynom P der Zahl 25, Q der Zahl 7, T der Zahl 3 und R der Zahl 4.

13.5 Satz (Euklidischer Algorithmus) *(vgl. [A1], 10.3). Zu reellen Polynomen* $P,\, Q \in \mathbb{R}[x]$ *gibt es eindeutig bestimmte Polynome* $T,\, R \in \mathbb{R}[x]$ *mit*

$$P \;=\; T \cdot Q + R \qquad \textit{und} \qquad \deg R \;<\; \deg Q\,. \tag{6}$$

Beispiele und Bemerkungen. a) Der Beweis von Satz 13.5 ist *konstruktiv:* Zuerst erhält man durch Division der höchsten Terme von P und Q das Polynom $T_1(x) := \frac{a_m}{b_n} x^{m-n}$. Natürlich kann man nun nicht $P - T_1 Q = 0$ erwarten, aber für den *Rest* $R_1 = P - T_1 Q$ gilt $\deg R_1 < m$. Ist noch $\deg R_1 \geq n$, so wendet man das gleiche Verfahren auf R_1 an: Durch Division der höchsten Terme von R_1 und Q entsteht ein Polynom T_2, so daß für den *Rest* $R_2 = R_1 - T_2 Q$ gilt $\deg R_2 < \deg R_1$, also $\deg R_2 < m - 1$. Man hat dann

$$P \;=\; T_1 Q + R_1 \;=\; (T_1 + T_2) Q + R_2\,.$$

Dieser *Algorithmus* (Rechenverfahren) kann nun so lange fortgesetzt werden, bis der Grad des Restes kleiner als $n = \deg Q$ wird.

b) Die Durchführung des Euklidischen Algorithmus wird anhand des Beispiels $P(x) = 4x^4 + 3x^3 - x - 1$ und $Q(x) = 2x^2 + 2$ in [A1], 10.4 erläutert.

c) Für Teilmengen $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{R}$ bezeichne $\mathbb{M}[x]$ die Menge der Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{M}$. Ist $\mathbb{M}$ unter den algebraischen Operationen abgeschlossen, z. B. $\mathbb{M} = \mathbb{Q}$, so liefert der Euklidische Algorithmus für $P, Q \in \mathbb{M}[x]$ Polynome T, R mit (6), die ebenfalls in $\mathbb{M}[x]$ liegen.

Jetzt können wir die *Abspaltung von Linearfaktor* wie in (5) allgemein zeigen:

13.6 Satz. *(vgl. [A1], 10.5). Es sei $0 \neq P \in \mathbb{R}[x]$ mit $P(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $Q \in \mathbb{R}[x]$ mit $\deg Q = \deg P - 1$ und*

$$P(x) = (x - x_0) \cdot Q(x) . \tag{7}$$

13.7 Folgerung. *(vgl. [A1], 10.5). Ein Polynom $P \in \mathbb{R}_m[x]$ vom Grad $m \in \mathbb{N}$ hat* höchstens *m Nullstellen.*

13.8 Folgerung. *Stimmen die Werte von zwei Polynomen $P \in \mathbb{R}_m[x]$ und $Q \in \mathbb{R}_n[x]$ in mindestens $\ell := \max\{n, m\} + 1$ verschiedenen Punkten $x_1, \ldots, x_\ell \in \mathbb{R}$ überein, so muß also aufgrund von Folgerung 13.7 $P - Q$ das Nullpolynom sein. Somit gilt $m = n$, und P und Q haben die gleichen Koeffizienten.*

Ordnung von Nullstellen.. a) Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle des Polynoms $P \in \mathbb{R}_m[x]$. Nach Satz 13.6 gilt dann

$$P(x) = (x - x_0)^r \cdot Q(x) \quad \text{mit} \quad Q(x_0) \neq 0 \tag{8}$$

für ein Polynom $Q \in \mathbb{R}_{m-r}[x]$. Die durch (8) eindeutig bestimmte Zahl $r \in \mathbb{N}_0$ heißt *Ordnung*

$$\nu(P; x_0) \;=\; r \tag{9}$$

der Nullstelle x_0 von P. Diese heißt *einfach,* wenn $\nu(P; x_0) = 1$ ist. Die Aussage $\nu(P; x_0) = 0$ bedeutet natürlich, daß $P(x_0) \neq 0$ gilt.

b) Aus (8) ergibt sich mittels der Produktregel

$$P'(x) \;=\; r\,(x - x_0)^{r-1}\, Q(x) + (x - x_0)^r\, Q'(x) \;=:\; (x - x_0)^{r-1}\, Q_1(x) \tag{10}$$

mit $Q_1 \in \mathbb{R}_{m-r}[x]$, und wegen

$$Q_1(x_0) \;=\; rQ(x_0) \tag{11}$$

gilt

$$\nu(P'; x_0) \;=\; \nu(P; x_0) - 1 . \tag{12}$$

Folglich ist $\nu(P;x_0) = r$ äquivalent zu der Aussage

$$P(x_0) = P'(x_0) = \ldots = P^{(r-1)}(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad P^{(r)}(x_0) \neq 0\,. \tag{13}$$

c) Es sei nun $a \in \mathbb{R}$ ein *kritischer Punkt* von P, d. h. es gelte $P'(a) = 0$. Mit $r := \nu(P';a) + 1$ gilt dann wegen (12)

$$P(x) = P(a) + (x-a)^r \cdot Q(x) \quad \text{mit} \quad Q(a) \neq 0\,; \tag{14}$$

folglich hat P genau dann ein *lokales Extremum* in a, wenn $r = \nu(P';a) + 1$ *gerade* ist. In diesem Fall liegt für $Q(a) > 0$ ein *lokales Minimum* vor, für $Q(a) < 0$ ein *lokales Maximum.* Nun ist aber $P^{(r)}(a) = r!\,Q(a)$, was man induktiv aus (11) erhält. Damit haben wir also die folgende Verallgemeinerung von Satz 12.13 b) für Polynome bewiesen:

13.9 Satz. *Für ein Polynom $P \in \mathbb{R}[x]$ und eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ sei $P'(a) = \ldots = P^{(r-1)}(a) = 0$, aber $P^{(r)}(a) \neq 0$. Dann gilt:*

a) Ist r gerade *und $P^{(r)}(a) > 0$, so hat P ein* lokales Minimum *in a.*

b) Ist r gerade *und $P^{(r)}(a) < 0$, so hat P ein* lokales Maximum *in a.*

c) Ist r ungerade, *so hat P kein lokales Extremum in a.*

In Satz 29.4 wird diese Aussage auch allgemein für $\mathcal{C}^k$-Funktionen gezeigt.

Entwicklung nach Potenzen von $(x-a)$. Satz 13.9 folgt auch aus der folgenden Formel (15): Für $x, a \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ gilt nach dem binomischen Satz

$$x^k \;=\; (a + (x-a))^k \;=\; \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\, a^{k-j}\,(x-a)^j\,.$$

Für ein Polynom $P \in \mathbb{R}_m[x]$ ergibt sich daraus

$$P(x) \;=\; \sum_{k=0}^{m} a_k x^k \;=\; \sum_{k=0}^{m} d_k (x-a)^k$$

mit gewissen Koeffizienten $d_k \in \mathbb{R}$. Durch Differentiation erhält man $P^{(j)}(a) = j!\,d_j$ für $j = 0, \ldots, m$ und somit

$$P(x) \;=\; \sum_{k=0}^{m} \frac{P^k(a)}{k!}\,(x-a)^k\,. \tag{15}$$

Horner-Schema. siehe [A1], 10.10*.

14 Umkehrfunktionen

Lernziele:

- *Kompetenzen:* Bildung und Differentiation von Umkehrfunktionen

Aus dem Zwischenwertsatz ergibt sich leicht die Existenz m-ter Wurzeln positiver Zahlen:

14.1 Satz. *(vgl. [A1], 9.8). Es seien $m \in \mathbb{N}$ und $c \geq 0$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $x \geq 0$ mit $x^m = c$.*

Wurzeln. Die zu $c \geq 0$ eindeutig bestimmte Zahl $x \geq 0$ mit $x^m = c$ heißt *m-te Wurzel* von c, Notation: $x = \sqrt[m]{c}$.

Die *Wurzelfunktion* $w_m : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$, $w_m(x) := \sqrt[m]{x}$, ist die Umkehrfunktion der Potenzfunktion $p_m : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$. Nach der Feststellung auf S. 12 ist sie streng monoton wachsend. Ihre *Stetigkeit* und *Differenzierbarkeit* ergibt sich aus allgemeineren Ergebnissen über Umkehrfunktionen:

14.2 Satz. *Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \mapsto \mathbb{R}$ streng monoton und stetig. Dann ist auch $f(I) =: J$ ein Intervall, und $f^{-1} : J \mapsto \mathbb{R}$ ist ebenfalls stetig.*

Beweis s. [A1], 9.10.

Es sei darauf hingewiesen, daß eine *stetige und injektive* Funktion $f : I \mapsto \mathbb{R}$ *streng monoton* sein muß, vgl. etwa [A1], Satz 9.13*.

Die Stetigkeit von Umkehrfunktionen läßt sich auch ohne Verwendung von Monotonie mit Kompaktheits-Argumenten zeigen. Ein allgemeines Ergebnis dazu ist etwa Theorem 6.14 in [A2].

14.3 Folgerung. *Die Wurzelfunktionen $w_m : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$ sind stetig.*

14.4 Satz. *Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \mapsto \mathbb{R}$ stetig und streng monoton; dann ist auch $J := f(I)$ ein Intervall.*

a) Ist f in $a \in I$ differenzierbar und $f'(a) \neq 0$, so ist auch $f^{-1} : J \mapsto I$ in $f(a) \in J$ differenzierbar, und es gilt

$$(f^{-1})'(f(a)) \;=\; \tfrac{1}{f'(a)}\,. \tag{1}$$

b) Ist $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $f \in \mathcal{C}^m(I)$ mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$, so gilt auch $f^{-1} \in \mathcal{C}^m(J)$.

Beweis s. [A1], 19.8. und 19.12.

14.5 Folgerung. *Für die Wurzelfunktionen gilt $w_m \in \mathcal{C}^\infty(0, \infty)$.*

Beweis. Die Potenzfunktion $p_m : x \mapsto x^m$ liegt in $\mathcal{C}^\infty(0,\infty)$, und es ist $p_m'(x) = m\,x^{m-1} > 0$ für $x > 0$. Somit gilt in der Tat $w_m \in \mathcal{C}^\infty(0,\infty)$, und für $y := x^m > 0$ ist $w_m'(y) = \frac{1}{p_m'(x)} = \frac{1}{m\,x^{m-1}}$, also

$$w_m'(y) \;=\; \frac{1}{m\,(\sqrt[m]{y})^{m-1}}\,, \quad y > 0\,. \tag{2}$$

Die Voraussetzung $f'(a) \neq 0$ ist für Satz 14.4 wesentlich, was bereits in Beispiel d) auf S. 49 bemerkt wurde: Ist f^{-1} in $f(a)$ differenzierbar, so impliziert die Kettenregel $(f^{-1})'(f(a)) \cdot f'(a) = 1$, also $f'(a) \neq 0$. Insbesondere ist also wegen $p_m'(0) = 0$ die Wurzelfunktion w_m in $p_m(0) = 0$ nicht differenzierbar.

Rationale Potenzen. a) Wir führen nun *rationale Potenzen positiver Zahlen* ein: Für $a > 0$ und $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ sei

$$a^r := a^{\frac{p}{q}} := (\sqrt[q]{a})^p \;=\; \sqrt[q]{a^p}\,. \tag{3}$$

b) Für $r \in \mathbb{Q}$ liegen die Funktionen $p_r : x \mapsto x^r$ aufgrund von Folgerung 14.5 und Satz 11.5 in $\mathcal{C}^\infty(0,\infty)$. Nach (2) und der Kettenregel gilt

$$p_r'(x) \;=\; p\,(\sqrt[q]{x})^{p-1} \cdot \frac{1}{q\,(\sqrt[q]{x})^{q-1}} \;=\; \tfrac{p}{q}\,(\sqrt[q]{x})^{p-q} \;=\; \tfrac{p}{q}\,x^{\frac{p}{q}-1}\,, \quad \text{also}$$

$$p_r'(x) \;=\; r\,x^{r-1} \quad \text{für} \quad x > 0 \quad \text{und} \quad r \in \mathbb{Q}\,. \tag{4}$$

c) Für $r > 0$ hat man mit $0^r := 0$ auch $p_r \in \mathcal{C}[0,\infty)$.

d) Es gilt die *Funktionalgleichung*

$$a^{r+s} \;=\; a^r \cdot a^s \quad \text{für} \quad a > 0 \quad \text{und} \quad r,s \in \mathbb{Q}\,. \tag{5}$$

In der Tat seien $r = \frac{p}{q}$ und $s = \frac{u}{v}$ mit $p,u \in \mathbb{Z}$ und $q,v \in \mathbb{N}$. Dann ist $r + s = \frac{pv+qu}{qv}$ und somit

$$a^{r+s} \;=\; a^{\frac{pv+qu}{qv}} \;=\; (\sqrt[qv]{a})^{pv+qu} \;=\; (\sqrt[qv]{a})^{pv} \cdot (\sqrt[qv]{a})^{qu} \;=\; a^r \cdot a^s\,.$$

Wir gehen kurz auf einige mit Hilfe n-ter Wurzeln definierte Folgen ein:

Beispiele. a) Für $a \geq 1$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. Ist in der Tat $\varepsilon > 0$ gegeben, so hat man nach (3.2)

$$1 \leq a \leq 1 + n\,\varepsilon \leq (1+\varepsilon)^n\,, \quad \text{also auch} \quad 1 \leq \sqrt[n]{a} \leq 1 + \varepsilon \quad \text{für} \quad n \geq \tfrac{a}{\varepsilon}\,.$$

Wegen Satz 7.8 impliziert dies auch $\sqrt[n]{a} = (\sqrt[n]{1/a})^{-1} \to 1$ für $0 < a \leq 1$.

b) Es gilt sogar

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\,. \tag{6}$$

Offenbar hat man stets $\sqrt[n]{n} \geq 1$; zu $\varepsilon > 0$ ist daher ein $n_0 \in \mathbb{N}$ zu finden, so daß $\sqrt[n]{n} \leq 1 + \varepsilon$ oder $n \leq (1+\varepsilon)^n$ für $n \geq n_0$ gilt. Dies ist aber möglich, da nach Beispiel 7.7 c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{(1+\varepsilon)^n} = 0$ gilt.

Reelle Potenzen. a) Ähnlich wie im letzten Beispiel kann man zeigen, daß für rationale Folgen $r_n \to r \in \mathbb{Q}$ und $a > 0$ stets $a^{r_n} \to a^r$ gilt.

b) Für $a \geq 1$ und $r, s \in \mathbb{Q}$ mit $r < s$ gilt auch $a^r \leq a^s$. Für eine monoton wachsende Folge (r_n) in $\mathbb{Q}$ ist daher auch die Folge (a^{r_n}) monoton wachsend. Gilt $r_n \to x$, so wählt man $x < r \in \mathbb{Q}$ und hat $a^{r_n} \leq a^r$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Theorem 7.14 existiert

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} \in \mathbb{R},$$

und man definiert die *reelle Potenz* a^x als diesen Grenzwert. Dies ist möglich, da auch für jede andere rationale Folge $\mathbb{Q} \ni s_n \to x$

$$\lim_{n\to\infty} a^{s_n} \;=\; \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$$

gilt. Für $0 < a < 1$ setzt man weiter $a^x := (\frac{1}{a})^{-x}$. Die Aussagen (4) und (5) bleiben dann auch für *reelle* Zahlen $r, s \in \mathbb{R}$ gültig.

c) Wir verzichten hier auf Beweise der Aussagen in a) und b), da sich diese in Abschnitt 20 ohne jede Mühe ergeben werden.

Schließlich gehen wir noch auf *Umkehrfunktionen trigonometrischer Funktionen* ein:

Arcus-Sinus. a) Wegen $\sin' x = \cos x > 0$ auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist der Sinus

$$\sin : [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \mapsto [-1, 1] \tag{7}$$

streng monoton wachsend und somit injektiv. Zu $y \in \mathbb{R}$ mit

$$\sin(-\tfrac{\pi}{2}) \;=\; -1 \;\leq\; y \leq 1 \;=\; \sin\tfrac{\pi}{2}$$

gibt es aufgrund des Zwischenwertsatzes ein $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ mit $y = \sin x$; folglich ist die Abbildung aus (7) auch bijektiv. Die Umkehrabbildung

$$\arcsin : [-1, 1] \mapsto [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \tag{8}$$

heißt *Arcus-Sinus.* Sie ist ebenfalls streng monoton wachsend und nach Satz 14.2 auch stetig. Aufgrund von Satz 14.4 hat man $\arcsin \in \mathcal{C}^\infty(-1, 1)$, und für $x \in (-1, 1)$ und $y := \arcsin x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ gilt

$$\arcsin' x \;=\; \tfrac{1}{\sin' y} \;=\; \tfrac{1}{\cos y} \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,. \tag{9}$$

b) Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\sin(k\pi + x) = (-1)^k \sin x$; daher liefert der Sinus auch bijektive Abbildungen

$$\sin : [k\pi - \tfrac{\pi}{2}, k\pi + \tfrac{\pi}{2}] \mapsto [-1, 1]\,.$$

Die entsprechenden Umkehrabbildungen

$$\arcsin_k : [-1, 1] \mapsto [k\pi - \tfrac{\pi}{2}, k\pi + \tfrac{\pi}{2}] \tag{10}$$

heißen *Nebenzweige* des Arcus-Sinus. Diese lassen sich durch den *Hauptzweig* $\arcsin = \arcsin_0$ ausdrücken:

$$\arcsin_k(y) \;=\; k\pi + (-1)^k \arcsin y\,, \quad y \in [-1,1]\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \tag{11}$$

c) Man hat $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $y \in [-1,1]$, $k \in \mathbb{Z}$ und $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$ hat somit die Gleichung $\cos x = y$ die eindeutig bestimmte Lösung

$$x \;=\; \arcsin_{k+1}(y) - \tfrac{\pi}{2} \;=: \arccos_k(y)\,.$$

Für $k = 0$ erhält man den *Hauptzweig* des Arcus-Kosinus, die Umkehrfunktion von $\cos : [0,\pi] \mapsto [-1,1]$. Wegen (11) gilt

$$\arccos y \;=\; \tfrac{\pi}{2} - \arcsin y\,, \quad y \in [-1,1]\,. \tag{12}$$

Arcus-Tangens. a) Wegen $\tan' x = 1 + \tan^2 x > 0$ auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist der Tangens

$$\tan : (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \mapsto \mathbb{R} \tag{13}$$

streng monoton wachsend und somit injektiv. Weiter gilt $\cos x > 0$ auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\cos x \to 0$ und $\sin x \to \pm 1$ für $x \to \pm\frac{\pi}{2}$, woraus sich sofort

$$\tan x \to -\infty \;\text{ für }\; x \to (-\tfrac{\pi}{2})^+ \quad , \quad \tan x \to +\infty \;\text{ für }\; x \to (+\tfrac{\pi}{2})^-$$

ergibt. Für $y \in \mathbb{R}$ gibt es somit $-\frac{\pi}{2} < a < b < \frac{\pi}{2}$ mit $\tan a < y < \tan b$, aufgrund des Zwischenwertsatzes also $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ mit $\tan x = y$. Folglich ist die Abbildung aus (13) bijektiv. Die Umkehrabbildung

$$\arctan : \mathbb{R} \mapsto (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \tag{14}$$

heißt *Arcus-Tangens.* Sie ist ebenfalls streng monoton wachsend und nach Satz 14.2 auch stetig. Aufgrund von Satz 14.4 hat man $\arctan \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, und für $x \in \mathbb{R}$ und $y := \arctan x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ gilt

$$\arctan' x \;=\; \tfrac{1}{\tan' y} \;=\; \tfrac{1}{1+\tan^2 y} \;=\; \tfrac{1}{1+x^2}\,. \tag{15}$$

b) Analog zu (11) sind *Nebenzweige* des Arcus-Tangens durch die Formel

$$\arctan_k(y) \;=\; \arctan y + k\pi\,, \quad y \in \mathbb{R}\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,, \tag{16}$$

gegeben; diese sind die Umkehrabbildungen von $\tan : (k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}) \mapsto \mathbb{R}$.

15 Maxima und Suprema

Lernziele:

- *Konzepte:* Supremum und Infimum
- *Resultat:* Nach oben beschränkte Mengen besitzen ein Supremum.

Nicht alle beschränkten Mengen in $\mathbb{R}$ besitzen ein Maximum oder Minimum, z. B. das offene Intervall $I = (0, 1)$. Zwar ist jede Zahl $s \geq 1$ obere Schranke von I, doch gilt stets $s \notin I$. Offenbar ist 1 die *kleinstmögliche* obere Schranke von I. Dieser wichtige Begriff wird jetzt allgemein untersucht:

Definition. Es sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt. Hat die Menge

$$S_M := \{a \in \mathbb{R} \mid \forall\, x \in M \;:\; x \leq a\} \tag{1}$$

der oberen Schranken von M ein Minimum $s = \min S_M$, so heißt dieses *kleinste obere Schranke* oder **Supremum** von M, Notation: $s = \sup M$.

Beispiele und Bemerkungen. a) Da Minima *eindeutig bestimmt* sind, gilt dies auch für Suprema.

b) Falls M ein Maximum besitzt, so gilt $\max M = \sup M$.

c) Für $I = (0, 1)$ gilt also $S_I = [1, \infty)$ und $\sup I = \min S_I = 1$.

15.1 Feststellung. *(vgl. [A1], 9.3). Es sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt. Dann ist genau dann $s = \sup M$, wenn die folgenden beiden Bedingungen gelten:*

(a) $x \leq s$ für alle $x \in M$,

(b) Es gibt eine Folge $(x_n) \subseteq M$ mit $x_n \to s$.

15.2 Theorem. *(vgl. [A1], 9.4). Für jede nach oben beschränkte Menge $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ existiert die kleinste obere Schranke* $\sup M$.

15.3 Feststellung. *(vgl. [A1], 9.5). Für $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ sei $-M := \{-x \mid x \in M\}$. Ist M nach unten beschränkt, so ist*

$$\inf M := -\sup(-M) \tag{2}$$

die größte untere Schranke von M, das Infimum *von M.*

Ein Beweis von Theorem 12.5. Es seien also $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ stetig.

a) Es sei $M := \{x \in [a,b] \mid f \text{ ist auf } [a,x] \text{ beschränkt}\}$. Wegen $a \in M$ ist $M \neq \emptyset$, und b ist eine obere Schranke von M. Nach Theorem 15.2 existiert somit $s := \sup M$. Da f in s stetig ist, gibt es $\delta > 0$ mit $|f(x)| \le |f(s)| + 1$ für alle $x \in [a,b]$ mit $|x - s| \le \delta$. Wegen $x - \delta \in M$ ist f somit auf $[a, s+\delta] \cap [a,b]$ beschränkt. Dies zeigt $s = b \in M$, und somit somit ist f auf $[a,b]$ *beschränkt.*

b) Nach a) existiert also das Supremum $s := \sup f[a,b] \in \mathbb{R}$ von f auf $[a,b]$. Gilt $f(x) < s$ für alle $x \in [a,b]$, so ist $g : x \mapsto \frac{1}{s-f(x)}$ eine stetige Funktion auf $[a,b]$, die nach a) ebenfalls beschränkt sein muß. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es aber $x \in [a,b]$ mit $s - f(x) < \varepsilon$, also $g(x) > \frac{1}{\varepsilon}$, und das ist ein Widerspruch. Folglich gibt es $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = s$, und f hat ein Maximum in x_0.

c) Die Existenz des Minimums folgt wie in a)-b) oder durch Übergang zu $-f$.

Auch der *Zwischenwertsatz* läßt sich mit einem Argument wie in Beweisteil a) zeigen, vgl. [A1], 9.7.

Zur Axiomatik von $\mathbb{R}$. a) Die Existenz des Supremums einer nach oben beschränkten Menge beruht also auf Theorem 7.14 bzw. auf den Axiomen A und I (vgl. S. 25). Umgekehrt impliziert Theorem 15.2 wieder Theorem 7.14, kann also auch zur *Formulierung der Vollständigkeit* von $\mathbb{R}$ verwendet werden:

b) Für eine monoton wachsende und beschränkte Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ existiert also $s := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $s - \varepsilon < a_{n_0} \le s$, und wegen der Monotonie folgt auch $s - \varepsilon < a_{n_0} \le a_n \le s$ für $n \ge n_0$. Folglich gilt $s = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

15.4 Satz. *Es seien $I = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \mapsto \mathbb{R}$ monoton wachsend. Der linksseitige Grenzwert $f(b^-) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ existiert genau dann, wenn f nach oben beschränkt ist, und diesem Fall gilt*

$$\lim_{x\to b^-} f(x) \;=\; \sup f(I)\,. \tag{3}$$

Beweis. „$\Rightarrow$“: Es sei $x \in I$. Für große $n \in \mathbb{N}$ gilt dann $x \le b - \frac{1}{n}$ und daher $f(x) \le f(b - \frac{1}{n}) \le f(b^-)$. Somit ist $f(b^-)$ obere Schranke von $f(I)$.

„$\Leftarrow$“: Es seien $s := \sup f(I)$ und (x_n) eine Folge in I mit $x_n \to b$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $c \in (a,b)$ mit $s - \varepsilon \le f(c) \le s$, und wegen der Monotonie von f folgt auch $s - \varepsilon \le f(x) \le s$ für $c \le x < b$. Weiter gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $c \le x_n < b$ für $n \ge n_0$, also auch $s - \varepsilon \le f(x_n) \le s$ für diese n. Dies zeigt $f(x_n) \to s$ und somit $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = s$.

Entsprechende Aussagen gelten natürlich auch für $b = \infty$, für rechsseitige Grenzwerte und für monoton fallende Funktionen.

16 Mittelwertsätze und Anwendungen

Lernziele:

- *Konzepte:* Konvexität und Konkavität
- *Resultate:* Mittelwertsätze der Differentialrechnung
- *Methoden:* Regeln von de l'Hospital
- *Kompetenz:* Verinnerlichung des Mittelwertsatzes 16.2

In diesem Abschnitt lösen wir zunächst eine *geometrische Aufgabe:* Für eine differenzierbare Funktion $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ soll eine Tangente an den Graphen $\Gamma(f)$ konstruiert werden, deren Steigung mit der Sekantensteigung $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ übereinstimmt. Die Lösung beruht wesentlich auf Theorem 12.5.

Zunächst behandeln wir den Fall $f(a) = f(b)$:

16.1 Satz (Rolle). *Es sei $f \in \mathcal{C}[a,b]$ auf (a,b) differenzierbar, und es gelte $f(a) = f(b)$. Dann gibt es $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.*

Beweis s. [A1], 20.4.

Daraus ergibt sich leicht der wichtige *Mittelwertsatz der Differentialrechnung*:

16.2 Theorem (Mittelwertsatz). *Es sei $f \in \mathcal{C}[a,b]$ auf (a,b) differenzierbar. Dann gibt es $\xi \in (a,b)$ mit*

$$f'(\xi) \;=\; \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\,. \tag{1}$$

Beweis s. [A1], 20.5.

Aus dem Mittelwertsatz ergeben sich sehr leicht *Beweise* des Monotoniesatzes 12.9 und der Folgerung 12.10, vgl. [A1], 20.11, 20.12, 20.7.

Umformulierung. Der Mittelwertsatz wird oft in folgender Formulierung verwendet: Ist $f : I \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar, so gilt für $a,\ a+h \in I$:

$$f(a+h) \;=\; f(a) \;+\; f'(a+\theta h)\,\cdot\,h \qquad \text{für ein } \theta \in (0,1)\,. \tag{2}$$

Dazu wendet man einfach (1) auf $[a, a+h]$ bzw. $[a+h, a]$ an.

Die nächste Aussage wird im folgenden öfter verwendet, um die Differenzierbarkeit von Funktionen in speziellen Punkten ihres Definitionsbereichs zu zeigen. Für ihren Beweis ist es wesentlich, daß beim Mittelwertsatz die Differenzierbarkeit in den Randpunkten *nicht* gefordert werden muß:

16.3 Folgerung. *(vgl. [A1], 20.8). Es sei $f \in \mathcal{C}[a,b]$ auf $(a,b]$ differenzierbar, und es existiere $f'(a^+) = \lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$. Dann ist f in a rechtsseitig differenzierbar, und es gilt $f'_+(a) = f'(a^+)$.*

Eine analoge Aussage gilt für linksseitige und beidseitige Differenzierbarkeit.

Die folgende Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes erweist sich für die Berechnung von Grenzwerten als sehr nützlich:

16.4 Theorem (zweiter Mittelwertsatz). *Es seien $f, g \in \mathcal{C}[a,b]$ auf (a,b) differenzierbar. Dann gibt es $\xi \in (a,b)$ mit*

$$g'(\xi)\,(f(b) - f(a)) \;=\; f'(\xi)\,(g(b) - g(a))\,. \tag{3}$$

Beweis s. [A1], 20.14.

Für $g(x) = x$ erhält man wieder den Mittelwertsatz 16.2.

Theorem 16.4 erlaubt den Beweis der folgenden *Regel von de l'Hospital*:

16.5 Satz. *(vgl. [A1], 20.15). Es seien $f, g : (a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar; weiter sei $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b]$, und es gelte*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \;=\; \lim_{x\to a^+} g(x) \;=\; 0\,. \tag{4}$$

Wenn $\ell := \lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, so existiert auch $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$, und es ist

$$\lim_{x\to a^+} \tfrac{f(x)}{g(x)} \;=\; \ell \;=\; \lim_{x\to a^+} \tfrac{f'(x)}{g'(x)}\,. \tag{5}$$

Ein analoger Satz gilt auch für links- und beidseitige Grenzwerte, ebenso für solche in $\pm\infty$ und auch für den Fall $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to \pm\infty$.

Beispiele. a) Wir berechnen den Grenzwert der rationalen Funktion

$$R(x) := \tfrac{f(x)}{g(x)} := \tfrac{x^3-2x^2+5x-10}{x^2-4}$$

in 2. Wegen $f(2) = g(2) = 0$ ist (4) erfüllt, die Regel von de l'Hospital anwendbar. Man hat $f'(x) = 3x^2 - 4x + 5 \to 9$ und $g'(x) = 2x \to 4$ für $x \to 2$, und somit gilt $\lim\limits_{x\to 2} R(x) = \frac{9}{4}$.

b) Für $r \in \mathbb{N}$ wird die Funktion $x \mapsto (1+x)^r$ aufgrund des binomischen Satzes nahe 0 gut durch das quadratische Polynom $x \mapsto 1 + r\,x + \frac{r(r-1)}{2}\,x^2$ approximiert. Wir zeigen nun, daß dies auch für $r \in \mathbb{Q}$ der Fall ist. Dazu berechnen wir den Grenzwert der Funktion

$$A(x) := \tfrac{f(x)}{g(x)} := \tfrac{(1+x)^r-(1+rx)}{x^2}$$

in 0. (4) ist wieder erfüllt, und man hat $f'(x) = r\,(1+x)^{r-1} - r \to 0$ sowie $g'(x) = 2x \to 0$ für $x \to 0$. Daher wenden wir die Regel von de l'Hospital noch einmal auf den Quotienten

$$B(x) := \tfrac{f'(x)}{g'(x)} \;=\; \tfrac{r\,(1+x)^{r-1}-r}{2x}$$

an. Es gilt $f''(x) = r(r-1)\,(1+x)^{r-2} \to r(r-1)$ und $g''(x) = 2 \to 2$ für $x \to 0$ und daher $\lim\limits_{x\to 0} A(x) = \lim\limits_{x\to 0} B(x) = \frac{r(r-1)}{2}$. Folglich gilt für $|\,x\,| < 1$ die Formel

$$(1+x)^r \;=\; 1 + r\,x + \tfrac{r(r-1)}{2}\,x^2 \cdot a(x) \quad \text{mit} \quad \lim_{x\to 0} a(x) \;=\; 1\,. \tag{6}$$

c) Die wichtige Aussage (11.6)

$$\lim_{x\to 0} \tfrac{\sin x}{x} \;=\; 1$$

folgt wegen $\sin' x = \cos x \to 1$ für $x \to 0$ sofort aus der Regel von de l'Hospital 16.5; allerdings haben wir (11.6) bei der Differentiation des Sinus bereits benutzt. Für den Quotienten

$$C(x) := \tfrac{f(x)}{g(x)} := \tfrac{\sin x - x}{x^3}$$

ist (4) für $x \to 0$ wieder erfüllt, und man hat auch $f'(x) = \cos x - 1 \to 0$ sowie $g'(x) = 3x^2 \to 0$ für $x \to 0$. Schließlich gilt $f''(x) = -\sin x$ und $g''(x) = 6x$, also $\frac{f''(x)}{g''(x)} \to -\frac{1}{6}$ für $x \to 0$. Die Regel von de l'Hospital liefert also $C(x) \to -\frac{1}{6}$ für $x \to 0$ und somit die folgende Approximation des Sinus in der Nähe von 0:

$$\sin x \;=\; x - \tfrac{x^3}{6} \cdot a(x)\,, \quad \lim_{x\to 0} a(x) \;=\; 1\,. \tag{7}$$

Es gilt auch die folgende Variante der Regel von de l'Hospital, deren Beweis komplizierter ist als der von Satz 16.5:

16.6 Satz. *Es seien $f, g : (a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ auf $(a,b]$, und es gelte*

$$f(x) \to +\infty\,, \quad g(x) \to +\infty \qquad \textit{für} \;\; x \to a^+\,. \tag{8}$$

Wenn $\ell := \lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, so existiert auch $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$, und es ist

$$\lim_{x\to a^+} \tfrac{f(x)}{g(x)} \;=\; \ell \;=\; \lim_{x\to a^+} \tfrac{f'(x)}{g'(x)}\,. \tag{9}$$

Beweis. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es zunächst $a < c_1 < b$ mit $|\,\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \ell\,| \le \varepsilon$ für $a < \xi \le c_1$. Wegen (8) gibt es $a < c_2 \le c_1$ mit $f(x) > 0$ und $g(x) > \max\{0, g(c_1)\}$ für $a < x \le c_2$. Es gilt

$$Q(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \;=\; \frac{f(x) - f(c_1)}{g(x) - g(c_1)} \cdot \frac{1 - \frac{g(c_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(c_1)}{f(x)}} \;=: A(x) \cdot B(x) \tag{10}$$

für diese x. Aufgrund des zweiten Mittelwertsatzes hat man

$$A(x) \;=\; \tfrac{f(x)-f(c_1)}{g(x)-g(c_1)} \;=\; \tfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \text{für ein geeignetes } \; x < \xi < c_1$$

und somit $|\,A(x)-\ell\,| \le \varepsilon$. Wegen (8) gilt weiter $B(x) \to 1$ für $x \to a^+$, und daher gibt es $a < c_3 \le c_2$ mit

$$|\,A(x)\,B(x) - A(x)\,| \;=\; |\,A(x)\,|\,|\,B(x)-1\,| \;\le\; (\ell+\varepsilon)\,|\,B(x)-1\,| \;\le\; \varepsilon$$

für $a < x \le c_3$. Für diese x ist dann $|\,Q(x)-\ell\,| = |\,A(x)\,B(x)-\ell\,| \le 2\varepsilon$.

Ein analoger Satz gilt auch für links- und beidseitige Grenzwerte, ebenso für solche in $\pm\infty$ sowie für den Fall $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to \pm\infty$.

Konvexe Funktionen. Wie auf S. 50 angedeutet, können Ableitungen physikalisch als *Geschwindigkeiten* interpretiert werden, *zweite* Ableitungen als *Beschleunigungen.* Die Vorzeichen der zweiten Ableitung spielen eine wichtige Rolle bei der *Bestimmung (lokaler) Extremalstellen,* vgl. dazu Satz 12.13. Nun wird die *geometrische* Bedeutung der zweiten Ableitungen genauer diskutiert. Dies führt zu den Begriffen *Konvexität, Konkavität* und *Wendepunkt* einer Funktion; letzterer spielt eine (übertrieben) große Rolle in Schulbüchern. Mit Hilfe von Konvexitäts-Argumenten lassen sich *wichtige Ungleichungen* der Analysis herleiten, vgl. dazu etwa [A1], Abschnitt 21.

Graphen und Sekanten. Konvexität bedeutet anschaulich, daß der Graph von f immer *unterhalb* der Verbindungsstrecke zweier seiner Punkte liegt; entsprechend bedeutet Konkavität, daß er stets *oberhalb* dieser Strecke liegt. Für Punkte $a < b \in \mathbb{R}$ hat ein Punkt $x \in [a,b]$ die Form

$$x \;=\; a + t\,(b-a) \;=\; (1-t)\,a + t\,b \tag{11}$$

für ein $t \in [0,1]$. Konvexität und Konkavität lassen sich daher so formulieren:

Definition. a) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : I \mapsto \mathbb{R}$ heißt *konvex*, falls für alle $a, b \in I$ und $t \in [0,1]$ gilt:

$$f((1-t)\,a \;+\; t\,b) \;\le\; (1-t)\,f(a) \;+\; t\,f(b)\,. \tag{12}$$

b) Eine Funktion $f : I \mapsto \mathbb{R}$ heißt *konkav,* falls $-f$ konvex ist.

Natürlich ist $f : I \mapsto \mathbb{R}$ genau dann konkav, wenn (12) mit „$\ge$“ für f gilt.

Konvexität ist dazu äquivalent, daß die *Differenzenquotienten* von f *monoton wachsen:*

16.7 Satz. *(vgl. [A1], 21.2). Eine Funktion $f : I \mapsto \mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn für alle $a < x < b \in I$ gilt:*

$$\tfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \;\le\; \tfrac{f(b)-f(x)}{b-x}\,. \tag{13}$$

16.8 Folgerung. *Eine differenzierbare Funktion $f : I \mapsto \mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn für alle $a < x < b \in I$ gilt:*

$$\tfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \;\leq\; f'(x) \;\leq\; \tfrac{f(b)-f(x)}{b-x}\,. \tag{14}$$

Beweis. Offenbar impliziert (14) sofort (13). Umgekehrt folgt aus (13)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{a\to x^-} \tfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \;\leq\; \tfrac{f(b)-f(x)}{b-x} \quad \text{und} \\ f'(x) &= \lim_{b\to x^+} \tfrac{f(b)-f(x)}{b-x} \;\geq\; \tfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\,. \end{aligned}$$

Graphen und Tangenten. Bedingung (14) bedeutet anschaulich, daß die Tangentensteigung einer konvexen Funktion in einem Punkt x größer ist als „Sekantensteigungen nach links", aber kleiner als „Sekantensteigungen nach rechts." Dies bedeutet, daß die Tangente an den Graphen von f stets *unterhalb* dieses Graphen verläuft. Entsprechend liegen Tangenten an die Graphen konkaver Funktionen stets *oberhalb* dieser Graphen.

16.9 Satz. *(vgl. [A1], 21.3). Eine differenzierbare Funktion $f \in \mathcal{F}(I)$ ist genau dann konvex, wenn f' monoton wachsend ist.*

16.10 Folgerung. *Eine zweimal differenzierbare Funktion $f \in \mathcal{F}(I)$ ist genau dann konvex, wenn $f'' \geq 0$ gilt.*

Dies ergibt sich unmittelbar aus Satz 16.9 und Feststellung 12.8. Es sei noch einmal auf den in den Sätzen 12.11 und 12.13 formulierten Zusammenhang mit der Bestimmung von *Minimalstellen* hingewiesen.

Definition. Eine Funktion $f : I \mapsto \mathbb{R}$ hat einen *Wendepunkt* in einem *inneren* Punkt $a \in I$, falls f für ein geeignetes $\delta > 0$ auf $(a-\delta, a]$ konkav und auf $[a, a+\delta)$ konvex ist oder dieses auf $-f$ zutrifft.

In einem Wendepunkt von f wird also der Graph von der Tangente „durchstoßen".

16.11 Feststellung. *Die Funktion $f \in \mathcal{F}(I)$ habe einen Wendepunkt in $a \in I$. Ist f auf I differenzierbar, so hat f' ein lokales Extremum in a; ist f auf I zweimal differenzierbar, so folgt $f''(a) = 0$.*

Bemerkung. Hat für eine differenzierbare Funktion $f \in \mathcal{F}(I)$ die Ableitung f' ein lokales Extremum in einem inneren Punkt $a \in I$, so muß f nicht unbedingt einen Wendepunkt im Sinn obiger Definition haben, vgl. dazu das folgende Beispiel e). Allerdings werden in der Literatur als Wendepunkte manchmal auch *alle* inneren Punkte $a \in I$ betrachtet, in denen f' ein lokales Extremum hat.

Beispiele. a) Für die Potenzfunktionen $p_r : x \mapsto x^r$ $(r \in \mathbb{Q})$ gilt

$$p_r'(x) = r\, x^{r-1}\,, \quad p_r''(x) = r\,(r-1)\, x^{r-2}$$

auf $(0, \infty)$, d. h. p_r ist für $r \geq 1$ oder $r \leq 0$ konvex, für $0 \leq r \leq 1$ konkav.

b) Es ist p_3 wegen $p_3''(x) = 6x$ auf $(-\infty, 0]$ konkav und auf $[0, \infty)$ konvex. Somit hat p_3 einen Wendepunkt in 0.

c) Für $p_4 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ gilt $p_4''(x) = 12x^2 \geq 0$, d. h. p_4 ist auf $\mathbb{R}$ konvex. Trotz $p_4''(0) = 0$ hat p_4 in 0 *keinen* Wendepunkt.

d) Wegen $\sin'' x = -\sin x$ ist der Sinus auf den Intervallen $(k\pi, (k+1)\pi)$ für ungerade $k \in \mathbb{Z}$ konvex und für gerade $k \in \mathbb{Z}$ konkav. Die Wendepunkte liegen genau in den Nullstellen des Sinus.

e) Die auf $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion (vgl. S. 50)

$$g : x \mapsto 2x^2 + u_2(x) \;=\; \begin{cases} x^2\,(2 + \cos\frac{1}{x}) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

hat genau in 0 eine Minimalstelle. Die Ableitung

$$g' : x \mapsto \begin{cases} 2x\,(2 + \cos\frac{1}{x}) + \sin\frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

hat aber für alle $\delta > 0$ auf den Intervallen $(-\delta, 0]$ und $[0, \delta)$ kein einheitliches Vorzeichen, so daß g dort nicht monoton ist. Eine *Stammfunktion* f von g, d. h. eine Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mit $f' = g$, ist somit auf diesen Intervallen weder konvex noch konkav und hat daher *keinen Wendepunkt* in 0 im Sinn obiger Definition. Die *Existenz* einer solchen Stammfunktion zeigen wir im nächsten Kapitel.

III. Integralrechnung und elementare Funktionen

Übersicht über den Inhalt von Kapitel III:

17 Flächeninhalte

Lernziele:

- *Konzept:* Flächeninhalt

Rechtecke. Für Intervalle $I, J \subseteq \mathbb{R}$ der Länge $|\,I\,|, |\,J\,| \geq 0$ wird der *Flächeninhalt* des *Rechtecks* $R = I \times J$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$ durch die Zahl

$$\mathsf{A}(R) := |\,I\,| \cdot |\,J\,| \in \mathbb{R} \tag{1}$$

definiert. *Strecken* werden als ausgeartete Rechtecke betrachtet und haben dann den Flächeninhalt 0.

Flächeninhalte. Man möchte nun für eine möglichst große Klasse $\mathfrak{M}$ von Teilmengen der Ebene einen Flächeninhalt $\mathsf{A} : \mathfrak{M} \to [0, \infty)$ definieren; dabei sollten die folgenden einleuchtenden Eigenschaften gelten:

(A1) Für Rechtecke $R = I \times J$ gilt $R \in \mathfrak{M}$ und $\mathsf{A}(R) = |\,I\,| \cdot |\,J\,|$.
(A2) Für $M, N \in \mathfrak{M}$ gilt auch $M \cup N$, $M \cap N \in \mathfrak{M}$, und man hat $\mathsf{A}(M \cup N) = \mathsf{A}(M) + \mathsf{A}(N) - \mathsf{A}(M \cap N)$.
(A3) Für $M \in \mathfrak{M}$ und eine Translation $\tau : x \mapsto x + b$ der Ebene gilt auch $\tau(M) \in \mathfrak{M}$ und $\mathsf{A}(\tau(M)) = \mathsf{A}(M)$.
(A4) Für $M \in \mathfrak{M}$ und eine Drehung oder Spiegelung ρ der Ebene gilt auch $\rho(M) \in \mathfrak{M}$ und $\mathsf{A}(\rho(M)) = \mathsf{A}(M)$.

Dreiecke. Liegen *rechtwinklige Dreiecke* T (mit den Seitenlängen $a, b > 0$) in $\mathfrak{M}$, so ergibt sich aus (A1)–(A4) sofort

$$\mathsf{A}(T) := \tfrac{1}{2}\, a\, b\,. \tag{2}$$

Für beliebige Dreiecke D mit einer Seite $s = s_1 + s_2$ und zugehöriger Höhe h erhält man daraus $\mathsf{A}(D) = \frac{1}{2}\, s_1\, h + \frac{1}{2}\, s_2\, h$, also

$$\mathsf{A}(D) = \tfrac{1}{2}\, s\, h\,. \tag{3}$$

Polygone. a) Als nächstes werden nun *Polygone* $P \subseteq \mathbb{R}^2$, d. h. endliche Vereinigungen von Dreiecken betrachtet. Man kann $P = \bigcup_{j=1}^{r} D_j$ als *disjunkte* Vereinigung von Dreiecken schreiben (Strecken sind entartete Dreiecke!) und setzt dann

$$\mathsf{A}(P) := \sum_{j=1}^{r} \mathsf{A}(D_j)\,. \tag{4}$$

Dieser Ausdruck ist von der *Wahl der Zerlegung* von P in disjunkte Dreiecke *unabhängig* und somit *wohldefiniert*, und der Flächeninhalt $\mathsf{A} : \mathfrak{P} \to [0, \infty)$ auf der Klasse $\mathfrak{P}$ aller Polygone erfüllt die Eigenschaften (A1)–(A4).

b) Die in a) formulierten Aussagen sind sicher anschaulich einleuchtend. Ein Beweis ergibt sich leicht aus der mehrdimensionalen Integralrechnung (vgl. etwa [A3], Abschnitt 8), wäre an dieser Stelle aber sehr mühsam. Natürlich werden die Aussagen aus a) im folgenden nicht verwendet.

Ausschöpfung und Eingrenzung. a) Eine naheliegende Methode, einen *Flächeninhalt für allgemeinere Mengen M in der Ebene* zu definieren, besteht darin, M durch Polygone einerseits *auszuschöpfen* und andererseits *einzugrenzen.*

b) Dieses Verfahren wurde bereits von Archimedes (287–212 v. Chr.) erfolgreich angewendet. Für den *Einheitskreises* haben wir die *Ausschöpfung* bereits in Abschnitt 8 diskutiert; eine entsprechende *Eingrenzung* lässt sich ähnlich durchführen (vgl. auch [A1], Abschnitt 16). Archimedes soll die Abschätzung $3,14145 \le \pi \le 3,14166$ mit Hilfe des 192-Ecks erhalten haben.

c) Für die Kreisfläche π ergeben sich also durch Ausschöpfung und Eingrenzung durch Polygone explizite Näherungsformeln; diese beruhen natürlich wesentlich auf der speziellen geometrischen Gestalt des Kreises K. Es liegt daher die Vermutung nahe, daß dieses Verfahren für kompliziertere Teilmengen der Ebene wesentlich schwieriger durchzuführen ist.

Integrale. a) Trotzdem kann das Problem der „Bestimmung von Flächeninhalten“ von der Analysis „im Prinzip“ gelöst werden. Im nächsten Abschnitt konstruieren wir das *Integral* stetiger Funktionen über kompakten Intervallen mittels geeigneter Approximationen durch Rechtecksummen, wodurch sich Flächeninhalte spezieller Mengen ergeben. Die effektive Berechnung solcher Integrale gelingt oft mit Hilfe des *Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung* im übernächsten Abschnitt; für *numerische Methoden* sei auf [A1], Abschnitt 43* verwiesen.

b) Die Integrationstheorie kann auf Funktionen von mehreren Variablen ausgedehnt werden (vgl. etwa [A3]); mit Hilfe des *zweidimensionalen Lebesgue-Integrals* wird dann ein Flächeninhalt $\mathsf{A} : \mathfrak{M} \to [0, \infty)$ für eine sehr große Klasse $\mathfrak{M}$ von Teilmengen der Ebene konstruiert, der (A1)–(A4) erfüllt und sogar *abzählbar additiv* ist, d. h. es gilt

$$\mathsf{A}\,(\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j) \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} \mathsf{A}(M_j) \tag{5}$$

für eine *disjunkte Folge* (M_j) in $\mathfrak{M}$. Entsprechend liefert das *dreidimensionale* Lebesgue-Integral eine Theorie der *Volumina im Raum.*

18 Integrale

Lernziele:

- *Konzept:* Riemannscher Integralbegriff
- *Resultate:* Stetige Funktionen, insbesondere $\mathcal{C}^1$-Funktionen, sowie stückweise monotone Funktionen sind integrierbar über kompakte Intervalle; Mittelwertsätze der Integralrechnung

Frage: Versuchen Sie, den Mittelwert der Funktion $p_2 : x \mapsto x^2$ über ein Intervall $[0,b]$ zu „bestimmen".

„Flächeninhalte mit Vorzeichen". a) Ein Ausgangspunkt der Integralrechnung ist also das Problem der *„Bestimmung von Flächeninhalten krummlinig begrenzter Mengen"* in der Ebene. Zunächst betrachten wir nur solche Mengen $M(f) \subseteq \mathbb{R}^2$, die von zwei Parallelen zur y-Achse, der x-Achse und dem Graphen einer stetigen Funktion $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ begrenzt werden. Wir definieren einen „Flächeninhalt mit Vorzeichen" von $M(f)$, wobei die Teile von $M(f)$ oberhalb der x-Achse als positiv, die unterhalb der x-Achse als negativ betrachtet werden; diese Größe heißt **Integral** $\int_a^b f$ von f.

b) Zu diesem Zweck wird $M(f)$ durch geeignete Polygone ausgeschöpft und eingegrenzt und $\int_a^b f$ als Grenzwert der entsprechenden Flächeninhalte definiert. Im Gegensatz zu Abschnitt 17 verwenden wir an Stelle allgemeiner Polygone (für die der Flächeninhalt ja nicht exakt definiert wurde) nur disjunkte Vereinigungen achsenparalleler Rechtecke, für die der Flächeninhalt offensichtlich ist. Dadurch konvergieren die Approximationen zwar langsamer als etwa bei der Berechnung der Kreisfläche, sind aber einfacher zu handhaben.

Ober- und Untersummen. a) Eine *Zerlegung* Z eines kompakten Intervalls $J = [a,b]$ ist eine endliche Teilmenge von J mit $a, b \in Z$. Man schreibt

$$Z \;=\; \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_r = b\}\,, \quad r \in \mathbb{N}\,. \tag{1}$$

Mit $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}(J)$ wird das System aller Zerlegungen von J bezeichnet. Weiter verwenden wir die Abkürzung

$$\Delta x_k := \; x_k - x_{k-1}\,, \quad k = 1\,, \ldots\,, r, \tag{2}$$

und bezeichnen die *Feinheit* der Zerlegung mit

$$\Delta(Z) := \max_{k=1}^{r} \Delta x_k \;=\; \max_{k=1}^{r} (x_k - x_{k-1})\,. \tag{3}$$

b) Für eine Zerlegung $Z \in \mathfrak{Z}(J)$ von $J = [a,b]$ und $f \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R})$ setzen wir

$$M_k \;:=\; \max\,\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}\,, \tag{4}$$

$$m_k \;:=\; \min\,\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}\,; \tag{5}$$

diese Maxima und Minima existieren aufgrund von Theorem 12.5. Damit definieren wir die *Ober-* und *Untersumme* von f bzgl. Z durch

$$S(f,Z) := \sum_{k=1}^{r} M_k \, \Delta x_k \,, \quad s(f,Z) := \sum_{k=1}^{r} m_k \, \Delta x_k \,. \tag{6}$$

c) Der gesuchte Flächeninhalt liegt „offenbar" zwischen $s(f,Z)$ und $S(f,Z)$. *Verfeinert* man nun die Zerlegung Z, d.h. ersetzt man sie durch eine Zerlegung Z' mit $Z \subseteq Z'$, so werden die Untersummen *größer* und die Obersummen *kleiner:*

18.1 Feststellung. *Für Zerlegungen $Z, Z' \in \mathfrak{Z}(J)$ von J mit $Z \subseteq Z'$ gilt*

$$s(f,Z) \;\le\; s(f,Z') \;\le\; S(f,Z') \;\le\; S(f,Z)\,. \tag{7}$$

Beweis. a) Zunächst sei $Z' = Z \cup \{x'\}$ mit $x_{j-1} < x' < x_j$. Für

$$w_1 := \min\{f(x) \mid x \in [x_{j-1}, x']\}\,, \quad w_2 := \min\{f(x) \mid x \in [x', x_j]\}$$

gilt dann $m_j \le w_1$, $m_j \le w_2$ und somit

$$m_j \, \Delta x_j \;=\; m_j(x' - x_{j-1} + x_j - x') \le w_1(x' - x_{j-1}) + w_2(x_j - x')\,.$$

Da alle anderen Terme in den beiden Untersummen die gleichen sind, folgt sofort $s(f,Z) \le s(f,Z')$.

b) Durch Iteration des Arguments in a) folgt auch $s(f,Z) \le s(f,Z')$ für beliebige $Z \subseteq Z'$, und die Aussage $S(f,Z) \ge S(f,Z')$ ergibt sich genauso.

18.2 Folgerung. *Man hat $s(f,Z_1) \le S(f,Z_2)$ für beliebige Zerlegungen $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{Z}(J)$ von J.*

Beweis. Mit $Z := Z_1 \cup Z_2$ folgt nach Feststellung 18.1 sofort

$$s(f,Z_1) \;\le\; s(f,Z) \;\le\; S(f,Z) \;\le\; S(f,Z_2)\,.$$

Riemannsche Zwischensummen. Es seien wieder $f \in \mathcal{C}(J)$ und $Z \in \mathfrak{Z}(J)$ eine Zerlegung von $J = [a,b]$ wie in (1). Für ein Tupel $\xi := (\xi_1, \ldots, \xi_r)$ von Punkten $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ heißt dann

$$\Sigma(f,Z,\xi) := \sum_{k=1}^{r} f(\xi_k) \, \Delta x_k \tag{8}$$

eine *Riemannsche Zwischensumme* von f über J. Unter- und Obersummen sind spezielle Riemannsche Zwischensummen, und stets gilt

$$s(f,Z) \;\le\; \Sigma(f,Z,\xi) \;\le\; S(f,Z)\,. \tag{9}$$

18.3 Theorem. *a) Für eine stetige Funktion $f \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R})$ gibt es genau eine Zahl $I \in \mathbb{R}$ mit*

$$s(f,Z) \;\le\; I \;\le\; S(f,Z) \quad \textit{für alle} \quad Z \in \mathfrak{Z}(J)\,. \tag{10}$$

b) Für jede Folge $(Z^{(n)}) \subseteq \mathfrak{Z}(J)$ von Zerlegungen von J mit $\Delta(Z^{(n)}) \to 0$ und jede Wahl von Zwischenpunkten gilt

$$\Sigma(f, Z^{(n)}, \xi^{(n)}) \to I\,. \tag{11}$$

Definition. Die Zahl I aus Theorem 18.3 heißt *(Riemannsches)* **Integral** der Funktion $f \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R})$ über das Intervall $J=[a,b]$:

$$\textstyle\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^b f := \int_J f(x)\,dx := \int_J f := I\,. \tag{12}$$

Aufgrund der Überlegungen zu Beginn des Abschnitts ist also $\int_a^b f(x)\,dx$ als „Flächeninhalt mit Vorzeichen" der dort vorgestellten Menge $M(f)$ zu betrachten.

Der allgemeine Beweis für stetige Funktionen folgt in Theorem 24.5. Hier geben wir zunächst einen

Beweis von Theorem 18.3 für $f \in \mathcal{C}^1(J,\mathbb{R})$. a) Es sei

$$L := \max_{x\in J} |\, f'(x)\,| \geq 0 \tag{13}$$

(vgl. Theorem 12.5). Aufgrund des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung 16.2 hat man die Aussage

$$\forall\, x,y \in J \;:\; |\, f(x)-f(y)\,| \;\leq\; L\,|\,x-y\,|\,. \tag{14}$$

b) Für eine Zerlegung $Z \in \mathfrak{Z}(J)$ hat man aufgrund von (14)

$$S(f,Z)-s(f,Z) \;=\; \sum_{k=1}^{r}(M_k-m_k)\,\Delta x_k \;\leq\; \sum_{k=1}^{r} L\,(\Delta x_k)^2 \;\leq\; L\,|\,J\,|\,\Delta(Z)\,. \tag{15}$$

c) Wegen (15) ist

$$I := \sup\{s(f,Z) \mid Z \in \mathfrak{Z}(J)\} \;=\; \inf\{S(f,Z) \mid Z \in \mathfrak{Z}(J)\} \tag{16}$$

die einzige reelle Zahl, die Bedingung (10) erfüllt.

d) In der Situation von Aussage b) gilt nach (15) offenbar

$$|\,\Sigma(f,Z^{(n)},\xi^{(n)})-I\,| \;\leq\; S(f,Z^{(n)})-s(f,Z^{(n)}) \;\leq\; L\,|\,J\,|\,\Delta(Z^{(n)}) \to 0\,.$$

Bemerkung. In Beweisteil c) kann man die Verwendung von Supremum und Infimum umgehen: Für eine Folge $(Y^{(n)})$ in $\mathfrak{Z}(J)$ mit $Y^{(n)} \supseteq Y^{(n+1)}$ und $\Delta(Y^{(n)}) \to 0$ ist $([s(f,Y^{(n)}),S(f,Y^{(n)})])$ eine Intervallschachtelung, und für

$$I := \lim_{n\to\infty} s(f,Y^{(n)}) \;=\; \lim_{n\to\infty} S(f,Y^{(n)}) \tag{17}$$

gilt offenbar Eigenschaft (10).

Beispiele. a) Es wird $\int_0^b x\,dx$ berechnet. Da dieses Integral als Flächeninhalt eines Dreiecks anzusehen ist, ist als Wert $\frac{1}{2}b^2$ zu erwarten. Dies ergibt sich in der Tat mittels der *äquidistanten* Zerlegungen

$$Z^{(n)} := \{0, \tfrac{b}{n}, \tfrac{2b}{n}, \ldots, b\} \quad \text{sowie } \xi_k^{(n)} = x_k^{(n)} = k\tfrac{b}{n} \tag{18}$$

und der arithmetischen Summenformel (2.1).

b) Für die Berechnung des Flächeninhalts unter der Parabel $\{(x,y) \mid y = x^2\}$ verwendet man die quadratische Summenformel und erhält $\int_0^b x^2\,dx = \frac{1}{3}b^3$.

c) Allgemeiner läuft für $\alpha > 0$ die Berechnung des Integrals $\int_0^b x^\alpha\,dx$ auf die des Grenzwerts $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum\limits_{k=1}^{n} k^\alpha$ hinaus. In Beispiel 19 zeigen wir

$$\int_0^b x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}\, b^{\alpha+1} \quad \text{für } \alpha > 0\,. \tag{19}$$

18.4 Satz. *Für $a < c < b$ und $f \in \mathcal{C}[a,b]$ gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,. \tag{20}$$

Beweis. Es seien $(Z_-^{(n)}) \subseteq \mathfrak{Z}[a,c]$ und $(Z_+^{(n)}) \subseteq \mathfrak{Z}[c,b]$ Folgen von Zerlegungen von $[a,c]$ und $[c,b]$ mit $\Delta(Z_-^{(n)}) \to 0$ und $\Delta(Z_+^{(n)}) \to 0$. Dann ist offenbar $(Z^{(n)} := Z_-^{(n)} \cup Z_+^{(n)})$ eine Folge von Zerlegungen von $[a,b]$ mit $\Delta(Z^{(n)}) \to 0$. Für jede Wahl von Zwischenpunkten $\xi_-^{(n)}$ und $\xi_+^{(n)}$ für $Z_-^{(n)}$ und $Z_+^{(n)}$ ist dann $\xi^{(n)} := (\xi_-^{(n)}, \xi_+^{(n)})$ eine solche für $Z^{(n)}$, und es gilt

$$\Sigma(f, Z^{(n)}, \xi^{(n)}) = \Sigma(f, Z_-^{(n)}, \xi_-^{(n)}) + \Sigma(f, Z_+^{(n)}, \xi_+^{(n)})\,.$$

Wegen Theorem 18.3 b) folgt daraus mit $n \to \infty$ die Behauptung (20).

Das Integral $I : \mathcal{C}(J) \mapsto \mathbb{R}$ ist *linear* und *monoton:*

18.5 Satz. *a) Für $f, g \in \mathcal{C}(J)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\int_J (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha \int_J f(x)\,dx + \beta \int_J g(x)\,dx\,. \tag{21}$$

b) Für $f, g \in \mathcal{C}(J)$ mit $f \le g$ gilt auch $\int_J f(x)\,dx \le \int_J g(x)\,dx$.

Beweis. Es sei $(Z^{(n)}) \subseteq \mathfrak{Z}(J)$ eine Folge von Zerlegungen von J mit $\Delta(Z^{(n)}) \to 0$ und $(\xi^{(n)})$ eine entsprechende Folge von Zwischenpunkten. Dann gilt offenbar

$$\begin{aligned} \Sigma(\alpha f + \beta g, Z^{(n)}, \xi^{(n)}) &= \alpha\,\Sigma(f, Z^{(n)}, \xi^{(n)}) + \beta\,\Sigma(g, Z^{(n)}, \xi^{(n)}) \quad \text{sowie} \\ \Sigma(f, Z^{(n)}, \xi^{(n)}) &\le \Sigma(g, Z^{(n)}, \xi^{(n)}) \quad \text{im Fall } f \le g\,, \end{aligned}$$

und mit $n \to \infty$ folgen die Behauptungen a) und b).

18.6 Satz. *Für $J = [a,b]$ und $f \in \mathcal{C}(J)$ gilt die Abschätzung*

$$\left| \int_J f(x)\,dx \right| \le \int_J |f(x)|\,dx \le (b-a) \max_{x\in J} |f(x)|\,. \tag{22}$$

Beweis. Nach Satz 18.5 b) hat man einfach

$$\begin{aligned} |\textstyle\int_J f(x)\,dx\,| &= \textstyle\int_J \pm f(x)\,dx \;\leq\; \int_J |\,f(x)\,|\,dx \\ &\leq \textstyle\int_J \max\limits_{x\in J} |\,f(x)\,|\,dx \;=\; (b-a) \max\limits_{x\in J} |\,f(x)\,|\,. \end{aligned}$$

18.7 Satz. *Für* $f \in \mathcal{C}[a,b]$ *gilt:* $\int_a^b |\,f(x)\,|\,dx = 0 \;\Leftrightarrow\; f = 0\,.$

Beweis. „$\Leftarrow$“ ist klar. Ist umgekehrt $f \neq 0$, so gibt es $x_0 \in [a,b]$ mit $|\,f(x_0)\,| =: 2\varepsilon > 0$. Nach Satz 10.3 gibt es dann $\delta > 0$ mit $|\,f(x)\,| \geq \varepsilon$ für alle $x \in [a,b]$ mit $|\,x - x_0\,| \leq \delta$. Für $J_\delta := [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [a,b]$ gilt dann

$$\textstyle\int_{J_\delta} |\,f(x)\,|\,dx \;\geq\; \int_{J_\delta} \varepsilon\,dx \;\geq\; \varepsilon \cdot \delta > 0$$

aufgrund von Satz 18.5 b), und wegen Satz 18.4 folgt daraus auch

$$\textstyle\int_a^b |\,f(x)\,|\,dx \;\geq\; \int_{J_\delta} |\,f(x)\,|\,dx \;\geq\; \varepsilon \cdot \delta > 0\,.$$

Mittelwerte. a) Es seien $f \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R})$ und $Z \in \mathfrak{Z}(J)$ eine *äquidistante* Zerlegung, d. h. es gelte $\Delta x_k = \frac{|\,J\,|}{r}$ für $k = 1,\ldots,r$. Dann ist

$$\frac{1}{|\,J\,|}\,\Sigma(f,Z,\xi) \;=\; \frac{1}{|\,J\,|} \sum_{k=1}^{r} f(\xi_k)\,\Delta x_k \;=\; \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{r} f(\xi_k) \tag{23}$$

das *arithmetische Mittel* der Zahlen $f(\xi_1),\ldots,f(\xi_r)$.

b) Entsprechend ist $\frac{1}{|\,J\,|}\,\Sigma(f,Z,\xi)$ für beliebige $Z \in \mathfrak{Z}(J)$ ein *gewichtetes Mittel* der Zahlen $f(\xi_1),\ldots,f(\xi_r)$, wobei $f(\xi_k)$ mit dem Faktor $\frac{\Delta x_k}{|\,J\,|}$ gewichtet wird.

c) Wegen (11) kann somit $\frac{1}{|\,J\,|} \int_J f(x)\,dx$ als *Mittelwert* von f über J interpretiert werden.

d) Insbesondere ist $\frac{1}{b} \int_0^b x^2\,dx = \frac{b^2}{3}$ der Mittelwert der Funktion $p_2 : x \mapsto x^2$ über dem Intervall $[0,b]$.

Es folgen nun die *Mittelwertsätze der Integralrechnung.* Für $f \in \mathcal{C}(J)$ sei

$$M := \max_{x\in J}\; f(x) := \;\max f(J)\,, \quad m := \min_{x\in J}\; f(x) := \;\min f(J)\,. \tag{24}$$

Wegen $m \leq f \leq M$ folgt aus Satz 18.5 b) sofort die Abschätzung

$$m \;\leq\; \frac{1}{|\,J\,|} \int_J f(x)\,dx \;\leq\; M \tag{25}$$

für den Mittelwert von f auf J. Darüberhinaus gilt:

18.8 Theorem. *a)* **(Mittelwertsatz):** *Für* $f \in \mathcal{C}(J)$ *gibt es* $\xi \in J$ *mit*

$$\frac{1}{|\,J\,|} \int_J f(x)\,dx \;=\; f(\xi)\,. \tag{26}$$

b) **(verallgemeinerter Mittelwertsatz):** *Für* $f \in \mathcal{C}(J)$ *und* $p \in \mathcal{C}(J)$ *mit* $p \geq 0$ *gibt es* $\xi \in J$ *mit*

$$\int_J f(x)\,p\,(x)\,dx \;=\; f(\xi) \int_J p\,(x)\,dx\,. \tag{27}$$

Beweis s. [A1], 18.5.

Bemerkungen. a) Der Mittelwertsatz besagt also, daß der *Mittelwert* von $f \in \mathcal{C}(J)$ über J stets ein *Funktionswert* von f auf J ist. Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz gilt dies auch für *gewichtete Mittelwerte* von $f \in \mathcal{C}(J)$.

b) Der verallgemeinerte Mittelwertsatz gilt auch im Fall $p \le 0$, nicht aber für Funktionen p mit *Vorzeichenwechsel:*

Für $p(x) = x - \frac{1}{2}$ gilt $\int_0^1 p(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx - \frac{1}{2} = 0$, aber für $f(x) = x$ hat man nach 18 $\int_0^1 f(x)\,p(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx - \frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \neq 0$. Also ist $\int_0^1 f(x)\,p(x)\,dx = \frac{1}{12} \neq 0 = f(\xi)\;\int_0^1 p(x)\,dx$ für alle $\xi \in [0,1]$.

Das Riemann-Integral kann auch für gewisse beschränkte Funktionen definiert werden, die nicht stetig sein müssen:

a) Für eine Zerlegung $Z \in \mathfrak{Z}(J)$ und eine *beschränkte* Funktion $f : J \mapsto \mathbb{R}$ setzen wir

$$M_k \;:=\; \sup\,\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}\,, \tag{28}$$

$$m_k \;:=\; \inf\,\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}\,. \tag{29}$$

Wie auf S. 80 definieren wir damit die *Ober*- und *Untersumme* von f bzgl. Z durch

$$S(f,Z) := \sum_{k=1}^{r} M_k\,\Delta x_k\,, \quad s(f,Z) := \sum_{k=1}^{r} m_k\,\Delta x_k\,. \tag{30}$$

b) Eine *beschränkte* Funktion $f : J \mapsto \mathbb{R}$ heißt *Riemann-integrierbar,* falls

$$\sup\{s(f,Z) \mid Z \in \mathfrak{Z}(J)\} \;=\; \inf\{S(f,Z) \mid Z \in \mathfrak{Z}(J)\} \tag{31}$$

gilt; in diesem Fall wird diese Zahl das *Riemann-Integral* $I = \int_a^b f(x)\,dx$ von f genannt. Es ist $I \in \mathbb{R}$ die eindeutig bestimmte Zahl mit der Eigenschaft

$$s(f,Z) \;\le\; I \;\le\; S(f,Z) \quad \text{für alle} \quad Z \in \mathfrak{Z}(J)\,. \tag{32}$$

c) Folgerung 18.2 sowie die Sätze 18.4 – 18.6 gelten sinngemäß auch für Riemann-Integrale beschränkter Funktionen; dies gilt jedoch *nicht* für Satz 18.7 und die Mittelwertsätze Theorem 18.8.

Es gibt beschränkte Funktionen, die *nicht* Riemann-integrierbar sind:

Beispiel. Für die *Dirichlet–Funktion* $D : [0,1] \to \mathbb{R}$, $D(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & , \quad x \in \mathbb{Q} \end{cases}$, gilt stets $m_k = 0$ und $M_k = 1$ für jede Zerlegung Z von $[0,1]$ (vgl. Satz 6.7). Somit ist stets $s(f,Z) = 0$ und $S(f,Z) = 1$, D also *nicht* integrierbar.

Andererseits sind nach Theorem 18.3 *stetige* Funktionen Riemann-integrierbar, was wir bisher nur für $\mathcal{C}^1$-Funktionen gezeigt haben. Weiter gilt:

18.9 Satz. *Monotone Funktionen* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *sind Riemann-integrierbar.*

Beweis. Es sei f monoton wachsend und $\varepsilon > 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $h := \frac{b-a}{n}$ und $Z_n := \{a, a+h, a+2h, \ldots, a+nh = b\}$. Dann ist $\Delta x_k = h$, $M_k = f(a+kh)$ und $m_k = f(a+(k-1)h)$. Es folgt

$$\begin{aligned} S(f, Z_n) - s(f, Z_n) &= \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\, \Delta x_k \\ &= h \sum_{k=1}^{n} (f(a+kh) - f(a+(k-1)h)) \\ &= h\,(f(b) - f(a)) \;<\; \varepsilon \quad \text{für große } \; n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Wie in Satz 18.4 sieht man, dass auch *stückweise monotone* Funktionen Riemann-integrierbar sind; diese müssen natürlich nicht stetig sein.

Die Kreisfläche. Die Funktion $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ ist auf $[-1, 1]$ stetig und stückweise monoton, nicht aber $\mathcal{C}^1$. Zum Abschluß dieses Abschnitts zeigen wir noch

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx \;=\; \frac{\pi}{2} \; : \qquad (33)$$

a) In Abschnitt 8 haben wir den Einheitskreises durch $2^{n+1} \cdot 3$-Ecke P_n ausgeschöpft (vgl. Abb. 8a). Die Ecken von P_n in der oberen Halbebene sind gegeben durch die Punkte

$$P_n^k := (\cos(k \cdot \tfrac{\pi}{3 \cdot 2^n}), \sin(k \cdot \tfrac{\pi}{3 \cdot 2^n}))\,, \quad k = 0, 1, \ldots, 3 \cdot 2^n\,.$$

Wir verbinden diese Ecken durch Strecken und erhalten dadurch *stückweise affine* Funktionen $a_n : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$; für diese gilt dann

$$\int_{-1}^{1} a_n(x)\, dx \;=\; \frac{1}{2} \cdot p_n\,.$$

b) Entsprechend verbinden wir die Ecken $Q_n^k := \frac{1}{h_n} P_n^k$ der Polygone Q_n in der oberen Halbebene und erhalten stückweise affine Funktionen $b_n : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$ mit

$$\int_{-1}^{1} b_n(x)\, dx \;=\; \frac{1}{2} \cdot q_n\,.$$

c) Es gilt offenbar $a_n \leq f \leq b_n$ auf $[-1, 1]$; aus Satz 18.5 b) ergibt sich daher

$$\frac{1}{2} \cdot p_n \;\leq\; \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx \;\leq\; \frac{1}{2} \cdot q_n \quad \text{für } \; n \in \mathbb{N}\,,$$

und mit $n \to \infty$ ergibt sich (33) wegen $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lim\limits_{n\to\infty} q_n = \pi$.

19 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Lernziele:

- *Konzept:* Stammfunktion
- *Resultat:* Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
- *Methoden:* partielle Integration, Substitutionsregel
- *Kompetenzen:* Berechnung von Integralen

Bisher wurden Differentialrechnung und Integralrechnung *getrennt* behandelt; beide Kalküle entfalten allerdings erst ihre volle Stärke, wenn sie *zusammen* angewendet werden. Der fundamentale Zusammenhang, der zwischen Differentiation und Integration besteht, ist als sogenannter **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung** bekannt. Sein Beweis ergibt sich leicht aus den *Mittelwertsätzen* beider Kalküle.

Beispiel und Konvention. a) Für die Funktion

$$F : x \mapsto \int_0^x t^2\,dt\,, \quad x \geq 0\,, \tag{1}$$

gilt nach Beispiel b) auf S. 83 die explizite Formel $F(x) = \frac{1}{3}\,x^3$, und es folgt

$$F'(x) = x^2\,, \quad x \geq 0\,. \tag{2}$$

Für $x < 0$ sieht man leicht $\int_x^0 t^2\,dt = \int_0^{-x} t^2\,dt = \frac{1}{3}\,(-x)^3 = -\frac{1}{3}\,x^3$, da ja $p_2 : t \mapsto t^2$ eine gerade Funktion ist. Unter Verwendung der *Konvention*

$$\int_b^a f(t)\,dt := -\int_a^b f(t)\,dt \quad \text{für } a < b \text{ und } f \in \mathcal{C}[a,b] \tag{3}$$

kann (1) sogar für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert werden, und (2) gilt dann auf ganz $\mathbb{R}$.

b) In a) wurden also für eine stetige Funktion $f \in C(I)$ die Integrale

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt\,, \quad x \in I\,,$$

mit *variabler oberer Grenze* x untersucht, und dabei ergab sich die Aussage $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$. Der Hauptsatz 19.1 besagt, daß diese auch allgemein richtig ist.

Stammfunktionen. a) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine differenzierbare Funktion $F : I \mapsto \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* von $f : I \mapsto \mathbb{R}$, falls $F' = f$ gilt.

b) Sind $F, \Phi : I \mapsto \mathbb{R}$ Stammfunktionen von $f : I \mapsto \mathbb{R}$, so ist $F - \Phi$ konstant.

Wegen $(F - \Phi)' = F' - \Phi' = f - f = 0$ ist dies eine Konsequenz von Folgerung 12.10, die in Abschnitt 16 aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gefolgert wurde.

19.1 Theorem (Hauptsatz). *a) Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a \in I$. Für eine* stetige *Funktion $f \in \mathcal{C}(I)$ wird durch*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt\,, \quad x \in I\,, \tag{4}$$

eine Stammfunktion F zu f definiert.
b) Ist $f \in \mathcal{C}[a,b]$ und Φ eine Stammfunktion von f auf $[a,b]$, so gilt

$$\int_a^b f(t)\,dt \;=\; \Phi(b) - \Phi(a)\,. \tag{5}$$

Beweis s. [A1], 22.3.

Bedeutung des Hauptsatzes. a) Der Hauptsatz ist von großer *theoretischer Bedeutung*, da er die *Existenz von Stammfunktionen* zu *allen stetigen Funktionen* garantiert. Für spezielle Funktionen kann es schwierig oder sogar unmöglich sein, Stammfunktionen mit Hilfe bereits bekannter Funktionen explizit auszudrücken.

b) Als Beispiel für dieses Phänomen diene die rationale Funktion $j : x \mapsto {}^1\!/_x$ über $(0,\infty)$. Mit Hilfe der bisher in dieser Vorlesung behandelten Funktionen läßt sich keine Stammfunktion von j explizit angeben. Wir werden aber im nächsten Abschnitt

$$\log x := \int_1^x \tfrac{1}{t}\,dt\,, \quad x > 0\,, \tag{6}$$

als *Definition* des Logarithmus verwenden. Analog dazu werden wir in Abschnitt 26 in Übereinstimmung mit (14.9) die Umkehrfunktion des *Sinus* auf $(-1,1)$ durch

$$\arcsin x := \int_0^x \tfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\,, \quad -1 < x < 1\,, \tag{7}$$

definieren und damit die *exakte* Einführung der trigonometrischen Funktionen und ihrer Umkehrfunktionen nachholen.

c) Andererseits ist für viele Funktionen aufgrund der Ergebnisse in Kapitel II die explizite Angabe von Stammfunktionen möglich. In diesen Fällen erlaubt (5) die *bequeme Berechnung von Integralen;* hierauf beruht die große *praktische Bedeutung* des Hauptsatzes. Wir können bereits eine erste Tabelle von Funktionen und Stammfunktionen aufstellen:

19.2 Tabelle.

Funktion f	*Stammfunktion* F	*Definitionsbereich*
$x^n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$x > 0$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$\lvert x \rvert < 1$

Beispiele. a) Für die rechte Seite von (5) verwendet man oft die Abkürzung

$$\Phi(x)\big|_a^b := \Phi(b) - \Phi(a)\,. \tag{8}$$

b) Aus $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ und $\frac{d}{dx}\, x^{\alpha+1} = (\alpha+1)\, x^\alpha$ bzw. Tabelle 19.2 ergibt sich sofort

$$\int_a^b \cos x\, dx \;=\; \sin x\big|_a^b\,, \tag{9}$$

$$\int_a^b x^\alpha\, dx \;=\; \frac{1}{\alpha+1}\, x^{\alpha+1}\Big|_a^b\,, \quad \alpha \neq -1\,, \quad a,\ b > 0\,, \tag{10}$$

letzteres in Übereinstimmung mit (18.19). Im Fall $\alpha > 0$ gilt (10) auch für $a,\ b \geq 0$, im Fall $\alpha \in \mathbb{N}$ sogar für alle $a,\ b \in \mathbb{R}$.

„Unbestimmte Integrale“. Für eine Stammfunktion F von f verwendet man oft die Notation

$$„\int f(x)\, dx \;=\; F(x)“\,. \tag{11}$$

Das *„unbestimmte Integral“* $\int f(x)\, dx$ bezeichnet hier *nicht* **eine** Funktion, sondern die *Menge aller Stammfunktionen* zu f, wegen Folgerung 12.10 also die Funktionenmenge $\{F + C \mid C \in \mathbb{R}\}$. Formeln wie (11) sind stets so zu lesen, daß die Funktion F Element der Menge $\int f(x)\, dx$ ist.

Natürlich lassen sich Stammfunktionen meist nicht so unmittelbar angeben wie in (9) oder (10). Zur Berechnung von $\int f(x)\, dx$ versucht man dann, den Integranden geeignet *umzuformen.* Zwei wichtige Methoden dafür ergeben sich aus der *Produktregel* und der *Kettenregel* der Differentialrechnung:

19.3 Satz (Partielle Integration). *Es seien $f \in \mathcal{C}(I)$, F eine Stammfunktion von f und $g \in \mathcal{C}^1(I)$. Dann gilt*

$$\int f(x)\, g(x)\, dx \;=\; F(x)\, g(x) \;-\; \int F(x)\, g'(x)\, dx\,. \tag{12}$$

Beweis s. [A1], 22.7.

Im Fall $I = [a, b]$ ergibt sich aus (12) und (5) sofort

$$\int_a^b f(x) g(x)\, dx \;=\; F(x) g(x)\big|_a^b \;-\; \int_a^b F(x) g'(x)\, dx\,. \tag{13}$$

Beispiele. a) Zur Berechnung des Integrals $\int x \cos x\, dx$ wählen wir $f(x) = \cos x$ und $g(x) = x$; mit $F(x) = \sin x$ folgt dann

$$\int x \cos x\, dx \;=\; x \sin x - \int 1 \cdot \sin x\, dx \;=\; x \sin x + \cos x\,.$$

b) Zur Berechnung von $\int \sin^2 x\, dx$ wählen wir $f(x) = g(x) = \sin x$; mit $F(x) = -\cos x$ folgt dann

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\, dx &= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x\, dx\\ &= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x)\, dx\,, \quad \text{also}\\ \int \sin^2 x\, dx &= \tfrac{1}{2}\,(x - \sin x \cos x)\,.\end{aligned}$$

19.4 Satz (Substitutionsregel). *Gegeben seien Funktionen* $f \in \mathcal{C}[c,d]$ *und* $g \in \mathcal{C}^1[a,b]$ *mit* $g([a,b]) \subseteq [c,d]$. *Dann gilt (mit Notation (3))*

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx \;=\; \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\, dt\,. \tag{14}$$

Beweis s. [A1], 22.9.

Bemerkungen. a) In Satz 19.4 muß g weder monoton noch bijektiv sein. Ist jedoch $g : [a,b] \mapsto [c,d]$ bijektiv mit $g'(x) \neq 0$ auf $[a,b]$, so gilt aufgrund des Zwischenwertsatzes $g' > 0$ oder $g' < 0$ auf $[a,b]$, d. h. g ist streng monoton (vgl. Theorem 12.9), und man hat $g(a) = c$, $g(b) = d$ oder $g(a) = d$, $g(b) = c$. Für $h := g^{-1} : [c,d] \mapsto [a,b]$ gilt dann auch

$$\int_c^d f(t)\, dt = \int_{g^{-1}(c)}^{g^{-1}(d)} f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{h(c)}^{h(d)} f(h^{-1}(x))\, \frac{dx}{h'(h^{-1}(x))}\,, \tag{15}$$

wobei wieder Notation (3) verwendet wurde.

b) Beachten Sie bitte, daß bei der Substitutionsregel die Integrationsgrenzen mittransformiert werden müssen. Für unbestimmte Integrale lautet (14) so:

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx \;=\; \left(\int f(t)\, dt\right) \circ g\,. \tag{16}$$

Beispiele. a) Um das Integral $\int_a^b (cx+d)^n\, dx$ zu berechnen ($n \in \mathbb{N}$, $c \neq 0$), setzen wir $g(x) := cx + d$; dann ist $g'(x) = c$, und wir erhalten

$$\int_a^b (cx+d)^n\, dx \;=\; \frac{1}{c}\int_a^b (g(x))^n g'(x)\, dx \;=\; \frac{1}{c}\int_{g(a)}^{g(b)} t^n\, dt \;=\; \frac{1}{c}\,\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_{ca+d}^{cb+d}\,.$$

b) Zur Berechnung des Integrals $\int x \sin(x^2 - 1)\, dx$ setzen wir $g(x) := x^2 - 1$; dann ist $g'(x) = 2x$, und mit $f(t) := \sin t$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\int x \sin(x^2-1)\, dx &= \tfrac{1}{2}\int f(g(x))\, g'(x)\, dx \;=\; \tfrac{1}{2}\left(\int \sin t\, dt\right) \circ g\\ &= -\tfrac{1}{2}\cos \circ g \;=\; -\tfrac{1}{2}\cos(x^2-1)\,.\end{aligned}$$

Notationen. a) Es ist eine abkürzende Formulierung von (14), im linken Integral „$t = g(x)$“ zu *substituieren* und die Regel „$g'(x)\,dx = dt$“ zu verwenden. Mit der Notation $\frac{dt}{dx} = g'(x)$ erhält man dafür die suggestive Schreibweise „$\frac{dt}{dx}\,dx = dt$“. Ist g bijektiv, so kann man im linken Integral von (15) auch „$x = h(t)$“ substituieren und hat „$dx = \frac{dx}{dt}\,dt$“ zu beachten. Natürlich müssen die Grenzen stets mittransformiert werden.

b) Das obige Beispiel b) wird mit diesen Notationen folgendemaßen gerechnet: In dem Integral $\int_a^b x \sin(x^2-1)\,dx$ substituiert man $t = x^2 - 1$; dann ist $dt = 2x\,dx$, also $\int_a^b x \sin(x^2-1)\,dx = \frac{1}{2}\int_{a^2-1}^{b^2-1} \sin t\,dt$. Man kann auch $x = \sqrt{1+t}$ setzen und erhält dann $dx = \frac{1}{2\sqrt{1+t}}\,dt = \frac{1}{2x}\,dt$.

c) Formeln wie „$dt = \frac{dt}{dx}\,dx$“ werden hier nur als bequeme Schreibweise für (14), (15) oder (16) gelegentlich verwendet. Die präzise Bedeutung der Symbole „dx“ oder „dt“ findet man etwa in [A2], Abschnitt 30 oder [A3], Kapitel V.

20 Exponentialfunktion und Logarithmus

Lernziele:

- *Konzepte:* Exponentialfunktion und Logarithmus
- *Resultat:* Wachstumshierarchien für Funktionen und Folgen
- *Kompetenzen:* Berechnung weiterer Integrale

In diesem Abschnitt führen wir den Logarithmus und die Exponentialfunktion mit einer Methode ein, die nach Felix Klein auch für den Schulunterricht zu empfehlen ist. Wir beginnen mit einigen motivierenden Bemerkungen und werden erst ab Formel (12) exakt argumentieren.

Wachstumsprozesse und Exponentialfunktion. Wir diskutieren den Prozeß der *stetigen Verzinsung* und ähnliche Wachstumsprozesse.

a) Bei einem Zinssatz von $\alpha > 0$ (z. B. $\alpha = 0,04$) pro Jahr vermehrt sich ein Kapital K ohne Zinseszinsen innerhalb von t Jahren auf $K(1+\alpha t)$. Hat man in dieser Zeit dagegen zwei Zinstermine, so vermehrt sich K auf $K(1+\frac{\alpha t}{2})(1+\frac{\alpha t}{2})$, bei dreien auf $K(1+\frac{\alpha t}{3})^3$. Allgemein vermehrt sich das Kapital bei $n \in \mathbb{N}$ Zinsterminen auf den Betrag

$$K_n(t) \;=\; K\,(1+\tfrac{\alpha t}{n})^n \;. \tag{1}$$

Analoges gilt etwa bei *biologischen Wachstumsprozessen* (mit meist viel größerem α) oder beim *radioaktiven Zerfall* (mit negativem α).

b) Mit $n \to \infty$ erhält man den Idealfall der *„stetigen Verzinsung"*

$$K(t) \;=\; K\,\exp(\alpha t) \tag{2}$$

mit der *Exponentialfunktion*

$$\exp(x) := \lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{x}{n})^n\,, \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{3}$$

Die *Existenz dieses Grenzwertes* ist nicht offensichtlich. Einen elementaren Beweis findet man in [A1], Satz 11.1; hier ergibt sie sich leicht in Satz 20.3 aus den bisherigen Resultaten der Differential- und Integralrechnung.

c) Nach (2) wächst das Kapital K in t_1 Jahren auf den Betrag $K\,\exp(\alpha t_1)$, dieser in weiteren t_2 Jahren auf $K\,\exp(\alpha t_1)\,\exp(\alpha t_2)$. Dies stimmt natürlich mit dem Betrag $K\,\exp(\alpha(t_1+t_2))$ überein, auf den K in (t_1+t_2) Jahren wächst. Folglich sollte für die Exponentialfunktion die folgende *Funktionalgleichung* gelten:

$$\exp(x_1+x_2) \;=\; \exp(x_1)\cdot\exp(x_2)\,, \quad x_1\,,x_2 \in \mathbb{R}\,. \tag{4}$$

Die Eulersche Zahl e a) wird wie in (7.11) definiert als

$$e := \exp(1) = \lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{n})^n . \tag{5}$$

Für die *Folge* $(e_n := (1+\frac{1}{n})^n)$ hat man z. B.

$$\begin{aligned} &e_2 = 2{,}250\,,\ e_3 = 2{,}370\,,\ e_4 = 2{,}441\,,\ e_6 = 2{,}522\,,\ e_8 = 2{,}566\,,\\ &e_{12} = 2{,}613\,,\ e_{100} = 2{,}70481\,,\ e_{1000} = 2{,}71692\,,\ e_{10000} = 2{,}71815\,. \end{aligned}$$

b) In Satz 3.3 haben wir $e \le E := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \le 3$ gezeigt. Für festes $m \in \mathbb{N}$ und $n \ge m$ gilt

$$\begin{aligned} e_n &= \Big(1+\tfrac{1}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\tfrac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \tfrac{n}{n}\,\tfrac{n-1}{n}\cdots\tfrac{n-k+1}{n}\,\tfrac{1}{k!}\\ &\ge 1 + \sum_{k=1}^{m} \tfrac{n}{n}\,\tfrac{n-1}{n}\cdots\tfrac{n-k+1}{n}\,\tfrac{1}{k!}\,, \end{aligned}$$

und mit $n \to \infty$ folgt $e \ge \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} =: E_m$. Da dies für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt, hat man auch $e \ge E$, und somit gilt

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!}\,. \tag{6}$$

Es gilt die Abschätzung $E_n \le e \le E_n + \frac{1}{n\cdot n!}$, und diese liefert bereits mit $n = 35$ die Eulersche Zahl e auf 40 Stellen genau:

$$e = 2{,}7182818284590452353602874713526624977572\ldots\,.$$

Differentiation von Exponentialfunktionen. a) Wir betrachten zunächst irgendeine Funktion $E : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, die die *Funktionalgleichung*

$$E(x+y) = E(x)\cdot E(y)\,, \quad x, y \in \mathbb{R}\,, \tag{7}$$

erfüllt, also etwa $E = \exp$ oder eine der in Abschnitt 14 kurz diskutierten Funktionen $E : x \mapsto a^x$ mit $a > 0$. Stets gilt $E(x) = E(\frac{x}{2})^2 \ge 0$. Gibt es ein $y \in \mathbb{R}$ mit $E(y) = 0$, muß wegen (7) $E = 0$ die Nullfunktion sein. Für $E \ne 0$ gilt also $E(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und aus (7) folgt sofort $E(0) = 1$.

b) Ist nun $E \ne 0$ in 0 differenzierbar, so folgt für $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \tfrac{E(x+h)-E(x)}{h} &= \tfrac{E(x)\,E(h)-E(x)}{h} = E(x)\,\tfrac{E(h)-E(0)}{h}\\ &\mapsto E(x)\,E'(0) \quad \text{für } h \to 0\,, \quad \text{also} \end{aligned}$$

$$E'(x) = E'(0)\cdot E(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{8}$$

Dies ist offenbar auch für $E = 0$ richtig.

c) Man hat

$$\tfrac{d}{dx}(1+\tfrac{x}{n})^n = n\,(1+\tfrac{x}{n})^{n-1}\cdot\tfrac{1}{n} = (1+\tfrac{x}{n})^{-1}\cdot(1+\tfrac{x}{n})^n \mapsto \exp(x) \tag{9}$$

für $n \to \infty$, und dies suggeriert

$$\exp'(x) \;=\; \exp(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{10}$$

Beachten Sie, daß (9) *kein Beweis* für (10) ist (vgl. [A1], 22.13 und 22.14); bisher haben wir ja noch nicht einmal die Existenz des Grenzwerts in (3) bewiesen.

d) Jetzt nehmen wir an, daß $\exp : \mathbb{R} \mapsto (0,\infty)$ eine *Umkehrfunktion* $L : (0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ besitzt. Gilt wirklich (10), so folgt für $y := \exp(x) \in (0,\infty)$ aus Satz 14.4 sofort

$$L'(y) \;=\; \tfrac{1}{\exp'(x)} \;=\; \tfrac{1}{\exp(x)} \;=\; \tfrac{1}{y}\,. \tag{11}$$

Eine Funktion mit (11) und $L(1) = 0$ können wir aber aufgrund des *Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung* **exakt** *definieren:*

Definition. Die *Logarithmusfunktion* $\log : (0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ wird definiert durch

$$\log x := \int_1^x \tfrac{1}{t}\,dt\,, \quad x > 0\,. \tag{12}$$

20.1 Satz. *Die Logarithmusfunktion* $\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton wachsend, konkav, bijektiv und* $\mathcal{C}^\infty$ *mit*

$$\log' x \;=\; \tfrac{1}{x}\,, \quad x > 0\,. \tag{13}$$

Es gilt die Funktionalgleichung

$$\log(xy) \;=\; \log x + \log y \quad \textit{für} \;\; x, y > 0\,. \tag{14}$$

Beweis. a) Aufgrund des Hauptsatzes ist $\log$ differenzierbar mit (13) und liegt somit in $\mathcal{C}^\infty(0,\infty)$. Insbesondere ist $\log' x > 0$ für alle $x \in (0,\infty)$ und somit $\log$ streng monoton wachsend aufgrund von Theorem 12.9. Weiter ist $\log'' x = -\frac{1}{x^2} < 0$ auf $(0,\infty)$ und somit $\log$ konkav nach 16.10.

b) Für $x, y > 0$ gilt

$$\log(xy) \;=\; \int_1^{xy} \tfrac{dt}{t} \;=\; \int_1^{x} \tfrac{dt}{t} + \int_x^{xy} \tfrac{dt}{t} \;=\; \int_1^{x} \tfrac{dt}{t} + \int_1^{y} \tfrac{ds}{s} \;=\; \log x + \log y$$

aufgrund von Satz 18.4 und der Substitution $s = \frac{t}{x}$ im zweiten Integral.

c) Nach (14) gilt $\log 2^n = n \log 2 \to \infty$ für $n \to \infty$, und wegen der Monotonie von $\log$ folgt daraus $\log x \to \infty$ für $x \to \infty$. Weiter ist

$$\log x \;=\; -\log \tfrac{1}{x}\,, \quad x > 0\,, \tag{15}$$

nach (14), und daraus folgt auch $\log x \to -\infty$ für $x \to 0^+$. Damit ist dann die Funktion $\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ bijektiv aufgrund des Zwischenwertsatzes.

Beachten Sie bitte, daß der Beweis von Satz 20.1 eine Reihe wichtiger früherer Resultate benutzt.

Definition. Die Umkehrfunktion der Logarithmusfunktion $\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ heißt *Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$.

20.2 Satz. *Die Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ *ist streng monoton wachsend, konvex, bijektiv und* $\mathcal{C}^\infty$ *mit*

$$\exp'(x) \;=\; \exp(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{16}$$

Es gilt die Funktionalgleichung

$$\exp(x+y) \;=\; \exp(x)\cdot\exp(y)\,, \quad x\,,y \in \mathbb{R}\,. \tag{17}$$

Beweis. Mit $u := \exp(x) \in (0,\infty)$ folgt aus Satz 14.4 und (13) sofort

$$\exp'(x) \;=\; \tfrac{1}{\log' u} \;=\; u \;=\; \exp(x)\,,$$

und somit ist liegt exp in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Mit $v := \exp(y) > 0$ folgt wegen (14)

$$\begin{aligned}\exp(x+y) &= \exp(\log u + \log v) \;=\; \exp(\log(uv)) \;=\; uv\\ &= \exp(x)\,\exp(y)\,.\end{aligned}$$

Die anderen Behauptungen sind klar.

20.3 Satz. *Für* $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = \exp(x)$.

Beweis. Wegen $\log' 1 = 1$ gilt $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\log(1+h)}{h} = 1$. Damit folgt

$$\log(1+\frac{x}{n})^n \;=\; n\,\log(1+\frac{x}{n}) \;=\; \frac{\log(1+\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}}\cdot x \;\to\; x$$

für $n \to \infty$ und somit die Behauptung wegen der Stetigkeit von exp.

Reelle Potenzen. Nun können wir *reelle Potenzen* positiver Zahlen (vgl. S. 67) *exakt* einführen.

a) Für festes $a > 0$ erhält man durch Iteration von (17)

$$a^n \;=\; (\exp(\log a))^n \;=\; \exp(n\log a) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}\,.$$

Weiter gilt für $m \in \mathbb{N}$ auch $(\exp(\frac{1}{m}\log a))^m = \exp(m\cdot\frac{1}{m}\log a) = a$, also $\sqrt[m]{a} = \exp(\frac{1}{m}\log a)$. Für $r = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ (vgl. S. 66) folgt daraus

$$a^{n/m} := \sqrt[m]{a^n} \;=\; \exp(\tfrac{n}{m}\log a)\,,$$

und wegen $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$ und $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ gilt auch

$$a^r \;=\; \exp(r\log a) \quad \text{für } a > 0 \text{ und } r \in \mathbb{Q}\,. \tag{18}$$

b) Motiviert durch (18) definieren wir nun einfach

$$a^b \;=\; \exp(b\log a) \quad \text{für } a > 0 \text{ und } b \in \mathbb{R}\,. \tag{19}$$

c) Für die Eulersche Zahl $e = \exp(1)$ gilt $\log e = 1$, also

$$\exp(x) \;=\; e^x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,; \tag{20}$$

dies erklärt den Namen *Exponentialfunktion* für exp . Ab jetzt werden wir meist die Bezeichnung e^x an Stelle von $\exp(x)$ verwenden.

d) Nun kann man die gemäß (19) definierten Funktionen

$$\exp_a : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \quad , \quad \exp_a(x) := a^x \;=\; e^{x \log a} \quad (\text{ für } a > 0)\;, \tag{21}$$

$$p_\alpha : (0,\infty) \mapsto \mathbb{R} \quad , \quad p_\alpha(x) := x^\alpha \;=\; e^{\alpha \log x} \quad (\text{ für } \alpha \in \mathbb{R}) \tag{22}$$

betrachten. Nach Satz 11.5 sind diese $\mathcal{C}^\infty$ -Funktionen mit

$$\tfrac{d}{dx}\, a^x \;=\; \exp_a'(x) \;=\; \log a \cdot a^x\,, \qquad a > 0\,, \tag{23}$$

$$\tfrac{d}{dx}\, x^\alpha \;=\; p_\alpha'(x) \;=\; \tfrac{\alpha}{x}\, e^{\alpha \log x} \;=\; \alpha\, x^{\alpha-1}\,, \qquad x > 0\,, \tag{24}$$

aufgrund der Kettenregel. Die Funktionen p_α sind also streng monoton wachsend für $\alpha > 0$ und streng monoton fallend für $\alpha < 0$; sie sind konvex für $\alpha \geq 1$ oder $\alpha \leq 0$ und konkav für $0 \leq \alpha \leq 1$.

Einige Stammfunktionen. a) Aufgrund von (16), (12) und (24) gilt natürlich

$$\int e^{bx}\, dx \;=\; \tfrac{1}{b}\, e^{bx} \qquad \text{für} \quad b \neq 0 \qquad \text{über} \quad \mathbb{R}\,, \tag{25}$$

$$\int x^\alpha\, dx \;=\; \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} & , \quad \alpha \neq -1 \\ \log x & , \quad \alpha = -1 \end{cases} \qquad \text{über} \quad (0,\infty)\,. \tag{26}$$

b) Für eine Funktion $f \in \mathcal{C}^1(I)$ gilt außerhalb ihrer Nullstellen aufgrund der Kettenregel

$$\tfrac{d}{dx}\, \log|\,f(x)\,| \;=\; \tfrac{d}{dx}\, \log \pm f(x) \;=\; \tfrac{\pm f'(x)}{\pm f(x)} \;=\; \tfrac{f'(x)}{f(x)}\,,$$

und daraus ergibt sich sofort

$$\int \tfrac{f'(x)}{f(x)}\, dx \;=\; \log|\,f(x)\,|\,. \tag{27}$$

c) Insbesondere hat man etwa

$$\int \tfrac{x}{1+x^2}\, dx \;=\; \tfrac{1}{2}\, \log(1+x^2) \qquad \text{oder} \tag{28}$$

$$\int \tan x\, dx \;=\; -\log|\,\cos x\,|\,. \tag{29}$$

Wachstumsaussagen. a) Im Beweisteil c) von Satz 20.1 wurde

$$\log x \to \infty \;\text{ für }\; x \to \infty \quad \text{und} \quad \log x \to -\infty \;\text{ für }\; x \to 0^+ \tag{30}$$

gezeigt. Da $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ monoton wachsend und bijektiv ist, gilt auch

$$e^x \to \infty \;\text{ für }\; x \to \infty \quad \text{und} \quad e^x \to 0 \;\text{ für }\; x \to -\infty\,. \tag{31}$$

b) Aus a) folgt sofort auch

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \;=\; 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^\alpha} \;=\; 0 \quad \text{für} \;\; \alpha > 0\,. \tag{32}$$

In der Tat folgt aus $x_n \to 0^+$ folgt zunächst $\log x_n \to -\infty$ nach (30), wegen $\alpha > 0$ auch $\alpha \log x_n \to -\infty$ und dann dann $x_n^\alpha = \exp(\alpha \log x_n) \to 0$ aufgrund von (31). Aus $x_n \to \infty$ folgt weiter $\frac{1}{x_n} \to 0^+$ und dann $\frac{1}{x_n^\alpha} \to 0$.

Mit $0^\alpha := 0$ für $\alpha > 0$ ist also $p_\alpha : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ stetig.

c) Für $x > 1$ gilt offenbar

$$\log x \;=\; \int_1^x \tfrac{dt}{t} \;\le\; (x-1) \;\le\; x\,.$$

Für $\beta > 0$ folgt daraus wegen (19)

$$\log x \;=\; \tfrac{1}{\beta} \log x^\beta \;\le\; \tfrac{1}{\beta}\, x^\beta\,, \quad x > 1\,,$$

für $\alpha > 0$ also

$$\frac{\log x}{x^\alpha} \;\le\; \frac{2}{\alpha}\,\frac{x^{\alpha/2}}{x^\alpha} \;\le\; \frac{2}{\alpha}\,\frac{1}{x^{\alpha/2}} \quad \text{und somit}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} \;=\; 0 \quad \text{für} \;\; \alpha > 0\,. \tag{33}$$

Der Logarithmus *strebt* also für $x \to +\infty$ *langsamer gegen* $+\infty$ *als jede positive Potenz von* x. Aus (33) ergibt sich wegen (15) sofort auch

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \cdot \log x \;=\; 0 \quad \text{für} \;\; \alpha > 0\,. \tag{34}$$

c) Nun sei (x_n) eine Folge mit $x_n \to +\infty$ und $y_n = \exp(x_n)$. Dann gilt

$$\frac{x_n^\alpha}{\exp(x_n)} \;=\; \frac{(\log y_n)^\alpha}{y_n} \;=\; \Big(\frac{\log y_n}{y_n^{1/\alpha}}\Big)^\alpha \to 0$$

für $\alpha > 0$ aufgrund von (33), also

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} \;=\; 0 \quad \text{für} \;\; \alpha > 0\,. \tag{35}$$

Die Exponentialfunktion *strebt* also für $x \to +\infty$ *schneller gegen* $+\infty$ *als jede positive Potenz von* x.

d) Die Aussagen (33), (34) und (35) folgen auch aus der Regel von de l'Hospital, allerdings nur aus der „$\frac{\infty}{\infty}$"-Variante 16.6. Für $f(x) := \log x$ und $g(x) := x^\alpha$ mit $\alpha > 0$ etwa gilt

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \;=\; \frac{1/x}{\alpha\, x^{\alpha-1}} \;=\; \frac{1}{\alpha\, x^\alpha} \to 0 \quad \text{für} \;\; x \to \infty\,,$$

und daraus folgt dann sofort (33).

e) Die auf S. 23 diskutierte *„Wachstumshierarchie“* für Folgen kann nun verfeinert werden; sie wird hier für *Funktionen* formuliert.

Die Funktion $g : [a, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ strebt *schneller* gegen $+\infty$ als $f : [a, \infty) \mapsto \mathbb{R}$, falls $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ gilt. In der folgenden Liste strebt jede Funktion schneller nach $+\infty$ als die vorhergehende:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & (\log\log x)^{\alpha}\,, \ \alpha > 0\,; & \text{b)} & (\log x)^{\beta}\,, \ \beta > 0\,; \\ \text{c)} & x^{\gamma}\,, \ \gamma > 0\,; & \text{d)} & \exp(\delta\, x^{\eta})\,, \ \delta, \ \eta > 0\,. \end{array}$$

Dies ergibt sich leicht aus (33) und (35). Bei den Funktionen in d) wird das Wachstum primär von η bestimmt; erst bei gleichen η spielt δ eine Rolle. Zwischen den Typen b) und d) liegen die Funktionen $\exp(\gamma\,(\log x)^{\sigma})$ mit $\gamma, \ \sigma > 0$, wobei c) genau den Fall $\sigma = 1$ beschreibt. Die Funktion $x^x = e^{x \log x}$ liegt zwischen den Funktionen $e^{\delta x}$ und $\exp(\delta\, x^{\eta})$ mit $\eta > 1$.

Schließlich beweisen wir noch eine interessante Formel, die auch zur *Definition* des Logarithmus verwendet werden kann:

20.4 Satz. *Für* $x > 0$ *gilt* $\lim\limits_{n \to \infty} n\,(\sqrt[n]{x} - 1) = \log x$.

Beweis. Wegen $\exp'(0) = 1$ hat man

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \;=\; 1\,. \tag{36}$$

Für $x > 0$ gilt $y_n := \frac{\log x}{n} \to 0$ für $n \to \infty$, und daraus folgt mit (36)

$$n\,(\sqrt[n]{x} - 1) \;=\; n\,(\exp(\tfrac{1}{n}\,\log x) - 1) \;=\; \frac{\exp(y_n) - 1}{y_n} \cdot \log x \;\to\; \log x\,.$$

21 Bogenlängen, Sinus und Kosinus

Lernziele:

- *Konzepte:* Bogenlängen, Sinus und Kosinus
- *Resultat:* Eine $\mathcal{C}^1$-Funktion hat die Bogenlänge $\mathsf{L}_a^b(f) = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$.

In diesem Abschnitt werden Sinus und Kosinus mit Hilfe des Begriffs der *Bogenlänge* exakt definiert.

Bogenlängen. a) Wir bestimmen die *„Länge“* ebener *„Kurven“*, die als Graphen von Funktionen gegeben sind. Für eine *affine* Funktion $f : x \mapsto cx + d$ hat man nach dem Satz des Pythagoras

$$L \;=\; \sqrt{(b-a)^2 + (f(b)-f(a))^2} \;=\; \sqrt{1+c^2}\,(b-a) \tag{1}$$

für die Länge der Strecke zwischen den Punkten $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ auf der Geraden $\Gamma(f)$.
b) Es seien nun $J = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f \in \mathcal{C}(J)$. Für eine Zerlegung

$$Z \;=\; \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_r = b\} \in \mathfrak{Z}(J)$$

des Intervalls J wird die Länge

$$\mathsf{L}_Z(f) := \sum_{k=1}^{r} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} \tag{2}$$

des Streckenzuges durch die Punkte $(x_0, f(x_0)),\ (x_1, f(x_1)),\ \ldots,\ (x_r, f(x_r))$ als *Approximation* für die „Bogenlänge“ von $\Gamma(f)$ betrachtet. Offenbar gilt

$$\mathsf{L}_Z(f) \;\le\; \mathsf{L}_{Z^*}(f) \quad \text{für} \quad Z \subseteq Z^*. \tag{3}$$

Definition. Eine Funktion $f \in \mathcal{C}(J)$ heißt von *beschränkter Variation*, falls

$$\mathsf{L}(f) := \mathsf{L}_a^b(f) := \sup\{\mathsf{L}_Z(f) \mid Z \in \mathfrak{Z}(J)\} \;<\; \infty \tag{4}$$

gilt. $\mathsf{L}(f)$ heißt dann *Bogenlänge* des Graphen $\Gamma(f)$ von f über J.

21.1 Satz. *Eine Funktion $f \in \mathcal{C}^1(J)$ ist von beschränkter Variation, und es gilt*

$$\mathsf{L}(f) \;=\; \mathsf{L}_a^b(f) \;=\; \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx. \tag{5}$$

Beweis. Für $Z \in \mathfrak{Z}(J)$ gilt nach dem Mittelwertsatz 16.2

$$\begin{aligned} \mathsf{L}_Z(f) &= \sum_{k=1}^r \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + f'(\xi_k)^2\,(x_k - x_{k-1})^2} \\ &= \sum_{k=1}^r \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\,(x_k - x_{k-1}) \;=\; \Sigma(\sqrt{1+f'^2}, Z, \xi) \end{aligned}$$

mit geeigneten $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$; es ist also $\mathsf{L}_Z(f)$ eine *Riemannsche Zwischensumme* der stetigen Funktion $\sqrt{1+f'^2}$. Insbesondere hat man (vgl. Theorem 12.5)

$$\mathsf{L}_Z(f) \;\le\; (b-a) \,\|\, \max_{a \le x \le b} \sqrt{1 + f'(x)^2}\,,$$

und f ist von beschränkter Variation. Es sei nun $(Z^{(n)}) \subseteq \mathfrak{Z}(J)$ eine Folge mit $\mathsf{L}_{Z^{(n)}}(f) \to \mathsf{L}\,(f)$; durch Verfeinerung der $(Z^{(n)})$ kann man $\Delta(Z^{(n)}) \to 0$ erreichen, wobei wegen (3) auch $\mathsf{L}_{Z^{(n)}}(f) \to \mathsf{L}\,(f)$ gilt. Mit Theorem 18.3 folgt

$$\mathsf{L}\,(f) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mathsf{L}_{Z^{(n)}}(f) \;=\; \lim_{n\to\infty} \Sigma(\sqrt{1+f'^2}, Z^{(n)}, \xi^{(n)}) \;=\; \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx\,.$$

Beispiele. a) Für eine affine Funktion $f : x \mapsto cx + d$ hat man $f'(x) = c$ und somit $\mathsf{L}\,_a^b(f) = \int_a^b \sqrt{1+c^2}\,dx = \sqrt{1+c^2}\,(b-a)$ in Übereinstimmung mit (1).

b) Länge eines *Parabelbogens,* vgl. [A1], 23.2.

Motivation. a) Die Definition von Sinus und Kosinus in der elementaren Trigonometrie wurde bereits in Abschnitt 5 diskutiert. Mit Hilfe von Satz 21.1 können wir nun die *Länge* s des dort auftretenden *Kreisbogens* S_P zwischen den Punkten $Q := (1,0)$ und $P = (x,y)$ z. B. als Funktion von y bestimmen; dies liefert dann eine *exakte Definition* der Umkehrfunktion des Sinus, d. h. der Funktion *Arcus-Sinus.* Wir betrachten s im Fall $y > 0$ als *positiv,* im Fall $y < 0$ als *negativ.*

b) Mit der Notation

$$\backslash c, d \backslash := \begin{cases} [c,d] & , \quad c \le d \\ [d,c] & , \quad d \le c \end{cases} \tag{6}$$

für das kompakte Intervall zwischen Punkten $c, d \in \mathbb{R}$ gilt für $P = (x,y) \in S$ mit $x > 0$ offenbar

$$S_P \;=\; \{(\xi,\eta) \mid \eta \in \backslash 0, y \backslash\,,\; \xi = \sqrt{1-\eta^2}\}\,; \tag{7}$$

wegen $|\,y\,| < 1$ liegt die Funktion $f : \eta \mapsto \sqrt{1-\eta^2}$ in $\mathcal{C}^1(\backslash 0, y \backslash)$, und mit Satz 21.1 ergibt sich $s = a(y) := \int_0^y \sqrt{1+f'(\eta)^2}\,d\eta$. Wegen

$$f'(\eta) \;=\; \tfrac{1}{2}\,(1-\eta^2)^{-1/2} \cdot (-2\eta) \;=\; -\frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \tag{8}$$

folgt $s = a(y) = \int_0^y \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{1-\eta^2}}\,d\eta = \int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}$.

Definition. Die Funktion *Arcus-Sinus* wird auf $(-1,1)$ definiert durch

$$\arcsin y := \ a(y) := \int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}\,, \quad |\,y\,| < 1\,. \tag{9}$$

21.2 Satz. *Es gilt* $a \in \mathcal{C}^\infty(-1,1)$ *mit* $a'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$; *weiter ist* a *streng monoton wachsend und ungerade, und es gilt*

$$\lim_{y\to 1^-} a(y) = \tfrac{\pi}{2}\,. \tag{10}$$

Beweis. Die ersten Behauptungen sind klar. Für $0 < y < 1$ ergibt partielle Integration in (9) wegen (8)

$$\begin{aligned} a(y) \ &= \ \int_0^y \frac{1-\eta^2+\eta^2}{\sqrt{1-\eta^2}}\,d\eta \ = \ \int_0^y \sqrt{1-\eta^2}\,d\eta + \int_0^y \eta\,\frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}\,d\eta \\ &= \ \textstyle\int_0^y \sqrt{1-\eta^2}\,d\eta - \eta\,\sqrt{1-\eta^2}\,\Big|_0^y + \int_0^y \sqrt{1-\eta^2}\,d\eta \\ &= \ 2\,\textstyle\int_0^y \sqrt{1-\eta^2}\,d\eta - y\,\sqrt{1-y^2} \ =: 2\,\mathsf{A}\,(y)\,, \end{aligned}$$

wobei $\mathsf{A}\,(y)$ der Flächeninhalt des *Kreissektors* mit den Eckpunkten O, Q und P ist. Aufgrund des Hauptsatzes ist A stetig, und $y \to 1^-$ liefert mittels (18.18) sofort

$$\lim_{y\to 1^-} a(y) \ = \ 2\,\textstyle\int_0^1 \sqrt{1-\eta^2}\,d\eta \ = \ \int_{-1}^1 \sqrt{1-\eta^2}\,d\eta \ = \ \frac{\pi}{2}\,.$$

Somit ist die *Kreisfläche* π auch als *Bogenlänge eines Halbkreises* zu interpretieren.

Da der Arcus-Sinus ungerade ist, folgt aus (10) auch $\lim\limits_{y\to -1^+} a(y) = -\frac{\pi}{2}$. Aufgrund des Zwischenwertsatzes ist

$$\arcsin : \ [-1,1] \mapsto [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \tag{11}$$

eine *stetige,* streng monoton wachsende *Bijektion.*

Definition. a) Die Umkehrfunktion von $\arcsin : [-1,1] \mapsto [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ heißt *Sinus*

$$\sin : [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \mapsto [-1,1]\,. \tag{12}$$

b) Der *Kosinus* wird auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ definiert durch

$$\cos s := \ \sqrt{1-\sin^2 s}\,. \tag{13}$$

21.3 Satz. *(vgl. [A1], 24.7). a) Es ist* $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \mapsto [-1,1]$ *streng monoton wachsend, bijektiv, ungerade und stetig. Für* $|\,s\,| < \frac{\pi}{2}$ *existiert* $\sin' s = \cos s$.

b) Der Kosinus ist auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *stetig und gerade, d. h. für* $s \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *gilt* $\cos(-s) = \cos s$. *Für* $|\,s\,| < \frac{\pi}{2}$ *existiert* $\cos' s = -\sin s$.

Sinus und Kosinus werden nun wie auf S. 13 auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt:

Für $P_1 = (x_1, y_1) \in S$ mit x_1, $y_1 \leq 0$ gelten $s_1 = -\mathsf{L}\,(S_{P_1}) \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ sowie $s_1 + \pi = \mathsf{L}\,(S_{-P_1})$; für $P_2 = (x_2, y_2) \in S$ mit $x_1 \leq 0$, $y_1 \geq 0$ hat man entsprechend $s_2 = \mathsf{L}\,(S_{P_2}) \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ und $s_2 - \pi = -\mathsf{L}\,(S_{-P_2})$. Dies führt zu Teil a) der folgenden Definition; anschließend werden Sinus und Kosinus von $[-\pi, \pi]$ aus 2π- *periodisch* fortgesetzt:

Definition. a) Man definiert

$$\sin s := -\sin(s+\pi)\,,\quad \cos s := -\cos(s+\pi) \quad \text{für} \quad s \in [-\pi, -\tfrac{\pi}{2}]\,,$$
$$\sin s := -\sin(s-\pi)\,,\quad \cos s := -\cos(s-\pi) \quad \text{für} \quad s \in [\tfrac{\pi}{2}, \pi]\,.$$

b) Für $k \in \mathbb{Z}$ und $(2k-1)\pi \le s \le (2k+1)\pi$ setzt man

$$\sin s := \sin(s - 2k\pi)\,,\quad \cos s := \cos(s-2k\pi)\,.$$

21.4 Satz. *(vgl. [A1], 24.9). Durch obige Definition sind Sinus und Kosinus auf* $\mathbb{R}$ *wohldefiniert und stetig. Weiter gilt* $\sin, \cos \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ *und*

$$\sin' s \;=\; \cos s\,,\quad \cos' s \;=\; -\sin s \quad \textit{für alle} \;\; s \in \mathbb{R}\,. \tag{14}$$

Obiger Definition entnimmt man leicht, daß der Sinus auf ganz $\mathbb{R}$ ungerade, der Kosinus dort gerade ist. Nun können wir leicht zeigen:

21.5 Satz. *(vgl. [A1], 24.10). Für Sinus und Kosinus gelten die* **Funktionalgleichungen**

$$\sin(s+t) \;=\; \sin s\,\cos t \;+\; \cos s\,\sin t\,,\quad s,t \in \mathbb{R}\,, \tag{15}$$
$$\cos(s+t) \;=\; \cos s\,\cos t \;-\; \sin s\,\sin t\,,\quad s,t \in \mathbb{R}\,. \tag{16}$$

Damit sind nun Sinus und Kosinus exakt definiert und die früheren Ergebnisse exakt bewiesen.

Die Wallissche Produktformel (vgl. [A1], 24.13). Für die Integrale

$$c_n := \textstyle\int_0^\pi \sin^n x\,dx\,,\quad n \in \mathbb{N}_0\,, \tag{17}$$

erhalten wir rekursiv mittels partieller Integration

$$c_{2n} \;=\; \tfrac{2n-1}{2n} \cdot \tfrac{2n-3}{2n-2} \cdots \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \pi\,, \tag{18}$$
$$c_{2n+1} \;=\; \tfrac{2n}{2n+1} \cdot \tfrac{2n-2}{2n-1} \cdots \tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot 2\,, \tag{19}$$

und daraus ergibt sich die *Wallissche Produktformel* für $\frac{\pi}{2}$:

$$\tfrac{\pi}{2} \;=\; \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \tfrac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} \;=\; \lim_{n\to\infty} \tfrac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\tfrac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\tfrac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\tfrac{8\cdot 8}{7\cdot 9}\cdots\,. \tag{20}$$

21.6 Satz. *Die* Kreiszahl π *ist* **irrational;** *es gilt sogar* $\pi^2 \notin \mathbb{Q}$.

Beweis. a) Es sei $\pi^2 = \frac{p}{q}$ mit $p,q \in \mathbb{N}$. Wir wählen $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\tfrac{\pi\, p^n}{n!} < 1 \tag{21}$$

und betrachten das Polynom

$$f(x) := \tfrac{1}{n!}\,x^n\,(1-x)^n \;=\; \tfrac{1}{n!}\sum_{j=n}^{2n} c_j\,x^j\,,\quad c_j \in \mathbb{Z}\,.$$

Man hat $f^{(k)}(0) = 0$ für $k < n$ und $k > 2n$; für $n \leq k \leq 2n$ ist $f^{(k)}(0) = \frac{k!}{n!}\, c_k \in \mathbb{Z}$. Wegen $f(1-x) = f(x)$ folgt auch $f^{(k)}(1) \in \mathbb{Z}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

b) Nun definieren wir ein weiteres Polynom:

$$F(x) := \; q^n \left[\pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2} f''(x) + \pi^{2n-4} f^{(4)}(x) + \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x)\right].$$

Nach Konstruktion gilt dann $F(0) \in \mathbb{Z}$ und $F(1) \in \mathbb{Z}$. Weiter ist

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dx}\left[F'(x) \sin \pi x - \pi\, F(x) \cos \pi x\right] &= \left(F''(x) + \pi^2 F(x)\right) \sin \pi x \\ &= q^n \pi^{2n+2} f(x) \sin \pi x \\ &= \pi^2 p^n \; f(x) \sin \pi x\,. \end{aligned}$$

c) Damit ergibt sich

$$I := \; \pi \int_0^1 p^n \; f(x) \sin \pi x \, dx \; = \; F(0) + F(1) \in \mathbb{Z}\,;$$

andererseits ist aber $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$ auf $(0,1)$ und somit $0 < I \leq \frac{\pi\, p^n}{n!} < 1$ aufgrund von (21).

Die *Kreiszahl* π ist sogar *transzendent,* und insbesondere ist eine *„Quadratur des Kreises“* nicht möglich. Genauere Erklärungen und einen Beweis findet man in [A1], Abschnitt 44*.

22 Uneigentliche Integrale

Lernziele:

- *Konzept:* Uneigentliche Integrale
- *Methode:* Vergleichs-Methode für absolute Konvergenz
- *Kompetenzen:* Bestimmung des Konvergenzverhaltens uneigentlicher Integrale

Flächeninhalte unbeschränkter Mengen. In letzten Abschnitt ergab sich die Formel $\pi = 2 \lim\limits_{y\to 1^-} \int_0^y \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ für die Kreiszahl π. Die auf $I := [0,1)$ definierte stetige Funktion $f : x \mapsto (1-x^2)^{-1/2}$ ist auf I *unbeschränkt* und kann somit zunächst nicht integriert werden. Die Integrale $\int_0^y \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ haben aber für $y \to 1^-$ einen *Grenzwert,* den man als *(endlichen)* Flächen- inhalt der von den Geraden $x = 0$ und $x = 1$ sowie der x-Achse und dem Graphen von f begrenzten *unbeschränkten* Menge interpretieren kann. Solche Phänomene werden in diesem Abschnitt allgemein untersucht.

Definition. *a) Es seien $a < b \leq +\infty$, $I := [a,b)$ und $f \in \mathcal{C}(I)$. Das* uneigentliche Integral $\int_a^{\uparrow b} f(x)\,dx$ *heißt* konvergent, *falls der Limes* $\lim\limits_{y\to b^-} \int_a^y f(x)\,dx$ *existiert, sonst* divergent. *Im Falle der Konvergenz nennen wir diesen Limes auch den* Wert *des Integrals und schreiben*

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{y\to b^-} \int_a^y f(x)\,dx\,. \tag{1}$$

b) Analog betrachten wir im Fall $-\infty \leq a < b$ uneigentliche Integrale $\int_{a\downarrow}^b f(x)\,dx$ über das Intervall $I := (a,b]$. Im Fall der Konvergenz schreiben wir

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{y\to a^+} \int_y^b f(x)\,dx\,. \tag{2}$$

Bemerkungen. Die (eventuell divergenten) uneigentlichen Integrale $\int_a^{\uparrow b} f(x)\,dx$ sind von ihren Werten $\int_a^b f(x)\,dx$ zu unterscheiden, was hier durch die unterschiedliche Notation erleichtert werden soll. Formal betrachtet, ist $\int_a^{\uparrow b} f(x)\,dx$ nichts anderes als die auf I definierte Funktion $F : y \mapsto \int_a^y f(x)\,dx$.

22.1 Beispiele. a) Es gilt also $\pi = 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

b) $\int_0^{\uparrow\infty} e^{-x}\,dx$ ist konvergent wegen

$$\int_0^y e^{-x}\,dx \;=\; -e^{-x}\big|_0^y \;=\; 1 - e^{-y} \to 1 \quad \text{für } y \to \infty\,.$$

c) $\int_0^{\uparrow\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ ist konvergent wegen

$$\int_0^y \frac{dx}{1+x^2} \;=\; \arctan x\big|_0^y \;=\; \arctan y \to \frac{\pi}{2} \quad \text{für } y \to \infty\,.$$

d) $\int_1^{\uparrow\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ konvergiert genau für $\alpha > 1$. Denn für $\alpha \neq 1$ gilt

$$\int_1^y \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_1^y = \frac{y^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha},$$

und dies ist genau für $\alpha > 1$ konvergent mit $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$. Für $\alpha = 1$ hat man wegen $\int_1^y \frac{dx}{x} = \log x|_1^y = \log y$ Divergenz.

e) $\int_{0\downarrow}^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ konvergiert genau für $\alpha < 1$. Denn für $\alpha \neq 1$ gilt

$$\int_y^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_y^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{y^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

und dies ist genau für $\alpha < 1$ konvergent mit $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$. Für $\alpha = 1$ hat man wegen $\int_y^1 \frac{dx}{x} = \log x|_y^1 = -\log y$ Divergenz.

22.2 Satz. *Es seien* $I := [a,b)$ *und* f, $g \in \mathcal{C}(I)$.

a) Für $f \geq 0$ *ist* $\int_a^{\uparrow b} f(x)\,dx$ *genau dann konvergent, wenn die Funktion* $F : y \mapsto \int_a^y f(x)\,dx$ *auf* I *beschränkt ist.*

b) Es gelte $0 \leq f \leq g$, *und* $\int_a^{\uparrow b} g(x)\,dx$ *sei konvergent. Dann ist auch* $\int_a^{\uparrow b} f(x)\,dx$ *konvergent, und es ist* $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

Dies gilt entsprechend auch im Fall $I = (a,b]$. Aussage a) folgt aus Satz 15.4, daraus dann sofort b).

Die *Vergleichsaussage* in Satz 22.2 b) ist eine wichtige Methode für Konvergenz- oder Divergenzbeweise; in vielen Fällen können die Vergleichsfunktionen $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ verwendet werden.

22.3 Beispiele. a) Die Integrale $\int_e^{\uparrow\infty} \frac{dx}{x\,(\log x)^\gamma}$ liegen "zwischen" den konvergenten Integralen $\int_e^{\uparrow\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ $(\alpha > 1)$ und dem divergenten Integral $\int_e^{\uparrow\infty} \frac{dx}{x}$. Mittels der Substitution $t = \log x$ erhält man sofort

$$\int_e^y \frac{dx}{x\,(\log x)^\gamma} = \int_1^{\log y} \frac{dt}{t^\gamma} = \frac{1}{\gamma-1} - \frac{(\log y)^{1-\gamma}}{\gamma-1}$$

und somit Konvergenz genau für $\gamma > 1$.

b) Auch $\int_{0\downarrow}^{1/e} \frac{dx}{x\,|\log x|^\gamma} = \int_{0\downarrow}^{1/e} \frac{dx}{x\,(-\log x)^\gamma}$ konvergiert genau für $\gamma > 1$.

c) Wegen $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ für $x \geq 1$ und Beispiel 22.1 b) konvergiert $\int_0^{\uparrow\infty} e^{-x^2}\,dx$. Der Wert dieses Integrals wird erst später berechnet.

Weitere uneigentliche Integrale. a) Gelegentlich kommen auch uneigentliche Integrale mit *mehreren Singularitäten* vor; in diesem Fall müssen stets alle Grenzübergänge *unabhängig* voneinander durchgeführt werden.

b) Beispielsweise heißt ein uneigentliches Integral $\int_{a\downarrow}^{\uparrow b} f(x)\,dx$ über ein *offenes* Intervalle $I = (a,b)$ *konvergent*, falls für $a < c < b$ die *beiden* Integrale $\int_c^{\uparrow b} f(x)\,dx$ und $\int_{a\downarrow}^c f(x)\,dx$ konvergieren, sonst divergent.

c) So gilt etwa $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$. Dagegen ist das Integral $\int_{-\infty\downarrow}^{\uparrow\infty} x\,dx$ divergent, obwohl $\lim\limits_{y\to\infty} \int_{-y}^{y} x\,dx = 0$ gilt.

Die Linearitätsaussage Satz 18.5 b) gilt auch für uneigentliche Integrale.

Absolute Konvergenz. Für $f \in \mathcal{C}[a,b)$ heißt das uneigentliche Integral $\int_a^{\uparrow b} f(x)\,dx$ *absolut konvergent*, falls $\int_a^{\uparrow b} |\, f(x)\,|\,dx$ konvergiert. Analog dazu wird auch die absolute Konvergenz uneigentlicher Integrale $\int_{a\downarrow}^{b} f(x)\,dx$ und $\int_{a\downarrow}^{\uparrow b} f(x)\,dx$ definiert.

22.4 Satz. *Absolut konvergente uneigentliche Integrale sind auch konvergent.*

Beweis. Für eine Funktion $f : I \mapsto \mathbb{R}$ definieren wir

$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\} \geq 0\,, \quad f^-(x) := \max\{-f(x), 0\} \geq 0\,; \tag{3}$$

dann gilt

$$f(x) \;=\; f^+(x) - f^-(x)\,, \quad |\, f(x)\,| \;=\; f^+(x) + f^-(x)\,. \tag{4}$$

Wegen Satz 22.2 impliziert die Konvergenz von $\int_a^{\uparrow b} |\, f(x)\,|\,dx$ auch die von $\int_a^{\uparrow b} f^+(x)\,dx$ und $\int_a^{\uparrow b} f^-(x)\,dx$, somit auch die von $\int_a^{\uparrow b} f(x)\,dx$.

Die Umkehrung von Satz 22.4 ist *nicht* richtig, vgl. Beispiel 26.

23 Elementare Stammfunktionen

Lernziele:

- *Konzept:* Elementare Funktion
- *Resultat:* Rationale Funktionen besitzen elementare Stammfunktionen
- *Methoden:* Partialbruchzerlegung, die Substitution $t = \tan \frac{s}{2}$
- *Kompetenzen:* Explizite Berechnung von Stammfunktionen

Frage: Versuchen Sie, $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$ *und* $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^6}$ *zu berechnen.*

In diesem Abschnitt werden einige Klassen von Funktionen diskutiert, für die man *Stammfunktionen explizit angeben* kann.

Primfaktorzerlegung reeller Polynome. a) Ein Polynom $P \in \mathbb{R}[x]$ heißt *Teiler* von $Q \in \mathbb{R}[x]$, Notation: $P|Q$, falls es $S \in \mathbb{R}[x]$ mit $Q = SP$ gibt. Ein nicht konstantes Polynom $P \in \mathbb{R}[x]$ heißt *irreduzibel* oder *prim,* falls bis auf reelle Konstanten 1 und P die einzigen Teiler von P sind.

b) Wie im Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen hat man auch im Ring $\mathbb{R}[x]$ der Polynome über $\mathbb{R}$ (im wesentlichen) *eindeutige Zerlegungen in Primfaktoren:* Jedes Polynom $P \in \mathbb{R}[x]$ ist ein endliches Produkt irreduzibler Polynome, wobei die Faktoren bis auf Konstanten und Reihenfolge eindeutig sind. Der Beweis beruht auf dem *Euklidischen Algorithmus* 13.5.

c) Irreduzible Polynome über $\mathbb{R}$ haben Grad 1 oder Grad 2; dies wird erst später mit Hilfe *komplexer Zahlen* bewiesen. Jedes Polynom $P \in \mathbb{R}[x]$ ist also ein endliches Produkt von *Linearfaktoren* $(x-a)$, $a \in \mathbb{R}$, und von *quadratischen Faktoren* $c\,(x^2+2px+q)$ mit $p^2 < q$.

d) Es gilt beispielsweise

$$x^4 + 1 \;=\; (x^2 + \sqrt{2}x + 1)\,(x^2 - \sqrt{2}x + 1)\,. \tag{1}$$

Partialbruchzerlegung. a) Quotienten $R = \frac{P}{Q}$ von Polynomen werden als *rationale Funktionen* bezeichnet, Notation: $R \in \mathbb{R}(x)$. Durch *Kürzen* läßt sich erreichen, daß P und Q keine gemeinsamen Primfaktoren haben.

b) Durch Division mit Rest (vgl. 13.5) erhält man

$$R \;=\; \frac{P}{Q} \;=\; T + \frac{S}{Q}\,, \quad T\,, S \in \mathbb{R}[x]\,, \quad \deg S < \deg Q\,. \tag{2}$$

c) Nun zerlegt man Q in ein Produkt irreduzibler Polynome der Form $(x-a)^m$ und $(x^2+2px+q)^n$ mit $m,n \in \mathbb{N}$ und $p^2 < q$. Dann ist $\frac{S}{Q}$ eine Summe von Termen der Form

$$\frac{b}{(x-a)^k}\,, \quad 1 \le k \le m\,, \quad \text{und} \quad \frac{cx+d}{(x^2+2px+q)^\ell}\,, \quad 1 \le \ell \le n\,. \tag{3}$$

d) Beispielsweise hat man

$$\frac{3x^2-4}{(x+2)\,(3x^2-x+7)^2} \;=\; \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{3x^2-x+7} + \frac{Dx+E}{(3x^2-x+7)^2}\,.$$

e) Nach (1) gilt

$$\frac{1}{x^4+1} \;=\; \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,.$$

Multiplikation mit x^4+1 liefert

$$1 \;=\; (A+C)\,x^3 + (B+D+(C-A)\sqrt{2})\,x^2 + (A+C+(D-B)\sqrt{2})\,x + B + D$$

und daher

$$\frac{1}{x^4+1} \;=\; \frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{2}\,x+2}{x^2+\sqrt{2}\,x+1} \;-\; \frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{2}\,x-2}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}\,. \tag{4}$$

Integration rationaler Funktionen. a) Somit sind zur Integration rationaler Funktionen nur Polynome und Funktionen der Form $(x-a)^{-n}$, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ (über Intervalle I mit $a \notin I$) sowie $\frac{cx+d}{(x^2+2px+q)^n}$ mit $p^2 < q$ zu integrieren.

b) Die Substitution $t = x^2+2px+q$ liefert $dt = (2x+2p)\,dx$ und somit

$$\int \frac{2x+2p}{(x^2+2px+q)^n}\,dx \;=\; \int t^{-n}\,dt\,. \tag{5}$$

c) Es bleibt $\int \frac{1}{(x^2+2px+q)^n}\,dx$ zu berechnen. Die Substitution $t = \alpha\,(x+p)$ liefert

$$\int \frac{1}{(x^2+2px+q)^n}\,dx \;=\; \alpha^{2n-1} \int \frac{1}{(t^2+1)^n}\,dt\,, \tag{6}$$

wenn $\alpha > 0$ mit $\alpha^{-2} = p^2 - q$ gewählt wird.

d) Die Integrale $I_m(x) := \int \frac{dx}{(1+x^2)^m}$ können nur rekursiv berechnet werden. Für $m > 1$ folgt wegen $\int \frac{x}{(1+x^2)^m}\,dx = \frac{1}{2\,(1-m)\,(1+x^2)^{m-1}}$ mit partieller Integration

$$\begin{aligned} I_m(x) \;&=\; \int \tfrac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^m}\,dx \\ &=\; I_{m-1}(x) - \tfrac{x}{2\,(1-m)\,(1+x^2)^{m-1}} + \int \tfrac{dx}{2\,(1-m)\,(1+x^2)^{m-1}} \\ &=\; \tfrac{2m-3}{2m-2} I_{m-1}(x) + \tfrac{x}{2\,(m-1)\,(1+x^2)^{m-1}}\,. \end{aligned} \tag{7}$$

e) Für $m = 10$ beispielsweise ergibt sich $\int \frac{1}{(1+x^2)^{10}}\,dx \;=$

$$\begin{aligned} &\tfrac{x}{18\,(1+x^2)^9} + \tfrac{17\,x}{288\,(1+x^2)^8} + \tfrac{85\,x}{1344\,(1+x^2)^7} + \tfrac{1105\,x}{16128\,(1+x^2)^6} + \tfrac{2431\,x}{32256\,(1+x^2)^5} \\ &+ \tfrac{2431\,x}{28672\,(1+x^2)^4} + \tfrac{2431\,x}{24576\,(1+x^2)^3} + \tfrac{12155\,x}{98304\,(1+x^2)^2} + \tfrac{12155\,x}{65536\,(1+x^2)} + \tfrac{12155\,\arctan x}{65536}\,. \end{aligned}$$

Beispiel. Aus (4) erhält man

$$\int \frac{dx}{1+x^4} \;=\; \frac{\sqrt{2}}{8} \log\left(\frac{x^2+\sqrt{2}\,x+1}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}\right) \tag{8}$$
$$+\; \frac{\sqrt{2}}{4}\Big(\arctan(\sqrt{2}\,x+1)+\arctan(\sqrt{2}\,x-1)\Big)$$

und insbesondere

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} \;=\; \frac{\sqrt{2}}{4}\,\pi\,. \tag{9}$$

Rationale Funktionen in mehreren Variablen. Für die Formulierung der folgenden Beispiele ist es bequem, rationale Funktionen in *zwei* oder *drei Variablen* zu verwenden. Ein *Polynom* in zwei Variablen u, v ist eine endliche Summe von Ausdrücken $c\,u^m\,v^n$ mit $m, n \in \mathbb{N}_0$ und $c \in \mathbb{R}$, etwa $P(u,v) = 3\,u^3\,v - u\,v^2 + 4\,u$. Quotienten $R = {}^P\!/_Q$ solcher Polynome heißen *rationale Funktionen;* man schreibt $R \in \mathbb{R}(u,v)$. Entsprechend werden rationale Funktionen $R \in \mathbb{R}(u,v,w)$ in drei Variablen definiert.

Beispiele. Für $R \in \mathbb{R}(u)$ wird $I := \int R\,(e^x)\,dx$ berechnet. Die Substitution $t = e^x$ liefert wegen $dt = e^x\,dx = t\,dx$ sofort $I = \int \frac{R(t)}{t}\,dt$, wobei natürlich noch $t = e^x$ einzusetzen ist. Damit ist die Berechnung von I auf die von Integralen rationaler Funktionen zurückgeführt.

Rationale Parametrisierung des Einheitskreises. a) Für $R \in \mathbb{R}(u,v)$ soll $\int R\,(\cos s, \sin s)\,ds$ berechnet werden. Dazu benutzt man eine *rationale Parametrisierung* des Einheitskreises

$$S \;=\; \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 \mid \xi^2+\eta^2 = 1\}$$

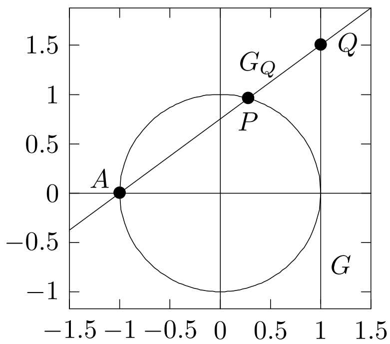

Abb. 23a

(vgl. Abb. 23a): Es sei G die Parallele zur y-Achse durch den Punkt $(1,0)$. Für einen Punkt $Q := (1,2t) \in G$ sei G_Q die Gerade durch Q und $A := (-1,0)$; weiter sei $P := (x,y)$ der Schnittpunkt von G_Q und S. Durchläuft nun Q die Gerade G, so durchläuft P offenbar $S\backslash\{A\}$. Für die Abbildung $\Phi : Q \mapsto P$ wird nun eine Formel berechnet: Man hat

$$G_Q \;=\; \{P_\lambda := (-1,0) + \lambda\,(2,2t) = (2\lambda-1, 2t\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}\,;$$

$P_\lambda \in S$ bedeutet also $(2\lambda-1)^2 + 4t^2\lambda^2 = 1$ oder $(t^2+1)\,\lambda^2 = \lambda$. Der Fall $\lambda = 0$ liefert den Punkt A, die andere Lösung $\lambda = (1+t^2)^{-1}$ liefert

$$\Phi(Q) \;=\; P \;=\; (x,y) \;=\; \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right). \tag{10}$$

Für $(x,y) = (\cos s, \sin s)$ ergibt sich daraus

$$\frac{2t}{1-t^2} \;=\; \tan s \;=\; \tan 2\cdot\frac{s}{2} \;=\; \frac{2\tan\frac{s}{2}}{1-\tan^2\frac{s}{2}}\,, \qquad \text{also}$$

$$t \;=\; \tan\tfrac{s}{2}\,. \tag{11}$$

Es ist $\varphi : s \mapsto \tan\frac{s}{2}$ eine C^∞ - Bijektion von $(-\pi,\pi)$ auf $\mathbb{R}$ mit $\varphi' > 0$.

b) Mit $t = \tan\frac{s}{2}$ oder $s = 2\,\arctan t$ ergibt sich nun wegen $ds = \frac{2\,dt}{1+t^2}$ sofort

$$\int R(\cos s, \sin s)\,ds \;=\; \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}\,, \tag{12}$$

also wieder eine Zurückführung auf den Fall rationaler Funktionen.

c) Oft läßt sich $\int R(\cos s,\sin s)\,ds$ auch einfacher berechnen. Ist etwa $R(u,v)$ *ungerade* in u, so gilt $R(u,v) = uR_1(u^2,v)$, also $R(\cos x,\sin x) \;=\; \cos x\,R_1(\cos^2 x,\sin x) = \cos x\,R_2(\sin x)$. Mit $t = \sin x$ gilt dann einfach

$$\textstyle\int R_2(\sin x)\cos x\,dx \;=\; \int R_2(t)\,dt\,.$$

Pythagoräische Tripel. Mittels Formel (10) lassen sich alle *Pythagoräischen Tripel* angeben, d. h. alle Tripel $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$ mit $a^2+b^2 = c^2$.

a) Zunächst muß a oder b gerade sein: Ist $a = 2p-1$ und $b = 2q-1$, so folgt $c^2 = 4p^2-4p+1+4q^2-4q+1 \cong 2 \bmod 4$. Insbesondere ist c^2 gerade; dies gilt dann auch für c, und wir haben den Widerspruch $c^2 \cong 0 \bmod 4$.

b) Wegen $(\frac{a}{c},\frac{b}{c}) \in S$ folgt aus (10)

$$\tfrac{a}{c} \;=\; \tfrac{1-t^2}{1+t^2}\,, \quad \tfrac{b}{c} \;=\; \tfrac{2t}{1+t^2} \quad \text{mit } t \;>\; 0\,.$$

Aus $\frac{2t}{1-t^2} = \frac{b}{a}$ folgt $t^2 - 2\frac{a}{b} - 1 = 0$ und somit $t = \frac{a}{b} \pm \sqrt{\frac{a^2}{b^2}+1} = \frac{a\pm c}{b} \in \mathbb{Q}$.

c) Wir schreiben $t = \frac{p}{q}$ mit teilerfremden $p,q \in \mathbb{N}$. Nach b) gilt

$$a \;=\; \tfrac{(q^2-p^2)\,c}{q^2+p^2}\,, \quad b \;=\; \tfrac{2pqc}{q^2+p^2}\,.$$

Nach a) können wir b als gerade annehmen und erhalten $\frac{b}{2} = \frac{pqc}{q^2+p^2} \in \mathbb{N}$. Da auch pq und q^2+p^2 teilerfremd sind, ist auch $\ell := \frac{c}{q^2+p^2} \in \mathbb{N}$. Insgesamt folgt daher

$$a \;=\; (q^2-p^2)\,\ell\,, \quad b \;=\; 2pq\,\ell\,, \quad c \;=\; (q^2+p^2)\,\ell \quad \text{mit } \ell\,, p<q \in \mathbb{N}\,. \tag{13}$$

Beispiele. a) Für $R \in \mathbb{R}(u,v)$ und $a > 0$ wird nun $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})\,dx$ (über dem Intervall $(-a,a)$) berechnet. Wegen $\sqrt{a^2-x^2} = a\sqrt{1-({}^x\!/\!_a)^2}$ wird dies mit $w = \frac{x}{a}$ zunächst auf $\int R_1(w,\sqrt{1-w^2})\,dw$ reduziert. Mit $w = \cos s$, $0 \le s \le \pi$, erhält man dann

$$\textstyle\int R_1(w,\sqrt{1-w^2})\,dw \;=\; -\int R_1(\cos s,\sin s)\,\sin s\,ds\,. \tag{14}$$

Man kann auch direkt $w = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ substituieren und erhält dann

$$\int R_1\,(w, \sqrt{1-w^2})\,dw \;=\; -\int R_1\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{4t\,dt}{(1+t^2)^2}\,. \tag{15}$$

b) Für $R \in \mathbb{R}(u,v)$ kann man zur Berechnung der Integrale $\int R\,(x, \sqrt{a^2+x^2})\,dx$ und $\int R\,(x, \sqrt{x^2-a^2})\,dx$ wieder sofort $a = 1$ annehmen. Bequeme Substitutionen ergeben sich mit Hilfe der *Hyperbel-Funktionen*:

Sinus und Kosinus hyperbolicus werden definiert durch

$$\sinh x \;=\; \tfrac{1}{2}\,(e^x \,-\, e^{-x})\,, \tag{16}$$

$$\cosh x \;=\; \tfrac{1}{2}\,(e^x \,+\, e^{-x})\,. \tag{17}$$

a) Offenbar gilt $\sinh' = \cosh\,,\quad \cosh' = \sinh$.

b) Die Funktion cosh ist gerade, und man hat $\cosh x \geq \cosh 0 = 1$ für $x \in \mathbb{R}$.

c) Die Funktion sinh ist ungerade, und man hat $0 = \sinh 0 < \sinh x < \cosh x$ für $x > 0$.

d) Man hat $\sinh x \to \infty$ für $x \to \infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} \;=\; 1$.

e) Es gelten die Funktionalgleichungen

$$\sinh(x+y) \;=\; \sinh x \cosh y \;+\; \sinh y \cosh x\,, \tag{18}$$

$$\cosh(x+y) \;=\; \cosh x \cosh y \;+\; \sinh x \sinh y\,. \tag{19}$$

f) Insbesondere hat man stets $\cosh^2 x - \sinh^2 x \;=\; 1$. Die Abbildung

$$\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\,,\quad \lambda(t) := \;(\cosh t, \sinh t)\,, \tag{20}$$

parametrisiert also den Hyperbelast $H := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\,,\; x^2 - y^2 = 1\}$.

Tangens und Kotangens hyperbolicus werden definiert durch

$$\tanh x \;=\; \frac{\sinh x}{\cosh x} \;=\; \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\,, \tag{21}$$

$$\coth x \;=\; \frac{\cosh x}{\sinh x} \;=\; \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\,,\quad x \neq 0\,. \tag{22}$$

a) $\tanh : \mathbb{R} \to (-1,1)$ ist ungerade, streng monoton wachsend und bijektiv. Es gilt

$$\tanh' x \;=\; \tfrac{1}{\cosh^2 x} \;=\; 1 - \tanh^2 x\,. \tag{23}$$

b) $\coth : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ ist ungerade, $\coth : (0,\infty) \to (1,\infty)$ ist streng monoton fallend und bijektiv. Weiter gilt

$$\coth' x \;=\; -\tfrac{1}{\sinh^2 x} \;=\; 1 - \coth^2 x\,,\quad x \neq 0\,. \tag{24}$$

Areafunktionen. Die Umkehrfunktionen von sinh, cosh, tanh, coth sind

$$\operatorname{Arsinh} x = \log(x + \sqrt{1+x^2}) \tag{25}$$

$$\operatorname{Arcosh} x = \log(x + \sqrt{x^2-1}), \quad x \geq 1 \tag{26}$$

$$\operatorname{Artanh} x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1 \tag{27}$$

$$\operatorname{Arcoth} x = \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1}, \quad |x| > 1 . \tag{28}$$

Exemplarisch wird nur (25) bewiesen: Es ist $y = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ äquivalent zu $e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$, d.h. zu $e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}$. Offenbar ist nur das "+"–Zeichen möglich, und daraus folgt (25).

Die *Ableitungen der Area-Funktionen* findet man in der folgenden Tabelle, in der noch einmal eine Reihe wichtiger Stammfunktionen zusammengestellt wird:

23.1 Tabelle.

Funktion f	*Stammfunktion F*	*Definitionsbereich*
$x^n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$x > 0$
$1/x$	$\log \lvert x \rvert$	$x \neq 0$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{Artanh} x$	$\lvert x \rvert < 1$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{Arcoth} x$	$\lvert x \rvert > 1$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{Arsinh} x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$\lvert x \rvert < 1$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{Arcosh} x$	$\lvert x \rvert > 1$

Beispiele. Für $R \in \mathbb{R}(u,v)$ liefert die Substitution $x = \sinh t$

$$\int R\,(x, \sqrt{x^2+1})\,dx = \int R\,(\sinh t, \cosh t)\, \cosh t\,dt\,; \tag{29}$$

die Substitution $x = \cosh t$ ergibt (für $x \geq 1$)

$$\int R\,(x, \sqrt{x^2-1})\, dx \;=\; \int R\,(\cosh t, \sinh t)\, \sinh t\, dt\,. \tag{30}$$

Nach (16) und (17) sind die neuen Integranden rationale Funktionen in e^t, und man kann weiter wie in dem Beispiel b) auf S. 109 verfahren.

Algebraische Funktionen. a) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ heißt *algebraisch*, wenn es Polynome $P_0, \ldots, P_n \in \mathbb{R}[x]$ mit

$$P_0 + P_1 f + P_2 f^2 + \cdots + P_n f^n = 0 \quad \text{und} \quad P_n \neq 0 \tag{31}$$

gibt. Nicht algebraische Funktionen heißen *transzendent.*

b) Für $n = 1$ erhält man aus (31) die rationalen Funktionen, für $n = 2$ Ausdrücke in Quadratwurzeln und rationalen Funktionen wie etwa $f(x) := \sqrt{x^4+1}$. Auch Ausdrücke wie $a(x) := \sqrt[6]{\sqrt{x^2+2}+3}$ sind algebraische Funktionen.

c) Für $n \geq 5$ lassen sich algebraische Funktionen i.a. nicht durch Wurzeln ausdrücken, auch nicht im Komplexen (vgl. Bemerkung 31.12 c)).

d) Für festes $x \in \mathbb{R}$ sei $g_x(y) := y^5 + (x^2+1)\,y + (x^3-4)$. Dann ist $g_x'(y) = 5y^4 + x^2 + 1 > 0$, g_x also streng monoton wachsend. Nach Satz 13.2 hat somit die Gleichung $y^5 + (x^2+1)y + (x^3-4) = 0$ genau eine Lösung $y = f(x) \in \mathbb{R}$; dadurch wird dann eine algebraische Funktion f auf $\mathbb{R}$ definiert.

e) Die Exponentialfunktion exp ist transzendent. Andernfalls gibt es Polynome $P_0, \cdots, P_n \in \mathbb{R}[x]$ mit $P_0 + P_1 e^x + \cdots + P_n e^{nx} \equiv 0$, und nach Division durch e^{nx} folgt der Widerspruch $P_n(x) \to 0$ für $x \to \infty$.

Elementare Funktionen. Wir können nun den Begriff der *„elementaren Funktion“,* der ja in der Überschrift des Kapitels wie auch des Abschnitts auftritt, etwas genauer fassen: Elementare Funktionen sind solche, die durch algebraische Operationen, Verkettungen und Umkehrungen aus algebraischen Funktionen, der Exponentialfunktion, Sinus und Kosinus bildbar sind.

Alle in Tabelle 23.1 auftretenden Funktionen sind elementar. Nach S. 108 *besitzen rationale* Funktionen *elementare Stammfunktionen,* und dies gilt auch für die in den Beispielen auf den Seiten 109 und 112 betrachteten Funktionenklassen. Andererseits besitzen viele elementare Funktionen wie etwa e^{-x^2} oder $\frac{\sin x}{x}$ *keine* elementaren Stammfunktionen; dieses Phänomen tritt auch bei der Berechnung der Längen von *Ellipsenbögen* auf, vgl. [A1], Abschnitt 30*.

24 Gleichmäßige Stetigkeit und Integration

Lernziele:

- *Konzept:* gleichmäßige Stetigkeit
- *Resultat:* Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen sind gleichmäßig stetig und daher Riemann-integrierbar
- *Kompetenzen:* Verifizierung gleichmäßiger Stetigkeit in speziellen Situationen

Beispiel. a) Die Stetigkeit der Funktion $j : (0,1) \mapsto \mathbb{R}$, $j(x) := \frac{1}{x}$, wird ausführlich bewiesen. Dazu sei $a \in (0,1)$ fest und $\varepsilon > 0$. Wegen $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| = \left| \frac{a-x}{ax} \right|$ wählt man zunächst $|\, x - a \,| < \frac{a}{2}$, woraus $x \geq \frac{a}{2}$ und $|\, j(x) - j(a) \,| \leq \frac{2}{a^2} \,|\, x - a \,|$ folgen. Wählt man nun

$$\delta := \ \min \{ \tfrac{a}{2} , \ \tfrac{a^2}{2} \varepsilon \} , \tag{1}$$

so gilt $|\, x - a \,| < \delta \Rightarrow |\, j(x) - j(a) \,| < \frac{2\delta}{a^2} \leq \varepsilon$.

b) Beachten Sie bitte, daß δ nicht nur von ε, sondern auch *von a abhängt;* bei festem $\varepsilon > 0$ gilt für $a \to 0$ in (1) offenbar $\delta \to 0$.

Es ist in der Tat unmöglich, ein nur von ε abhängiges $\delta > 0$ zu finden, das in allen Punkten $a \in (0,1)$ die Stetigkeitsbedingung aus (9.9) erfüllt: Zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ etwa wählt man $x_n := \frac{1}{n}$, $y_n := \frac{1}{n+1}$; dann ist $|\, x_n - y_n \,| < \frac{1}{n}$, aber $|\, j(x_n) - j(y_n) \,| = 1 > \varepsilon$.

c) Die in b) formulierten Beobachtungen können so veranschaulicht werden: Soll der Graph von j in Kästchen mit *konstanter Höhe* 2ε um Punkte $(a, f(a))$ eingeschlossen werden, so strebt mit $a \to 0$ deren *Breite* gegen 0.

Das soeben besprochene Phänomen führt zu folgendem Begriff:

Definition. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : I \mapsto \mathbb{R}$ heißt* gleichmäßig stetig *auf I, falls folgendes gilt:*

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ \forall \ x, y \in I \ : \ |\, x - y \,| < \delta \ \Rightarrow \ |\, f(x) - f(y) \,| < \varepsilon . \tag{2}$$

Es soll also möglich sein, zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ zu finden, das die Stetigkeitsbedingung (9.9) in allen Punkten aus I gleichzeitig erfüllt.

Eine Charakterisierung der gleichmäßigen Stetigkeit mittels *Folgen* lautet:

24.1 Satz. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : I \mapsto \mathbb{R}$ ist genau dann gleichmäßig stetig auf I, falls für je zwei Folgen (x_n) und (y_n) in I aus $|\, x_n - y_n \,| \to 0$ stets auch $|\, f(x_n) - f(y_n) \,| \to 0$ folgt.*

Beweis s. [A1], 13.6.

Gleichmäßig stetige Funktionen sind natürlich auch stetig. Obiges Beispiel zeigt, daß die Umkehrung i.a. nicht richtig ist. Aus dem *Mittelwertsatz der Differentialrechnung* ergibt sich wie im Beweis von Theorem 18.3 auf S. 82:

24.2 Satz. *Es seien* $I \subseteq \mathbb{R}$ *ein Intervall und* $f \in \mathcal{F}(I)$ *differenzierbar. Ist die Ableitung* $f' : I \mapsto \mathbb{R}$ beschränkt, *so ist* f gleichmäßig stetig *auf* I .

Beweis. Es gibt $M \geq 0$ mit $|\, f'(x)\,| \leq M$ für alle $x \in I$. Für $x, y \in I$ gilt aufgrund des Mittelwertsatzes $f(y) - f(x) = f'(\xi)\,(y-x)$ für ein $\xi \in /x, y/$ (vgl. Notation (18.6)). Es folgt

$$|\, f(y) - f(x)\,| \leq M\ |\, y - x\,| \quad \text{für } x,\ y \in I\,, \tag{3}$$

und daher gilt (2) mit $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$.

Bedingung (3) ist eine stärkere Eigenschaft als gleichmäßige Stetigkeit. Funktionen, die (3) erfüllen, heißen *Lipschitz-stetig.*

Beispiele. a) Für $\alpha \leq 1$ ist die Potenzfunktion p_α auf $[1, \infty)$ gleichmäßig stetig. In der Tat gilt $0 \leq p_\alpha'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \leq \alpha$ für $x \geq 1$.

b) Wegen $\log' x = \frac{1}{x}$ ist auch log auf $[1, \infty)$ gleichmäßig stetig.

c) Die Funktion $p_2 : [1, \infty) \mapsto \mathbb{R}$, $p_2(x) = x^2$, ist nicht gleichmäßig stetig: Für $x_n = n + \frac{1}{n}$, $y_n = n$ gilt $|\, x_n - y_n\,| = \frac{1}{n} \to 0$, aber $|\, p_2(x_n) - p_2(y_n)\,| = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} \geq 2$.

24.3 Theorem. *Es seien* $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ *ein* kompaktes *Intervall und* $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ *stetig. Dann ist* f *gleichmäßig stetig.*

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$. Die Menge

$$M := \{c \in [a, b] \mid \exists\, \delta > 0\ \forall\, x, y \in [a, c] :\ |\, x - y\,| \leq \delta \Rightarrow |\, f(x) - f(y)\,| \leq \varepsilon\} \tag{4}$$

ist wegen $a \in M$ nichtleer und durch b nach oben beschränkt. Man betrachtet $s = \sup M \in [a, b]$. Da f in s stetig ist, gibt es $\delta_1 > 0$ mit $|\, f(x) - f(s)\,| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x \in [a, b]$ mit $|\, x - s\,| \leq 2\delta_1$. Dies zeigt $|\, f(x) - f(y)\,| \leq \varepsilon$ für alle $x, y \in [a, b]$ mit $|\, x - s\,|, |\, y - s\,| \leq 2\delta_1$ und insbesondere $s \geq a + 2\delta_1$. Zu $t := s - \delta_1 \in M$ wählt man δ_t gemäß (4) und setzt $\delta := \min\{\delta_1, \delta_t\}$. Dann gilt $|\, f(x) - f(y)\,| \leq \varepsilon$ für alle $x, y \in [a, s + \delta_1] \cap [a, b]$ mit $|\, x - y\,| \leq \delta$. Somit ist $s = b$ und $b = s \in M$.

Man kann Theorem 24.3 auch mittels Intervallhalbierungen beweisen.

24.4 Folgerung. *Es sei* $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ *stetig. Falls die einseitigen Grenzwerte* $f(b^-)$ *und* $f(a^+)$ *(vgl. (9.1) und (9.2)) existieren, so ist* f *gleichmäßig stetig.*

Es gilt auch die Umkehrung dieser Aussage, vgl. [A1], Satz 13.8.

Beispiele. a) Die Umkehrung von Satz 24.2 ist i. a. nicht richtig. Die Wurzelfunktion $w_2 : x \mapsto \sqrt{x}$ ist auf $(0,1)$ gleichmäßig stetig, ihre Ableitung $w_2' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ dort aber unbeschränkt. Offenbar ist w_2 auf $[0,1]$ nicht Lipschitz-stetig.

b) Für $0 \le \alpha \le 1$ sind die Potenzfunktionen p_α auf $[0,\infty)$ gleichmäßig stetig. Auf dem Intervall $[1,\infty]$ ist in der Tat p_α' beschränkt (vgl. obiges Beispiel a)), und auf $[0,2]$ verwenden wir Theorem 24.3.

Wir können nun die *Integrierbarkeit stetiger Funktionen beweisen.* Das Argument auf S. 82 verwendet die *Lipschitz-Stetigkeit* der Funktion, kommt aber auch mit nur *gleichmäßiger Stetigkeit* aus.

24.5 Theorem. *a) Eine* stetige *Funktion* $f \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R})$ *ist* Riemann-integrierbar.

b) Für jede Folge $(Z^{(n)}) \subseteq \mathfrak{Z}(J)$ *von Zerlegungen von* J *mit* $\Delta(Z^{(n)}) \to 0$ *und jede Wahl von Zwischenpunkten gilt*

$$\Sigma(f, Z^{(n)}, \xi^{(n)}) \to I\,. \tag{5}$$

Beweis. Nach Theorem 24.3 ist $f : J \mapsto \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Zu $\varepsilon > 0$ wählt man $\delta > 0$ gemäß (2). Für $Z \in \mathfrak{Z}(J)$ mit $|\,Z\,| < \delta$ gilt dann $M_k - m_k \le \varepsilon$ für alle k, und es folgt

$$S(f,Z) - s(f,Z) \;=\; \sum_{k=1}^{r} (M_k - m_k)\,\Delta x_k \;\le\; \varepsilon \sum_{k=1}^{r} \Delta x_k \;\le\; |\,J\,|\,\varepsilon\,.$$